第 53 卷 第 2 期 2004 年 2 月
1000-3290/2004/53(02)/0367-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.2, February, 2004

量子引力的曲率两点真空相关

邵 丹[1)2)] 邵 亮[1)] 邵常贵[2)] 陈贻汉[2)]

[1)] (Department of Mathematical Sciences, Ibarati University, Mito 310-8512, Japan)

[2)] (湖北大学理论物理研究所, 武汉 430062)

(2003 年 2 月 10 日收到; 2003 年 5 月 23 日收到修改稿)

以平坦的 Minkowski 时空为背景, 得到了任意坐标系和谐和坐标系中, n 维 GR 引力和高导数引力的引力子自由传播子, 求得了四种可能的曲率两点真空相关函数的首项. 用微扰计算证明了曲率的两点真空相关函数在 GR 引力中为零, 而在高导数引力中不为零. 讨论了高导数引力与 GR 的引力子传播子、曲率相关函数的关系.

关键词: GR, 高导数引力, 引力子自由传播子, 曲率真空相关函数, 平移传播子

PACC: 0460

1. 引 言

量子场的两点相关是其重要的量子性质. 对时空中的引力场而言, 若认为时空度规是引力的基本场量, 则在通常微扰量子引力中, 度规场的两点传播子将起到决定引力场的量子性质的作用. 对于广义相对论(GR) 而言, 协变量子化之后可以进行正规化[1] 然而, 由于存在不可逾越的量纲困难, 多圈图的重整化至今没有重要进展.

不过, 在引力场中除了有度规场的两点传播子外, 尚可以建立联络以及曲率的两点相关. 它们都可以用来揭示引力场可能的量子性质. 对于曲率而言, 由于它代表引力场的某种弯曲能量, 它的相关函数以及可能的激发, 已越来越引起人们的关注[2,3].

本文求得了高导数引力和 GR 在任意坐标系和谐和坐标系下的引力子自由传播子的表式. 利用文献[2] 给出的时空曲率两点相关函数的定义, 通过具体计算, 进而求得了高导数引力中 4 种可能的曲率形式的两点真空相关函数的具体结果. 并通过计算得到了 GR 中曲率不能传播, 而在高导数引力中曲率是可以传播的结论.

2. 引力子自由传播子

按通常记法, 本文的 n 维时空 M 中高导数引力的作用量取为

$$S = - d^4 x\sqrt{-g}\,(ak^2 R - bR^2 + cR^{\mu\nu}R_{\mu\nu}),$$

式中符号的意义可见文献[4]. 将逆变度规密度 $\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ 做微扰展开 $\tilde{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + kh^{\mu\nu}$, 则 $kh^{\mu\nu}$ 可看成在 Minkowski 时空背景中的小的量子扰动, 它的存在表明在真空中有引力子传播.

对于时空联络, 将有展式

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} = -\frac{1}{2}\Big[\tilde{g}_{\beta\mu}\tilde{g}^{\beta\alpha}_{,\gamma} + \tilde{g}_{\gamma\mu}\tilde{g}^{\alpha\mu}_{,\beta} - \tilde{g}^{\alpha\gamma}\tilde{g}_{\beta\mu}\tilde{g}_{\gamma\nu}\tilde{g}^{\mu\nu}_{,\lambda} - \frac{1}{n-2}\big(\delta^{\alpha}_{\beta}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu}_{,\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu}_{,\beta} - \tilde{g}^{\alpha\mu}\tilde{g}_{\beta\gamma}\tilde{g}_{\lambda\alpha}\tilde{g}^{\lambda\alpha}_{,\mu}\big)\Big].$$

将上式按扰动 h 的量级展开后得

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \equiv \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} + \bar{\bar{\Gamma}}^{\alpha}_{\beta\gamma} + o(h^3),$$

