

基于 Langevin 问题探讨广义 M-J 集的物理意义^{*}

王兴元[†] 孟庆业

(大连理工大学电子与信息工程学院,大连 116024)

(2003 年 4 月 25 日收到,2003 年 6 月 5 日收到修改稿)

基于对一典型 Langevin 问题——在双势井和变化的磁场中并受一恒冲量不断作用的运动带电粒子的动力学分析,利用频闪采样法,给出了描述粒子速度变化规律的复差分方程.选取适当的磁场强度和采样周期,将这一差分方程简化为用来构造广义 M-J (Mandelbrot-Julia) 集的复映射,并基于粒子的动力学特征探讨了广义 M-J 集的物理意义.结果发现:1) 广义 M-J 集的分形结构特征可形象地反映出粒子速度的变化规律;2) 选取的时间间隔有、无意义,决定了广义 M-J 集的分形结构是否具有连续性;3) 广义 M-J 集的演化,即粒子速度的变化规律依赖于相角主值范围的不同选取;4) 若改变磁场强度和采样周期的选取,如选取一随机波动的磁场,则此时广义 J 集可能会出现内部被填充的结构特征,即在速度空间中粒子的不稳定周期轨道的闭包出现“爆炸”现象.

关键词: Langevin 问题, 双势井, 磁场, 广义 M-J 集, 物理意义

PACC: 0545, 0555

1. 引 言

分形几何是现代数学的一个重要分支,是当代非线性科学中的一个活跃领域,特别是关于混沌运动的几何语言.由于世界的本质是非线性的,而混沌现象又是四处可见,因此分形几何的应用领域是非常广泛的^[1-5].目前,人们利用复变函数理论和计算机制图相结合的实验数学的方法,已发现分形中具有重要地位的广义 M-J 集深藏着精细而复杂的结构,从而丰富了分形理论^[6-10].但人们对广义 M-J 集在物理学中的应用研究却很少.仅在 1989 年和 1995 年, Bambi 和 Osbaldestin 等人^[11,12],曾基于经典 M-J 集理论先后研究了物理学中确定性分形旋转系统的配分函数的零点问题.为此,本文研究了一典型 Langevin 问题^[13],即在双势井和变化的磁场中,分析在一维离散的时间点上受恒冲量断续作用的带电粒子的动力学,并利用频闪采样法,选取适当的磁场强度和采样周期,将描述粒子速度变化规律的差分方程简化为用来构造广义 M-J 集的复映射,并基于粒子的动力学特征探讨了广义 M-J 集的物理意义.

2. 理论与方法

考虑下面一个典型的 Langevin 问题^[13]: 设一带电量 $q = -1$ 、质量 $m = 1$ 的粒子在 (x, y) 平面上运动的速度为 $v(t) = (u(t), w(t))$. 令复变量 $z(t) = u(t) + iw(t)$, 则有

$$\dot{z}(t) = v(t)e^{i\varphi(t)}, \quad (1)$$

式中 $v(t) = |v(t)| = |z(t)|$; $\varphi(t) \in [0, 2\pi)$, $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 或 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

利用频闪采样法,设在 t_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) 时刻, 粒子受到恒冲量 $c = a + ib$ 的作用. 令 $v_n^- = (u_n^-, w_n^-)$ 和 $v_n^+ = (u_n^+, w_n^+)$ 分别表示冲量 c 作用前后粒子的瞬时速度, 则由动量定理有 $a = mu_n^+ - mu_n^-$ 和 $b = mw_n^+ - mw_n^-$, 故可推出

$$z_n^+ = z_n^- + c, \quad (2)$$

式中上标 \pm 表示作用前后粒子速度的瞬时值(下同).

设在该 Langevin 问题中所研究的一个典型双势阱所对应的保守力 $A(v) = -v + v^3$ 在 v 方向作用于粒子, 则由 Newton 第二定律有 $m\dot{v} = A(v)e_v$ (e_v

^{*} 国家自然科学基金(批准号 69974008)、中国博士后科学基金及辽宁省自然科学基金(批准号 972194)资助的课题.

[†] E-mail: wangxy@dlut.edu.cn

表示 v 方向的单位矢量),即

$$\dot{v} = A(v)e_v. \tag{3}$$

如在 z 方向还有一个随时间变化的磁场 $B = (0, 0, B_n)$, 即当 $t \in (t_n, t_{n+1})$ 时, B_n 为非零常量; t_n 时刻, $B_n = 0$. 则在 $t \in (t_n, t_{n+1})$ 期间, 粒子所受的力既有 $A(v)e_v$, 也有洛伦兹力 $F = qv \times B$ (若 v 仍为上述二维向量, 则该式无意义, 故这里取 $v = (u(t), u(t), 0)$). 由 Newton 第二定律有 $m\dot{v} = A(v)e_v + qv \times B$, 故可得

$$\dot{v} = -v + |v|^2 v - v \times B. \tag{4}$$

令时间间隔 (频闪采样周期) $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ 是一关于速度 v_n^+ 的确定性函数, 即 $\tau_n = f(v_n^+, \varphi_n^+)$; 磁场强度 B_n 是一关于速度 v_n^+ 和时间间隔 τ_n 的确定性函数, 即 $B_n = h(v_n^+, \varphi_n^+, \tau_n)$. 令 $g(t, v_0)$ 为粒子初始运动方程 (3) 的解, 即

$$\dot{g} = A(g) \quad g(0, v_0) = v_0. \tag{5}$$

在连续两次恒冲量 c 的作用之间, 粒子的速度应满足

$$\begin{cases} v_{n+1}^- = g(\tau_n, v_n^+), \\ \varphi_{n+1}^- = \varphi_n^+ + \omega_n \tau_n, \end{cases} \tag{6}$$