式中

$$\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = -\frac{k}{2}\Big[h_{\beta\mu}h^{\alpha\mu}_{,\gamma} + h_{\gamma\mu}h^{\alpha\mu}_{,\beta} - \eta^{\alpha\lambda}\eta_{\beta\mu}\eta_{\gamma\nu}h^{\gamma\nu}_{,\lambda} - \frac{1}{n-2}\big(\delta^{\alpha}_{\beta}\eta_{\mu\nu}h^{\mu\nu}_{,\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}\eta_{\mu\nu}h^{\mu\nu}_{,\beta} - \eta^{\alpha\mu}\eta_{\beta\gamma}\eta_{\lambda\alpha}h^{\lambda\alpha}_{,\mu}\big)\Big],$$

$$\bar{\bar{\Gamma}}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{k^2}{2}\Big[\eta_{\beta\mu}h^{\alpha\mu}_{,\gamma} + \eta_{\gamma\mu}h^{\alpha\mu}_{,\beta} + h^{\alpha\lambda}h_{\beta\gamma,\lambda} - h_{\beta\mu}h^{\mu,\alpha}_{\gamma} - h_{\gamma\nu}h^{\nu,\alpha}_{\beta} - \frac{1}{n-2}\big(\delta^{\alpha}_{\beta}h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}_{,\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}_{,\beta} + h^{\alpha\mu}\eta_{\beta\gamma}h^{\lambda}_{\lambda,\mu} - h_{\beta\gamma}h^{\lambda,\alpha}_{\lambda} - h_{\beta\gamma}h_{\lambda\mu}h^{\lambda\alpha,\mu}\big)\Big].$$

在任意坐标系下, 利用通常的生成泛函方法, 在量子化有效作用量中取规范固定项为

$$\frac{1}{2}k^2\rho^{-1}\int d^n x\,\eta_{\mu\alpha}h^{\mu\nu}\partial^2\partial_{\nu}\partial_{\beta}h^{\alpha\beta}, \tag{1}$$

式中 ρ 为规范固定参量, 则可以求得该高导数引力的引力子在动量空间的自由传播子为

$$D(p)_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{2}{p^2}\big[r_1\,\eta_{\mu(\alpha}\eta_{\beta)\nu} + r_2\,\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} + r_3\,p_{(\mu}\eta_{\nu)(\alpha}p_{\beta)}\,p^{-2}$$

$$+ r_4(\eta_{\mu\nu}p_\alpha p_\beta + \eta_{\alpha\beta}p_\mu p_\nu)p^{-2} + r_5 p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta p^{-4}], \quad (2)$$

式中

$$r_1 = -(a + ck^2p^2)^{-1},$$

$$r_2 = \frac{a(n-2) + 4bk^2p^2 + c(n-4)k^2p^2}{(a+ck^2p^2)[a(n-2)+4b(n-1)k^2p^2 - cnk^2p^2]} + (2\rho^{-1}k^2p^2)^{-1},$$

$$r_3 = 2(a + ck^2p^2)^{-1} + 2(\rho^{-1}k^2p^2)^{-1},$$

$$r_4 = \frac{-\alpha(n-2) - 4bk^2p^2 + c(n-4)k^2p^2}{(a+ck^2p^2)[a(n-2)+4b(n-1)k^2p^2 - cnk^2p^2]} - (\rho^{-1}k^2p^2)^{-1},$$

$$r_5 = \frac{2(-2b+c)(n-2)k^2p^2}{(a+ck^2p^2)[a(n-2)+4b(n-1)k^2p^2 - cnk^2p^2]}.$$

3. 曲率真空两点相关函数的定义

在 GR 中,存在有几种曲率形式. 本文采用文献[2]中给出的四种情况下的曲率真空两点相关函数作为定义,即

a) Riemann 曲率张量的相关函数

$$G_{\text{Riemann}}(D) = \langle R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}(x)U^{\beta\beta'\mu\mu'\nu\nu'}_{\alpha\alpha'}(x,x')R^{\alpha'}_{\beta'\mu'\nu'}(x')\rangle_0. \quad (3)$$

b) Ricci 张量的相关函数

$$G_{\text{Ricci}}(D) = \langle R_{\mu\nu}(x)U^{\mu\mu'\nu\nu'}(x,x')R_{\mu'\nu'}(x')\rangle_0. \quad (4)$$

c) 转动矩阵的相关函数

$$\begin{aligned} &G_{\text{Loop}}(D,\sigma,\sigma') \\ &= \langle \Re^{\alpha}_{\beta}(x)U^{\beta\beta'}_{\alpha\alpha'}(x,x')\Re^{\alpha'}_{\beta'}(x')\rangle_0 \\ &\equiv \langle R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}(x)U^{\beta\beta'}_{\alpha\alpha'}(x,x')R^{\alpha'}_{\beta'\mu'\nu'}(x')\rangle_0\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\mu'\nu'}, \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $\delta^{\mu\nu}$, $\delta^{\mu'\nu}$ 分别为绕 x 和 x' 的无穷小曲面.

d) 曲率标量的相关函数

$$G_R(D) = \langle R(x)R(x')\rangle_0. \quad (6)$$

如上各式中, D 为从点 x' 到点 x 的测地长度. $U's$ 为张量平移传播子,它们分别定义为

$$\begin{aligned} &U^{\beta\beta'\mu\mu'\nu\nu'}_{\alpha\alpha'}(x,x') \\ &= U_{\alpha\alpha'}(x,x')U^{\beta\beta'}(x,x')U^{\mu\mu'}(x,x')U^{\nu\nu'}(x,x'), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &U^{\mu\mu'\nu\nu'}(x,x') \\ &= U^{\mu\mu'}(x,x')U^{\nu\nu'}(x,x'), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &U^{\beta\beta'}_{\alpha\alpha'}(x,x') \\ &= U_{\alpha\alpha'}(x,x')U^{\beta\beta'}(x,x'), \end{aligned} \quad (9)$$

式中矢量平移传播子

$$U^{\alpha\beta'}(x,x') = U^{\alpha}_{\alpha'}(x,x')g^{\alpha'\beta'}(x'), \quad (10)$$

$$U_{\beta\alpha'}(x,x') = U^{\alpha}_{\alpha'}(x,x')g_{\alpha\beta}(x). \quad (11)$$

这里的矢量平移传播子 $U^{\alpha}_{\alpha'}(x,x')$ 是时空流形 M 的联络的 holonomy[4],即

$$U^{\lambda}_{\nu}(x,x') = P\exp\left[\int_{x'}^{x}\mathrm{d}z^{\mu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(z)\right],$$

式中 P 为 M 的联络矩阵 $(\Gamma_\mu)^{\lambda}_{\nu}$ 沿测地线积分的排序算子. 利用微扰计算,可求得协变与逆变平移传播子分别为

$$\begin{aligned} U_{\alpha\alpha'}(x,x') &= \eta_{\alpha\alpha'} + k\Big(-h_{\alpha\alpha'} + \frac{1}{n-2}\eta_{\alpha\alpha'}h^{\lambda}_{\lambda} \\ &\quad + \eta_{\alpha\beta}\int_{x'}^{x}\mathrm{d}z^{\mu}\bar{\Gamma}^{\beta}_{\mu\alpha'}(z)\Big) + o(h^2), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} U^{\alpha\beta}(x,x') &= \eta^{\alpha\beta'} + \eta^{\lambda\beta'}\int_{x'}^{x}\mathrm{d}z^{\mu}\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\lambda}(z) \\ &\quad + k\eta^{\alpha\beta}\Big(h^{\beta'}_{\beta} - \frac{1}{n-2}\delta^{\beta'}_{\beta}h^{\gamma}_{\gamma}\Big) + o(h^2). \end{aligned} \quad (13)$$

4. 任意坐标系下的曲率真空两点相关函数

为了求得几种曲率的真空相关函数,首先须得到曲率的微扰展开式. 对于 Ricci 曲率张量,经计算得

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + \bar{\bar{R}}_{\mu\nu} + o(h^3), \quad (14)$$

式中

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\rho,\nu} - \bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu,\rho},$$

$$\bar{\bar{R}}_{\mu\nu} = \bar{\bar{\Gamma}}^{\rho}_{\mu\rho,\nu} - \bar{\bar{\Gamma}}^{\rho}_{\mu\nu,\rho} + \bar{\Gamma}^{\rho}_{\sigma\nu}\bar{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\rho} - \bar{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu}\bar{\Gamma}^{\rho}_{\sigma\rho},$$