式中 v_{n+1}^- 和 φ_{n+1}^- 分别表示下一次恒冲量 c 作用前粒子瞬时速度的绝对值和角度, $\omega_n = \frac{-qB_n}{m} = B_n$ 是 Larmor 频率. 基于上述分析 (6) 式可改写为

$$\begin{cases} v_{n+1}^- = g(f(v_n^+, \varphi_n^+), v_n^+), \\ \varphi_{n+1}^- = \varphi_n^+ + h(v_n^+, \varphi_n^+, \tau_n) f(v_n^+, \varphi_n^+). \end{cases} \tag{7}$$

在 t_{n+1} 时刻, 受恒冲量 c 的作用, 粒子速度将发生变化, 即从 v_{n+1}^- 变到 v_{n+1}^+ , 则由 (1) 式和 (2) 式, 可得

$$v_{n+1}^+ e^{i\varphi_{n+1}^+} = v_{n+1}^- e^{i\varphi_{n+1}^-} + c. \tag{8}$$

将 (7) 式代入 (8) 式, 可得复差分方程

$$v_{n+1}^+ e^{i\varphi_{n+1}^+} = g(f(v_n^+, \varphi_n^+), v_n^+) \times \exp\{i[\varphi_n^+ + h(v_n^+, \varphi_n^+, \tau_n) f(v_n^+, \varphi_n^+)]\} + c. \tag{9}$$

选取合适的 $A(v)$, $\tau_n = f(v_n, \varphi_n)$ 和 $B_n = h(v_n, \varphi_n,$

$\tau_n)$ (9) 式即可简化为构造广义 M-J 集的复映射.

3. 实验与结果

3.1. 广义 M 集

考虑由图 1(a) 所描述的广义势能 $V(v) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{4}v^4$, 则保守力 $A(v) = -\frac{\partial V}{\partial v} = -v + v^3$. 由方程 (5) 知 $\dot{g} = -g + g^3$, 即 $\int \frac{1}{g(g^2 - 1)} dg = \int dt$, 故可得 $\frac{1}{2} \ln \frac{g^2 - 1}{g^2} = t + C$ (C 为积分常数), 由初始条件可得此时方程 (5) 的解为

$$g(t, v_0) = \frac{v_0}{(v_0^2 + (1 - v_0^2)e^{2t})^{1/2}}. \tag{10}$$

在 $t \in (t_n, t_{n+1})$ 期间, 对于一个恒磁场 $B = (0, 0, B)$, 由 (4) 式两边 x, y 坐标对应相等, 有

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + |v|^2 x(t) - B |v| \sin \varphi, \\ \dot{y}(t) = -y(t) + |v|^2 y(t) + B |v| \cos \varphi. \end{cases} \tag{11}$$

将 (11) 式的第二式两边乘 i 再与第一式相加, 即可得

$$\dot{z} = -(1 - iB)z + |z|^2 z. \tag{12}$$

将 (1) 式代入 (12) 式, 并由等式两边的实部、虚部对应相等, 有

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = -v(t) + v^3(t), \\ \dot{\varphi}(t) = B. \end{cases} \tag{13}$$

解常微分方程组 (13), 再根据初始条件 $v(0) = v_0, \varphi(0) = \varphi_0$, 即可得

$$z(t) = \frac{z_0 e^{iBt}}{\sqrt{|z_0|^2 + (1 - |z_0|^2)e^{2t}}}. \tag{14}$$

(14) 式表明 $v(t)$ 越大, τ_n 越小; 反之亦然. 且 τ_n 与 φ_n 无关. 另外由前面的推导可知, 若 B 越大, 则 φ 越大, v_n^+ 也越大, 即 τ_n 越小. 故可取时间间隔 τ_n 和 磁场强度 B_n 为

$$\begin{cases} \tau_n = f(v_n^+, \varphi_n^+) = \frac{1}{2} \ln [1 + (v_n^+)^2 + \dots + (v_n^+)^{2(\alpha-2)} + (v_n^+)^{2(\alpha-1)}] \quad (\alpha > 1 \text{ 且为整数}), \\ \tau_n = f(v_n^+, \varphi_n^+) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - (v_n^+)^{-2\alpha}}{1 - (v_n^+)^{-2}} \quad (\alpha > 1 \text{ 且为小数}), \end{cases} \tag{15}$$

$$B_n = h(v_n^+, \varphi_n^+, \tau_n) = \frac{(\alpha - 1)\varphi_n^+}{\tau_n} \quad (\alpha > 1). \tag{16}$$