其 h 阶分量,经计算得

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\mu\nu} &= \frac{k}{2}\Big(\eta_{\mu\alpha}\partial_\nu\partial_\beta + \eta_{\alpha\nu}\partial_\mu\partial_\beta - \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\partial^2 \\ &\quad + \frac{1}{n-2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\partial^2\Big)h^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (15)$$

对于曲率标量,有

$$R = \bar{R} + \bar{\bar{R}} + o(h^3), \quad (16)$$

式中

$$\bar{R} = \eta^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu},$$

$$\bar{\bar{R}} = k\left(h^{\mu\nu} - \frac{h^\lambda_\lambda}{n-2}\eta^{\mu\nu}\right)\bar{R}_{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu}\bar{\bar{R}}_{\mu\nu},$$

其 h 阶分量,有展式

$$\bar{R} = k\left(\partial_\alpha\partial_\beta + \frac{1}{n-2}\eta_{\alpha\beta}\partial^2\right)h^{\alpha\beta}.$$

对于 Riemann 曲率张量,经计算得

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \bar{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} + \bar{\bar{R}}^\alpha_{\beta\mu\nu} + o(h^3), \tag{17}$$

式中

$$\bar{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} = \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\mu,\nu} - \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\nu,\mu},$$

$$\bar{\bar{R}}^\alpha_{\beta\mu,\nu} = \bar{\bar{\Gamma}}^\alpha_{\mu\nu,\beta} - \bar{\bar{\Gamma}}^\alpha_{\beta\nu,\mu} + \bar{\Gamma}^\lambda_{\beta\mu}\bar{\Gamma}^\alpha_{\lambda\nu} - \bar{\Gamma}^\lambda_{\beta\nu}\bar{\Gamma}^\alpha_{\lambda\mu},$$

其 h 阶分量的展式为

$$\bar{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} = \frac{k}{2}\Big[\frac{1}{n-2}\left(\delta^\alpha_\mu h^\lambda_{\lambda,\beta,\nu} - \delta^\alpha_\nu h^\lambda_{\lambda,\beta,\mu} - \eta_{\mu\beta}h^{\lambda,\alpha}_{\lambda,\nu} + \eta_{\nu\beta}h^{\lambda,\alpha}_{\lambda,\mu}\right)$$
$$- h^\alpha_{\mu,\beta,\nu} + h^\alpha_{\beta,\mu,\nu} + h^\alpha_{\nu,\beta,\mu} - h^{,\alpha}_{\beta\nu,\mu}.$$

4.1. Riemann 曲率张量的相关函数

将(12),(13)式代入(7)式,再将得到的结果连同(17)式代入(3)式,经微扰整理,得(3)式按 h 量级展式中的首项为

$$G^1_{\rm Riemann}(D) = \frac{k^2}{4}\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}e^{-ip(x-x')}\Big\{\frac{4(n-1)}{(n-2)^2}p^4D(p)^{\alpha\beta}_{\alpha,\beta}$$
$$+\frac{8}{n-2}\left[-p^4D(p)^{\alpha\beta}_{\alpha,\beta} + p^\beta p^\mu p^2D(p)^\alpha_{\alpha,\beta\mu}\right]$$
$$+4\left[p^4D(p)^{\mu\alpha}_{\alpha,\mu} - 2p^\alpha p^\beta p^2D(p)^\mu_{\alpha,\beta\mu}\right.$$
$$\left.+p^\beta p^\nu p^\alpha p_\mu D(p)^\mu_{\alpha,\beta\nu}\right]\Big\}.$$

将(2)式代入上式,最后得

$$G^1_{\rm Riemann}(D) = k^2\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}e^{-ip(x-x')}p^2$$
$$\times\left[(-n^5+7n^4-16n^3+10n^2+8n-8)a\right.$$
$$+4(n^4+5n^3-6^2+8)(n-1)bk^2p^2$$
$$\left.+(n^5-5n^4+6n^3+10n^2-20n+8)ck^2p^2\right]/$$
$$\{(n-2)^2(a+ck^2p^2)[(n-2)a$$
$$+4(n-1)bk^2p^2-nck^2p^2]\}. \tag{18}$$

4.2. Ricci 张量的相关函数

将(13)式代入(8)式,再将所得结果连同(14)式代入(4)式,经整理,得(4)式展开式的首项为

$$G^1_{\rm Ricci}(D) = \frac{k^2}{4}\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}e^{-ip(x-x')}\Big[2p^\nu p^\lambda p^\alpha p^\mu D(p)_{\mu\lambda,\alpha\nu}$$
$$-2p^2p^\alpha p^\mu D(p)^\nu_{\mu\nu,\alpha} + \frac{4}{n-2}p^\mu p^\lambda p^2D(p)^\beta_{\mu\lambda,\beta}$$
$$+\frac{4-n}{(n-2)^2}\partial^4D(p)^{\lambda\mu}_{\lambda,\mu} + p^4D(p)^{\mu\nu}_{\mu\nu,}\Big].$$

将(2)式代入上式,最后得

$$G^1_{\rm Ricci}(D) = \frac{k^2}{4}\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}e^{-ip(x-x')}p^2$$
$$\times\left[(-n^5+7n^4-14n^3+24n-16)a\right.$$
$$-(4n^5-24n^4+44n^3-12n^2-80n+32)bk^2p^2$$
$$\left.+(n^5-5n^4+8n^3-4n^2-16n)ck^2p^2\right]/$$
$$\{(n-2)^2(a+ck^2p^2)[(n-2)a$$
$$+4(n-1)bk^2p^2-nck^2p^2]\}. \tag{19}$$

4.3. 转动矩阵的相关函数

将(12),(13)式代入(9)式,再将所得结果连同(17)式代入(5)式,得(5)式的首项为

$$G^1_{\rm Loop}(D,\sigma,\sigma') = 2k^2\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}e^{-ip(x,x')}\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\mu'\nu'}$$
$$\times\Big[\frac{1}{(n-2)^2}\eta_{\mu\mu'}p_\nu p_{\nu'}p^2D(p)^{\alpha\beta}_{\alpha,\beta}$$
$$+\frac{1}{n-2}p_\nu p_{\mu'}p^2D(p)^\alpha_{\alpha,\mu\nu'}$$
$$+\frac{1}{n-2}p_{\mu'}p_\nu p^2D(p)^\alpha_{\mu\nu',\alpha}$$
$$+p_\alpha p_\nu p_{\mu'}p^\beta D(p)^\alpha_{\beta\mu,\nu}$$
$$+p_\nu p_{\nu'}p^2D(p)^\alpha_{\mu,\alpha\mu'}.$$

将(2)式代入上式,经整理得

$$G^1_{\rm Loop}(D,\sigma,\sigma')$$
$$=2k^2\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}e^{-ip(x-x')}\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\mu'\nu'}\eta_{\mu\mu'}p_\nu p_{\nu'}$$
$$\times\left[-(n^3-4n^2+2n+4)a\right.$$
$$-4(n^3-3n^2+4)bk^2p^2$$
$$\left.+(n^3-2n^2-2n+4)ck^2p^2\right]/$$
$$\{(n-2)(a+ck^2p^2)[(n-2)a$$
$$+4(n-1)bk^2p^2-nck^2p^2]\}. \tag{20}$$

在本文可交换的近似下,(20)式可与沿哑铃形封闭回路的 Wilson 圈的计算结果相同.