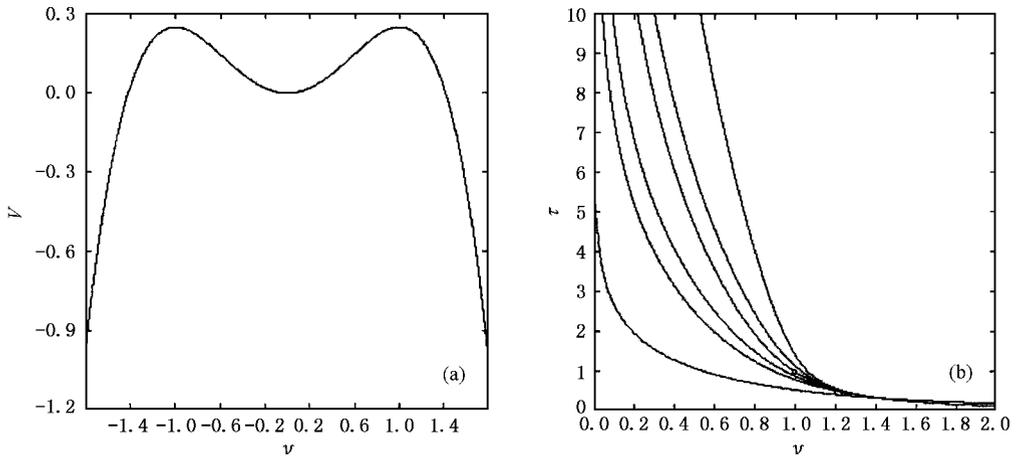


图1 推导广义M集的复映射所需势能和时间间隔的曲线 (a)势能 $V(v) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{4}v^4$ 曲线 (b) $\alpha = 2, 4, 5, 7, 5, 9, 16$ 的时间间隔曲线(小圆表示无意义点)

显然,当 $v = \pm 1$ 时, α 为小数时的 τ_n 无意义; 当 $v \neq \pm 1$ 时, τ_n 的表达式可简化为同一形式,即 (15) 式的第二式(对于不同的 α , 由图 1(b) 反映出 $\tau(v)$ 皆为单调减函数. 这与上述分析一致). 将 (15)(16) 式代入 (7) 式, 并根据 (10) 式, 可得

$$\begin{cases} v_{n+1}^- = (v_n^+)^{\alpha} \\ \varphi_{n+1}^- = \alpha\varphi_n^+ \end{cases} \quad (17)$$

将 (17) 式代入 (8) 式, 可得

$$z_{n+1}^+ = (z_n^+)^{\alpha} + c \quad (\alpha > 1). \quad (18)$$

可见冲量 c 作用后, 粒子瞬时速度的变化规律满足构造广义 M 集的复映射关系(若 (18) 式用 f 来代表, 则广义 M 集可用 M_f 表示). 因此, 广义 M 集有具体的物理意义. 由广义 M 集的定义可知^[4]: 若 $c \in M_f$, 则冲量 c 作用后粒子的瞬时速度是有界的, 即粒子落入图 1(a) 的势阱中; 若 $c \in \bar{M}_f$, 则粒子的瞬时速度将趋于无穷, 即粒子逃出图 1(a) 的势阱.

利用逃逸时间算法^[4], 作者绘制了正实数阶的广义 M 集(如图 2 所示). 其中黑色为稳定区 M_f , 白色为不稳定区 \bar{M}_f . 由图 2 可见, 正整数阶的广义 M 集, 类似 $\alpha - 1$ 个主要花瓣(简称主瓣)组成的花朵; 小数阶的广义 M 集, 类似 $\alpha - 1$ (α 表示不超过 α 的最大整数)个主瓣及一部分花瓣(简称雏瓣)组成的花朵, 并随 α 的小数部分增大, 雏瓣不断发育而演化成为一个完整主瓣. 广义 M 集有如下性质.

性质 1^[6] 正整数阶的广义 M 集具有 $(\alpha - 1)$ 倍的旋转对称性.

性质 2^[7] 正整数阶的广义 M 集由中心极坐标

为 $(r, \theta) = [1(2m + 1)\pi(\alpha - 1)]$ ($m = 0, 1, \dots, \alpha - 2$) 的 $(\alpha - 1)$ 个主瓣组成.

性质 1 表明冲量 c 旋转 $\frac{2\pi j}{\alpha - 1}$ ($j = 0, 1, \dots, \alpha - 1$) 角度后再作用于粒子, 粒子速率的变化规律不改变. 性质 2 表明 α 越大, 主瓣数量越多、尺寸越小, 又主瓣的中心位于半径为 1 的圆周上, 可见 $\alpha \rightarrow \infty$ 时, M_f 趋于单位圆盘(图 2(d)). 因此, 对于较大的 α , 若 $c \in M_f$, 则冲量 c 作用后粒子的最大瞬时速度 $v_n^+ \rightarrow 1$, 即粒子在图 1(a) 的势阱中大幅度运动(可达势垒顶端).

由复映射 $z \leftarrow z^{\alpha} + c$ ($\alpha > 1$) 构造广义 M 集, 对 z^{α} 的计算, 采用了 DeMoivre 定理, 这就涉及相角 θ 主值范围的选取^[6]. 通常相角 θ 的主值范围可选取为 $\theta \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$, $\theta \in [-\pi, \pi)$ 和 $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$. 当 α 为整数时, θ 范围的不同选取将不会影响广义 M 集的结构; 但 α 为小数时, θ 范围的不同选取将导致广义 M 集的不同演化^[6], 即粒子的动力学特征遵循不同规律. 又由于相角 θ 的选取在正 x 、正 y 、负 x 或负 y 轴处的不连续性, 导致了广义 M 集出现断裂和破碎, 产生了雏瓣, 且断裂和破碎仅出现在正 x 、正 y 、负 x 或负 y 轴处. 正小数阶广义 M 集出现了不连续现象——错动、断裂和破碎. 这与 (15) 式给出的: 当 $v = \pm 1$ 时, α 为小数时的 τ_n 无意义相对应; 正整数阶广义 M 集具有连续性, 这与 α 为整数时, 无论 v 取何值, τ_n 的表达式皆有意义相对应.

性质 3^[6] 当选取相角 $\theta \in [-\pi, \pi)$ 时, 广义 M

集关于 x 轴对称 (图 α_g)).