4.4. 曲率标量的相关函数

将(16)式代入(6)式,经整理,得(6)式的首项为

$$G^1_R(D) = k^2\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}e^{-ip(x-x')}\Big[p^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta D(p)_{\mu\nu,\alpha\beta}$$
$$+\frac{2}{n-2}p^\mu p^\nu p^2D(p)^\alpha_{\mu\nu,\alpha}$$
$$+\frac{1}{(n-2)^2}p^4D(p)^{\mu,\alpha}_{\mu,\alpha}\Big].$$

将(2)式代入上式,经整理得

$$G^1_R(D) = k^2\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}e^{-ip(x-x')}p^2$$

$$\times [2(n-2)(a+bk^2p^2)]/ \{(a+ck^2p^2)[(n-2)a + 4(n-1)bk^2p^2 - nck^2p^2]\}. \quad (21)$$

5. 谐和坐标系下曲率的相关函数

我们已经求得了四种曲率形式在任意坐标系下的相关函数.若引入谐和条件

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0,$$

则在本文的微扰展开与近似下,在曲率平移传播子以及用路经积分求得引力子自由传播子的这些计算中,可使用条件

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0. \quad (22)$$

如采取相同的规范固定(1)式,经类似计算将得到谐和坐标系中的高导数引力子自由传播子为

$$D(p)_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{2}{a}\Big[-{}^R D(p)_{\mu\nu,\alpha\beta} + (p^2+M_1^2)^{-1}\Big(\eta_{\mu(\alpha}\eta_{\beta)\nu} - \frac{1}{n}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\Big) - \frac{n-2}{2n}(p^2+M_2^2)^{-1}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\Big], \quad (23)$$

式中

$${}^R D(p)_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{p^2}\Big(\eta_{\mu(\alpha}\eta_{\beta)\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\Big) \quad (24)$$

为 GR 量子化后的引力子传播子.而其余两项则是由曲率平方项贡献的其等效质量分别为 M_1 和 M_2 的粒子的传播子,且

$$M_1 = a^{\frac{1}{2}}\Big(c\,\frac{1}{2}k\Big)^{-1},$$

$$M_2 = [(n-2)a]^{\frac{1}{2}}[(2nb-2c)^{\frac{1}{2}k}]^{-1}.$$

在谐和条件(22)下,用类似地计算,可求得 Riemann 曲率张量、Ricci 张量、转动矩阵以及曲率标量的相关函数分别为

$$G^1_{\text{Riemann}}(D) = \frac{k^2}{4}\int\frac{\mathrm{d}^n p}{(2\pi)^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-x')}\Big[\frac{4(n-1)}{(n-2)^2}p^4 D(p)^{\alpha\beta}_{\alpha,\beta} - \frac{8}{n-2}p^4 D(p)^{\alpha\beta}_{\alpha,\beta} + 4p^4 D(p)^{\mu\alpha}_{\alpha,\mu}\Big],$$

$$G^1_{\text{Ricci}}(D) = \frac{k^2}{4}\int\frac{\mathrm{d}^n p}{(2\pi)^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-x')}\Big[\frac{4-n}{(n-2)^2}\partial^4 D(p)^{\lambda\mu}_{\lambda,\mu} + P^4 D(p)^{\mu\nu}_{\mu\nu},$$

$$G^1_{\text{Loop}}(D,\sigma,\sigma') = 2k^2\int\frac{\mathrm{d}^n p}{(2\pi)^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-x')}\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\mu'\nu'}\times\Big[\frac{1}{(n-2)^2}\eta_{\mu\mu'}p_\nu p_{\nu'}p^2 D(p)^{\alpha\beta}_{\alpha,\beta} + \frac{1}{n-2}p_\nu p_{\mu'}p^2 D(p)^{\alpha}_{\alpha,\mu\nu'} + \frac{1}{n-2}p_{\mu'}p_\nu p^2 D(p)^{\alpha}_{\mu\nu',\alpha} + p_\nu p_{\nu'}p^2 D(p)^{\alpha}_{\alpha,\mu\nu'},$$

$$G^1_R(D) = k^2\int\frac{\mathrm{d}^n p}{(2\pi)^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-x')}\frac{1}{(n-2)^2}p^4 D(p)^{\mu\alpha}_{\mu,\alpha}. \quad (25)$$