性质 4^[6] 相角 $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$ 的小数阶广义 M 集以 x 轴为轴翻转 180° 后即得相角 $\theta \in [-\pi/2,$

$3\pi/2)$ 的小数阶广义 M 集 ;反之亦然 (图 α_f)(h)).

性质 3 表明冲量 c 及其共轭 \bar{c} 作用于粒子 ,粒子的动力学特征保持不变 .性质 4 表明选取相角 $\theta \in$

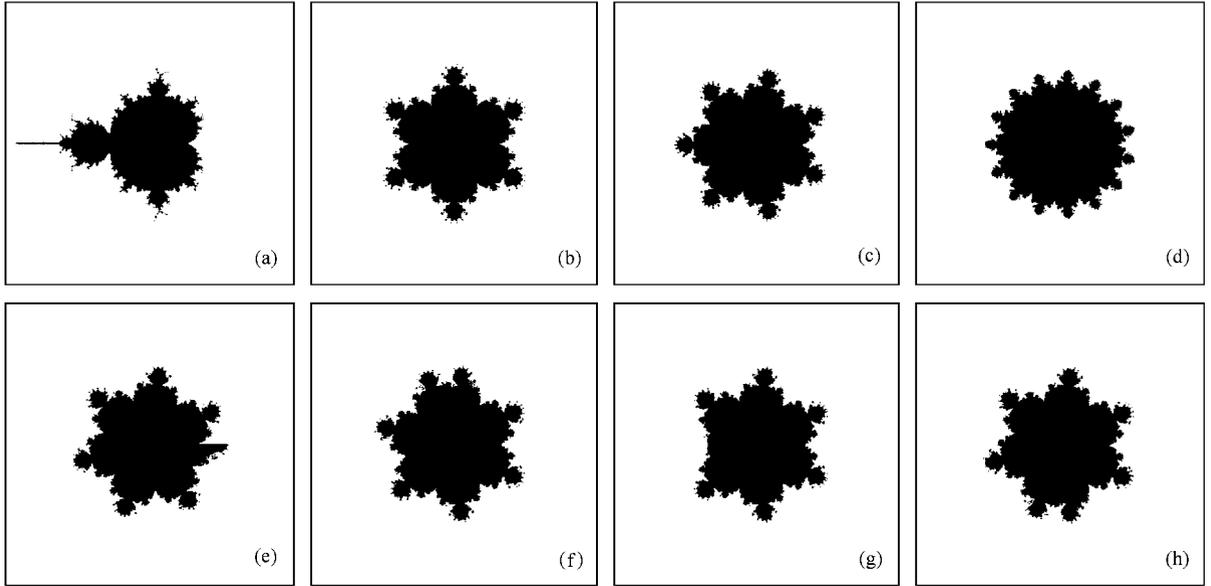


图 2 正实数阶的广义 M 集 (a) $\alpha=2$ (b) $\alpha=7$ (c) $\alpha=8$ (d) $\alpha=16$ (e) $\alpha=7.5, \theta \in [0, 2\pi)$ (f) $\alpha=7.5, \theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$ (g) $\alpha=7.5, \theta \in [-\pi, \pi)$ (h) $\alpha=7.5, \theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$

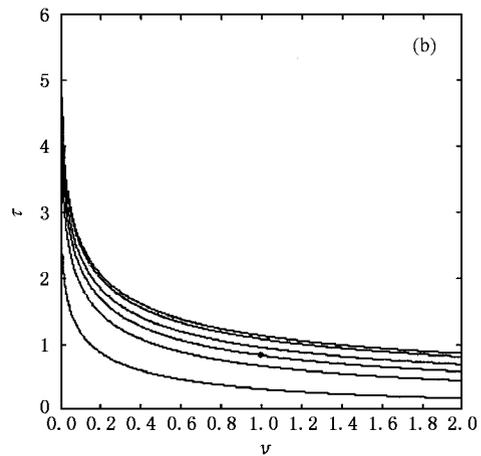
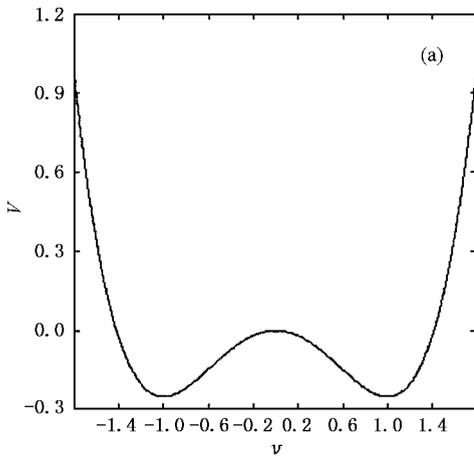


图 3 推导广义 J 集的复映射所需势能和时间的曲线 (a) 势能 $V(v) = -\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^4$ 曲线 (b) $\alpha=2, 4, 5.5, 7, 9, 10$ 的时间间隔曲线 (小圆点表示无意义)

$[-3\pi/2, \pi/2)$ 时的冲量 c 和选取相角 $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$ 时的冲量 \bar{c} 作用于粒子 ,粒子的动力学特征不变化.

3.2. 广义 J 集

若设粒子在双势阱 $V(v) = -\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^4$ 中运

动 (图 α_a)) 则保守力 $A(v) = -\frac{\partial V}{\partial v} = +v - v^3$. 满足初始条件的 (5) 式的解为

$$g(t, w_0) = \frac{v_0}{(v_0^2 + (1 - v_0^2)e^{-2t})^{1/2}} \quad (19)$$

取时间间隔 τ_n 和磁场强度 B_n 为

$$\begin{cases} \tau_n = f(v_n^+, \varphi_n^+) = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{1 + (v_n^+)^{-2/\alpha} + \dots + (v_n^+)^{-\alpha-2/\alpha} + (v_n^+)^{-\alpha-1/\alpha}} \quad (\alpha > 1 \text{ 且为整数}), \\ \tau_n = f(v_n^+, \varphi_n^+) = -\frac{1}{2} \ln \frac{1 - (v_n^+)^{-2/\alpha}}{1 - (v_n^+)^{-2}} \quad (\alpha > 1 \text{ 且为小数}), \end{cases} \quad (20)$$

$$B_n = h(v_n^+, \varphi_n^+, \tau_n) = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \frac{\varphi_n^+}{\tau_n} + k \frac{2\pi}{\beta \tau_n}, \quad (21)$$

式中 $k = 0, 1, \dots, \beta - 1$; $\beta \geq 2$ 且为整数. 显然, 当 $v = \pm 1$ 时, α 为小数时的 τ_n 无意义; 当 $v \neq \pm 1$ 时, τ_n 的表达式可简化为同一形式, 即 (20) 式的第二式 (图 3(b) 反映出 α 取不同值时, $\tau(v)$ 皆为单调减函数). 将 (20) (21) 式代入 (7) 式, 并根据 (19) 式, 可得

$$\begin{cases} v_{n+1}^- = (v_n^+)^{1/\alpha}, \\ \varphi_{n+1}^- = \frac{\varphi_n^+}{\alpha} + \frac{2k\pi}{\beta}, \end{cases} \quad (22)$$

故有

$$\begin{aligned} z_{n+1}^- &= v_{n+1}^- e^{i\varphi_{n+1}^-} = (v_n^+)^{1/\alpha} e^{i(\varphi_n^+/\alpha + 2k\pi/\beta)} \\ &= (z_n^+)^{1/\alpha} e^{i(2k\pi/\beta)}. \end{aligned}$$

由 (2) 式, 可推得

$$z_{n+1}^- = e^{(2\pi i k/\beta)} (z_n^- + c)^{1/\alpha}. \quad (23)$$

若 $\alpha = \beta$, 由 (23) 式即可获得构造广义 J 集的复映射

$$z_{n+1} = z_n^\alpha - c \quad (\alpha > 1), \quad (24)$$

((24) 式中没使用上标 - 号) 可见广义 Julia 集具有物理意义. 当 $\alpha = \beta$ 且为正整数时, (23) 式给出了 (24) 式的 α 个反函数 $w_k(z) = f^{-1}(z) = e^{(2\pi k/\alpha)}(z + c)^{1/\alpha}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, \alpha - 1$) 故可把 $\{C : w_0, w_1, \dots, w_{\alpha-1}\}$ 看成一个迭代函数系 (Iterated function system, IFS), 采用随机迭代算法^[4], 即可绘制正整数阶广义 J 集 (如图 4(a)~(d)). 当 $\alpha = \beta$ 且为正小数时, (24) 式的反函数很难给出. 为此, 作者利用逃逸时间算法绘制了正小数阶广义 J 集 (如图 4(e)~(h)). 由图 4 可见, 整数阶的广义 J 集类似 α 个主要花瓣 (简称主瓣) 组成的花朵; 小数阶的广义 J 集类似 α 个主瓣及一部分花瓣 (简称雏瓣) 组成的不对称花朵, 并随 α 的小数部分增大, 雏瓣不断发育而演化成为一个完整主瓣.