将(23)式分别代入以上四式,将得到这四种曲率形式的相关函数的最后表达式为

$$G^1_{\text{Riemann}}(D) = \frac{k^2}{4}\int\frac{\mathrm{d}^n p}{(2\pi)^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-x')}p^4\Big[\frac{n(3-n)}{ap^2(n-2)} + \frac{(n^2+n-2)}{a}(p^2+M_1^2)^{-1} + \frac{4-n}{a(2-n)}(p^2+M_2^2)^{-1}\Big],$$

$$G^1_{\text{Ricci}}(D) = \frac{k^2}{4}\int\frac{\mathrm{d}^n p}{(2\pi)^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-x')}p^4\Big[\frac{n(-n^2+n+4)}{a(n-2)p^2} + \frac{(n^2+n-2)}{a}(p^2+M_1^2)^{-1} + \frac{4}{a(2-n)}(p^2+M_2^2)^{-1}\Big], \quad (26)$$

$$G^1_{\text{Loop}}(D,\sigma,\sigma') = 2k^2\int\frac{\mathrm{d}^n p}{(2\pi)^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-x')}\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\mu'\nu'}\eta_{\mu\mu'}p_\nu p_{\nu'}\times\Big[\frac{-n^2+n+4}{a(n-2)} + \frac{n^2+n-2}{an}(p^2+M_1^2)^{-1} - \frac{4}{an(n-2)}(p^2+M_2^2)^{-1}\Big], \quad (27)$$

以及

$$G^1_R(D) = k^2\int\frac{\mathrm{d}^n p}{(2\pi)^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-x')}p^4\Big[\frac{1}{a(n-2)p^2} + \frac{n}{a(2-n)}(p^2+M_2^2)^{-1}\Big]. \quad (28)$$

6. 结 论

本文在谐和坐标系和任意坐标系下求得的几种曲率真空相关函数的首项均于该高导数引力量子化时采用的规范固定参量 ρ 无关.引力子传播子(2)式中出现的规范固定参量 ρ,在计算过程中将被自动地消除.

在该高导数引力作用量中,只要令 $a=-2$,$b=c=0$,则高导数引力将变成 GR 引力.此时引力子传播子(2)式将随着变为

$$D^R(p)_{\mu\nu,\alpha\beta}=\frac{2}{p^2}\Big[\frac{1}{2}\eta_{\mu(\alpha}\eta_{\beta)\nu}+\Big(-\frac{1}{2}+\frac{\rho}{2k^2p^2}\Big)\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}+\Big(-1+\frac{2\rho}{k^2p^2}\Big)p_{(\mu}\eta_{\nu)(\alpha}p_{\beta)}p^{-2}+\Big(\frac{1}{2}-\frac{\rho}{k^2p^2}\Big)(\eta_{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta}+\eta_{\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu})\Big],\quad(29)$$

式中 $\varepsilon_{\alpha\beta}=p_\alpha p_\beta p^{-2}$.

若独立地进行 GR 的量子化,将其量子化规范固定项取为

$$-k^{-2}r^{-1}\int d^nx(\partial_\mu\tilde{g}^{\mu\nu})^2.\quad(30)$$

这里的 r 为该 GR 量子化时采用的规范固定参量,则用类似的路积分方法可求得其引力子自由传播子为

$$^RD(p)_{\mu\nu,\alpha\beta}=-\frac{1}{2p^2}[2+r]\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}-2\eta_{\mu(\alpha}\eta_{\beta)\nu}-2(1+r)(\eta_{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta}+\eta_{\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu})+(1+r)(\eta_{\mu\alpha}\varepsilon_{\nu\beta}+\eta_{\mu\beta}\varepsilon_{\nu\alpha}+\eta_{\nu\alpha}\varepsilon_{\mu\beta}+\eta_{\nu\beta}\varepsilon_{\alpha\mu})].\quad(31)$$

当(29)式中的 ρ 和(31)式中的 r 均取为零时,由此二种渠道得到的引力子自由传播子相同.

当取 $a=-2,b=c=0$ 时,本文求得的高导数引力的四种曲率的相关函数的首项(18),(19),(20)和(21)式分别变为

$$G^{R1}_{\rm Riemann}(D)=k^2\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}e^{-ip(x-x')}p^2\frac{n^3-3n^2+2}{2(n-2)}=-k^2\frac{n^3-3n^2+2}{2(n-2)}\partial^2\delta^n(x-x'),\quad(32)$$

$$G^{R1}_{\rm Ricci}(D)=\frac{k^2}{8}\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}e^{-ip(x-x')}p^2\frac{n^3-3n^2-2n+4}{n-2}=-k^2\frac{n^3-3n^2-2n+4}{8(n-2)}\partial^2\delta^n(x-x'),\quad(33)$$

$$G^{R1}_{\rm Loop}(D,\sigma,\sigma')=k^2\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}e^{-ip(x-x')}\sigma^{\mu\nu}\sigma'^{\mu'\nu'}\eta_{\mu\mu'}p_\nu p_{\nu'}\frac{n^2-2n-2}{n-2}=-k^2\frac{n^2-2n-2}{n-2}\sigma^{\mu\nu}\sigma'^{\mu'\nu'}\eta_{\mu\mu'}\partial_\nu\partial_{\nu'}\delta^n(x-x'),\quad(34)$$

$$G^{R1}_{R}(D)=k^2\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}e^{-ip(x-x')}p^2\frac{2(1-n)}{n-2}=-k^2\frac{1-n}{n-2}\partial^2\delta^n(x-x').\quad(35)$$

如上结果与 GR 自行量子化后求得的这四种曲率的相关函数相同[5].

由(32),(33),(34)以及(35)式可知,GR 中相关函数 $G^R_{\rm Riomann}$,$G^R_{\rm Ricci}$,$G^R_{\rm Loop}$ 以及 G^R_R 的首项中,均含有 δ 函数的导数因子,这些因子是等于零的.所以这些相关函数的首项供献皆为零.高阶项和高阶修正的计算有可能得到不为零的结果,但它们数量上低微.由于引力耦合常数 k 的量纲为 $[L]^{n/2-1}$,将导致协变量子化后的量子引力不能重整,在 Einstein 引力的这种量子化情况下,使得高阶项与高阶修正越发显得不如首项的地位重要,所以在 Einstein 引力中,曲率二点真空相关是不存在的.本文得到的这一结论与众多作者的推测一致.从而 GR 中的曲率并不具有这种量子跃迁行为.

然而高导数引力与 GR 不同,由于 $b\neq0,c\neq0$,这些曲率真空相关函数的首项(32),(33),(34),(35)式皆不为零.高次项和高阶修正对相关函数的贡献也不会为零.所以对于该引力而言,由于拉氏量中曲率的非线性项的存在,不仅使得高导数引力是至少形式上可重整的[6],而且曲率也是可以被传播的.这是高导数引力的一个可能的重要量子行为,不为零的曲率真空相关的建立,可用来进一步解释引力相互作用的机理、探讨时空能量的释放与激发等.

[1] Capper D M, Leibbrandt G and Medrano M R 1973 *Phys. Rev.* D **12** 4321
[2] Modanese G 1992 *Phys. Lett.* B **288** 69
[3] Modanese G 1994 *Phys. Rev.* D **49** 6534
[4] Liang S *et al* 2002 *China. Phys. Lett.* **19** 470
[5] Shao L, Noda H, Shao D and Shao C G 2001 *Gener. Relat. Grav.* **9** 1519
[6] Stelle K S 1997 *Phys. Rev.* D**16** 953

Curvature vacuum correlations in quantum gravity

Shao Dan[1)2)] Shao Liang[1)] Shao Chang-Gui[2)] Chen Yi-Han[2)]

[1)] (*Department of Mathematical Sciences, Ibaraki University, Mito* 310-8512, *Japan*)

[2)] (*Institute of Theoretical Physics, Hubei University, Wuhan* 430062, *China*)

(Received 10 February 2003; revised manuscript received 23 May 2003)

Abstract

Under the flat Minkowski space-time background, in the harmonic and the arbitrary coordinate systems, we obtained the graviton free propagators in the n-dimensional general relativity (GR) and the high derivative gravity respectively, calculated the expressions of the leading terms of several two-point curvature vacuum correlation functions, and proved that they are zero in the GR, but in the high derivative gravity they are not zero.

Keywords: general relativity, high derivative gravity, graviton free propagators, curvature vacuum correlation functions, parellel transport propagators

PACC: 0460