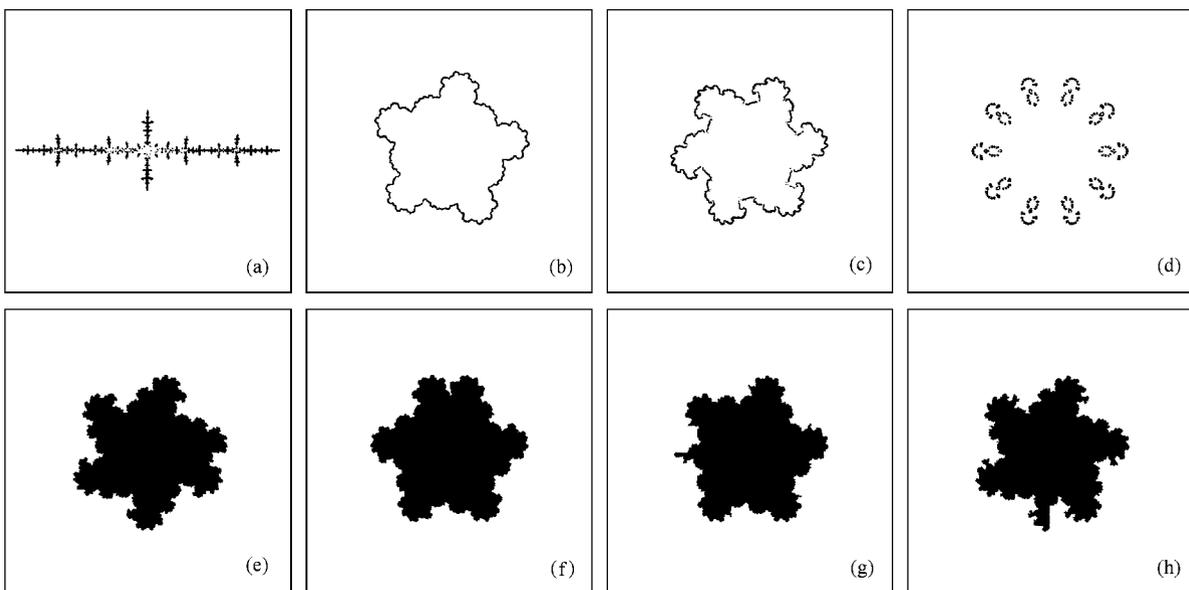


图 4 正实数阶的广义 J 集 (a) $\alpha = 2, c = 1.5$ (b) $\alpha = 5, c = 0.5 + 0.5i$ (c) $\alpha = 6, c = 0.5 + 0.5i$ (d) $\alpha = 10, c = 1.1$ (e) $\alpha = 5.5, c = 0.5 + 0.5i, \beta \in [0, 2\pi)$ (f) $\alpha = 5.5, c = 0.5 + 0.5i, \beta \in [-3\pi/2, \pi/2)$ (g) $\alpha = 5.5, c = 0.5 + 0.5i, \beta \in [-\pi, \pi)$ (h) $\alpha = 5.5, c = 0.5 + 0.5i, \beta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$

对于复映射 $f : z \leftarrow z^\alpha - c$ ($\alpha > 1$) 若令 F_f 为 f 的充满的广义 J 集, 则 F_f 的边界称为 f 的广义 J 集, 记为 J_f , 即 $J_f = \partial F_f$. 利用著名的 Montel 定理作为出发点, 可以得出 J_f 为 f 的斥性周期点的闭包^[14]. 可见对于任意 c 值 J_f 给出了速度空间中粒子的所有可能的不稳定周期轨道的闭包. 例 $c \rightarrow 0$ 时, 粒子的速度绝对值为 $v = 1$, 并在图 3(a) 给出的势垒顶端作不稳定旋转运动.

性质 5^[10] 整数阶的广义 J 集 F_f 具有 α 倍的旋转对称性, 即 J_f 也有同样的性质.

性质 6^[10] 广义 J 集由中心极坐标为 $(r, \theta) = [|c|^{1/\alpha} (\phi + 2m\pi)/\alpha]$ ($m = 0, 1, \dots, \alpha - 1$) 的 α 个主瓣组成, 其中 ϕ 为 c 的相角.

性质 5 表明冲量 c 旋转 $\frac{2\pi j}{\alpha}$ ($j = 0, 1, \dots, \alpha - 1$) 角度后再作用于粒子, 粒子的动力学特征不变化. 性质 6 表明 α 越大, 主瓣数量越多、尺寸越小, 且主瓣中心的模越接近 1, 可见 $\alpha \rightarrow \infty$ 时, J_f 趋于单位圆(图 4(d)). 因此, 对于较大的 α , 则冲量 c 作用前粒子的最大瞬时速度 $v_n \rightarrow 1$, 即粒子在图 3(a) 的势垒顶端作不稳定旋转运动.

对于非整数的 α 值, 由(24)式构造广义 J 集 F_f , 对 z^α 的计算, 仍采用了 DeMoivre 理论, 且选取相角 θ 的主值范围为 $\theta \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$, $\theta \in$

$[-\pi, \pi)$ 和 $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$. 由性质 6 可知一个完整的主瓣的中心相角为 ϕ/α . 若属于这个主瓣的所有点的最大和最小相角分别用 θ^+ 和 θ^- 来表示, 则

$$\theta^\pm = (\phi \pm \pi)/\alpha.$$

又根据性质 5, 可利用这个完整的主瓣通过按顺时针或逆时针方向旋转 $\alpha - 1$ 倍的 $2\pi/\alpha$ 弧度来获得广义 J 集的其余主瓣, 而相角 θ 的选取在正 x 、正 y 、负 x 或负 y 轴处的不连续性, 将不允许这个主瓣通过正 x 、正 y 、负 x 或负 y 轴, 这就导致穿过 x 或 y 轴(从两个方向)的主瓣部分消失, 出现了维瓣, 且仅出现在相角 θ 不连续的正 x 、正 y 、负 x 或负 y 轴处, 可见维瓣的出现仅当 α 取非整数时. 下面以选取相角 $\theta \in [0, 2\pi)$ 为例(图 4(e)), 来定量说明这一现象. 当某一完整的主瓣穿过正 x 轴时, 如果有正整数 m 和 n 满足

$$\theta^+ + 2\pi m/\alpha > 2\pi > \theta^- + 2\pi m/\alpha \quad (\text{情况 1}),$$

或

$$\theta^- - 2\pi n/\alpha < 0 < \theta^+ - 2\pi n/\alpha \quad (\text{情况 2}),$$

则将导致维瓣的出现. 对于情况 1, 维瓣出现在正 x 轴下方到相角为 $(\theta^- + 2\pi m/|\alpha|)$ 处; 对于情况 2, 维瓣出现在正 x 轴上方到相角为 $(\theta^+ - 2\pi n/|\alpha|)$ 处. 同理可对相角选取为另三种情况: $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$, $\theta \in [-\pi, \pi)$, $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$, 进行上述的定量说明. 广义 J 集的不同演化, 反映出粒子动力学特征的变化规律依赖于相角 θ 主值范围的选取.

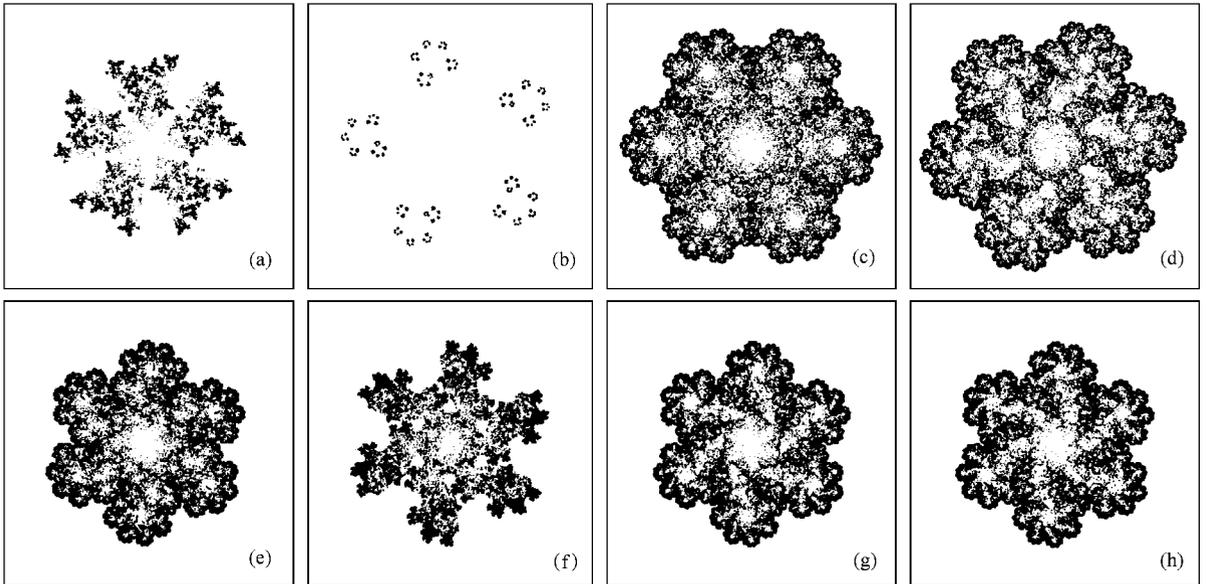


图 5 $\alpha \neq \beta$ 时 (23) 式的 IFS 吸引子 (a) $\alpha = 3, \beta = 5, c = 1$ (b) $\alpha = 3, \beta = 5, c = 2i$ (c) $\alpha = 2, \beta = 6, c = 1.5$ (d) $\alpha = 2, \beta = 6, c = 1.5 + 0.5i$ (e) $\alpha = 2.5, \beta = 6, c = 0.5 + i, \theta \in [0, 2\pi)$ (f) $\alpha = 2.5, \beta = 6, c = 0.5 + i, \theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$ (g) $\alpha = 2.5, \beta = 6, c = 0.5 + i, \theta \in [-\pi, \pi)$ (h) $\alpha = 2.5, \beta = 6, c = 0.5 + i, \theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$

正小数阶广义 J 集出现了不连续现象——错动、断裂和破碎,这与(20)式给出的:当 $v = \pm 1$ 时, α^{-1} 为小数时的 τ_n 无意义相对应;正整数阶广义 J 集具有连续性,这与 α 为整数时,无论 v 取何值, τ_n 的表达式皆有意义相对应。

当阶次 α 相同时,广义 M 集包含了关于广义 J 集构造的无穷信息,即广义 M 集是广义 J 集的图解目录集^[9]。这说明冲量 $c \in M_f$ 或 $c \in \bar{M}_f$ 时,速度空间中粒子的不稳定周期轨道的闭包在形状、连通性等方面有很大差别(图 4(c)与(d)相比较)。

$\alpha \neq \beta$ 且 β 为正整数时(23)式给出了 β 个函数: $w_k(z) = e^{(2\pi k)/\beta} (z+c)^{1/\alpha}$ ($k=0, 1, 2, \dots, \beta-1$)。把 $\{C: w_0, w_1, \dots, w_{\beta-1}\}$ 看成一个 IFS,采用随机迭代算法^[4],选取不同的 α, β 和 c 值,作者绘制的 IFS 吸引子如图 5 所示。图 5 说明,当改变磁场强度和时间的选取,如选取一随机波动的磁场(在随机迭代算法中,随机选取函数 $w_k(z)$ ($k=0, 1, 2, \dots, \beta-1$)) 进行迭代,即 k 值随机变化,这就使(21)式所给出的 B_n 随机波动,此时 IFS 吸引子——广义 J 集 J_f 可能会出现内部被填充的结构特征(图 5(c)(d)),即在速度空间中粒子的不稳定周期轨道的闭包出现“爆炸”现象。

性质 7^[15] 若双曲 IFS 为 $\{C: w_0, w_1, \dots, w_{\beta-1}\}$ (β 为正整数)其中 $w_k(z) = e^{(2\pi k)/\beta} (z+c)^{1/\alpha}$ ($k=0, 1, 2, \dots, \beta-1$), 则该 IFS 吸引子的中心为原点,且具有 β 倍的旋转对称性。

性质 7 说明若 β 为正整数,则不管 α 是否取整数,冲量 c 旋转 $\frac{2\pi j}{\beta}$ ($j=0, 1, \dots, \beta-1$) 角度后再作用

于粒子,粒子的动力学特征保持不变。

对于非整数的 α 值,构造上述 IFS 吸引子,对 $(z+c)^{1/\alpha}$ 的计算,仍采用了 DeMoivre 理论,且选取相角 θ 的主值范围为 $\theta \in [0, 2\pi), \theta \in [-3\pi/2, \pi/2), \theta \in [-\pi, \pi)$ 和 $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$ 。由前面分析可知: α 为小数时, β 范围的不同选取将导致 IFS 吸引子的不同演化,即粒子动力学特征的变化规律不同(图 5(e)–(h))。

4. 结 论

1. 本文研究了一典型 Langevin 问题,即在双势阱和变化的磁场中,分析了在一维离散的时间点上受恒冲量断续作用的带电粒子的动力学,并利用频闪采样法,选取适当的磁场强度和时间的间隔,将描述粒子速度变化规律的差分方程简化为用来构造广义 M-J 集的复映射。利用该复映射,作者构造了一系列正实数阶的广义 M-J 集,并基于粒子的动力学特征探讨了广义 M-J 集的物理意义。

2. 本文研究表明:对于不同的物理问题,选取 $A(v), \tau_n = f(v_n, \varphi_n)$ 和 $B_n = h(v_n, \varphi_n, \tau_n)$ 不同的表达式形式,既可给出相同的复映射,也可得到其他不同的复映射。如将本文给出的 $\tau_n = f(v_n, \varphi_n)$ 和 $B_n = h(v_n, \varphi_n, \tau_n)$ 表达式中的 α 换成 $w = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in R^1$), 则可得到构造广义 M 集的复映射 $z \leftarrow z^w + c$ ($w = \alpha + i\beta; \alpha, \beta \in R^1$) 和构造广义 J 集的复映射 $z \leftarrow z^w - c$ ($w = \alpha + i\beta; \alpha, \beta \in R^1$), 由这两个复映射所构造的广义 M-J 集的物理意义,进一步的理论与实验工作还有待于深入。

[1] Mandelbrot B B 1982 *The fractal geometry of nature* (San Fransisco : Freeman W H) chapt . 2
 [2] Peitgen H O and Saupe D 1988 *The science of fractal images* (Berlin : Springer-Verlag) chapt . 3
 [3] Ke X Z and Wu Z S 1998 *Acta Phys . Sin .* **47** 1346 (in Chinese) [柯熙政、吴振森 1998 物理学报 **47** 1346]
 [4] Wang X Y 2002 *Fractal Mechanism of the Generalized M-J set* (Dalian : Dalian University of Technology Press) chapt . 2 (in Chinese) [王兴元 2002 广义 M-J 集的分形机理 (大连 : 大连理工大学出版社 第二章)]
 [5] Wang X Y 2002 *Chinese science bulletin* **47** 2042
 [6] Wang X Y , Liu X D , Zhu W Y and Gu S S 2000 *Fractals* **8** 307
 [7] Wang X Y 2001 *Progress in Natural Science* **11** 693

[8] Dhurandhar S V , Bhavsar V C and Gujar U G 1993 *Computers & Graphics* **17** 89
 [9] Wang X Y , Liu X D and Zhu W Y 1999 *Acta Mathematica Scientia* **19** 73 (in Chinese) [王兴元、刘向东、朱伟勇 1999 数学物理学报 **19** 73]
 [10] Wang X Y and Zhu W Y 1999 *Journal of Northeastern University (Natural Science)* **20** 489 (in Chinese) [王兴元、朱伟勇 1999 东北大学学报 (自然科学版) **20** 489]
 [11] Bambi Hu and Bin Lin 1989 *Physical Review A* **39** 4789
 [12] Osbaldestin A H 1995 *J . Phys . A : Math . Gen* **28** 5951
 [13] Peng X S and Li J S 1996 *Neoteric Quantum Optics Theory* (Beijing : Science Press) chapt . 4 (in Chinese) [彭金生、李高翔 1996 近代量子光学导论 (北京 : 科学出版社 第四章)]

[14] Blancharel P 1984 *Bulletin of the American Mathematical Society* **11**
88

[15] Wang X Y et al 2000 *Chinese Journal of Computational Physics* **17**
407 (in Chinese) [王兴元等 2000 计算物理 **17** 407]

Study on the physical meaning for generalized Mandelbrot-Julia sets based on the Langevin problem^{*}

Wang Xing-Yuan Meng Qing-Ye

(School of Electronic & Information Engineering , Dalian University of Technology , Dalian 116024 , China)

(Received 25 April 2003 ; revised manuscript received 5 June 2003)

Abstract

Based on a dynamics research of the typical Langevin problem , i. e. , a moving charged particle under the continuous influence of a constant impulse in a double-well potential and a time-dependent magnetic field , using the stroboscopic sampling , we propose complex difference equations which can describe the change rule of particle 's velocity . By selecting appropriate magnetic intensity and time intervals (sampling period) , we reduce the difference equations to complex mapping which is used to construct the generalized M-J sets . Based on the particle 's dynamics characteristic , we discussed the physical meaning of the generalized M-J sets . The authors found that : (1) The fractal structure of the generalized M-J sets may visually reflect the change rule of particle 's velocity . (2) Whether the selected time intervals is significative determines whether the fractal structure of the generalized M-J sets has the continuity . (3) The evolution of the generalized M-J sets , i. e. , the change rule of particle 's velocity , depends on the different choices of the principal range of the phase angle . (4) If we change the choices of the magnetic intensity and time intervals , for example , choose a random fluctuant magnetic field , the generalized J sets may present the interior-filling structure feature , i. e. , " explosion " phenomena appear in the closure of the particle 's instable periodic orbits in the velocity space .

Keywords : Langevin problem , double-well potential , magnetic field , generalized M-J sets , physical meaning

PACC : 0545 , 0555

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 69974008) , the Postdoctoral Science Foundation of China and the Natural Science Foundation of Liaoning province (Grant No. 972194) .