

# 随机表面散射光场的格林函数法 与基尔霍夫近似的比较<sup>\*</sup>

刘春香<sup>1 B)</sup> 程传福<sup>2 B)</sup> 任晓荣<sup>3)</sup> 刘 曼<sup>2 B)</sup> 滕树云<sup>2)</sup> 徐至展<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>中国科学院物理研究所和凝聚态物理中心光物理实验室,北京 100080)

<sup>2)</sup>中国科学院上海光学与精密机械研究所,上海 201800)

<sup>3)</sup>山东大学物理系,济南 250014)

(2003 年 2 月 19 日收到,2003 年 6 月 13 日收到修改稿)

从简谐波满足的亥姆霍兹方程出发,将由格林定理得到的介质分界面上的积分方程转化为以表面上的光波及其导数为未知量的线性方程组,并对其进行数值求解,实现了光场的数值计算.同时,由透射光场的格林函数积分得出了基尔霍夫近似下光场的表达式.通过类比推导夫琅和费面上散斑场自相关函数的方法,提出了产生随机表面及其导数的傅里叶变换方法.在此基础上,对采用基尔霍夫近似进行自仿射分形随机表面的散射光场数值计算的精确程度进行了研究.发现在随机表面粗糙度比较小时,基尔霍夫近似的精度比较高;在粗糙度相同的情况下,表面的分形维数越小,基尔霍夫近似的精度越高.本结果对于基尔霍夫近似用于自仿射分形随机表面散射光场研究的适用范围的确定具有重要指导意义.

关键词:格林函数积分,基尔霍夫近似,自仿射分形随机表面

PACC: 4225F, 3115

## 1. 引 言

自仿射分形随机表面是一种能够较为精确地描述诸如从材料生长表面<sup>[1,2]</sup>到天然散射体<sup>[3,4]</sup>的许多实际表面的模型.近年来关于其光散射特性已有许多文献分别用理论、实验和计算模拟的方法进行了大量研究工作.这其中的理论研究包括 Yang 与 Zhao 等人<sup>[5,6]</sup>进行的自仿射分形随机表面光散射的开拓性研究工作,以及后来的 Simonsen 等人<sup>[7,8]</sup>关于其他特性方面的理论研究工作.对于自仿射分形随机表面光散射的数值计算的研究,不仅是分形现象研究中的重要内容,而且以其表面参数调整灵活和相应实验条件改变方便,而成为研究该类表面光散射的重要方法.这对于理论结果的验证、实验现象的探索以及实验测量等工作都具有重要意义.

但目前关于自仿射分形随机表面散射研究的大多数文献都是以基尔霍夫近似为理论基础的.众所周知,基尔霍夫近似是假定在介质分界面上,透射光波和反射光波与入射光波成一定的比例关系,这一

近似使得光波在介质分界面上传播的理论分析大为简化,并且它在一般的衍射问题中具有很高的精度.但是对于自仿射分形表面的衍射来说,由于表面的局域起伏和不平滑的分形特征的存在,使得表面分界面上光波传播的行为十分复杂,对于随机表面散射光场特性的深入研究需要从严格地麦克斯韦方程组或格林函数的积分方程和边界条件出发.虽然在理论上解决这一问题非常复杂,但随着光场数值计算方法的发展<sup>[9-11]</sup>,使得散射光场的严格数值计算成为可能.在严格计算的基础上,也使我们探索基尔霍夫近似在随机表面散射光场计算中的精度.

本文从简谐波满足的亥姆霍兹方程出发,将由格林定理得到的介质分界面上的积分方程转化为以表面上的光场及其导数为未知量的线性方程组,并对其进行数值求解,实现了介质分界面上光场及其导数的严格数值计算.进而利用格林函数的数值积分,对自仿射分形随机表面光散射的透射光场进行严格的数值计算.这对于近场及远场散射光场特性的研究具有重要意义.同时我们用基尔霍夫理论

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号:69978012)资助的课题.

对光波的传播进行计算,并将这两种方法的结果进行了比较.我们发现在表面粗糙度比较小的情况下,基尔霍夫近似下的结果与严格的计算结果符合得比较好.自仿射分形随机表面的分形维数对基尔霍夫近似的精确程度也有影响,在粗糙度相同的条件下,分形维数越小,基尔霍夫近似的精确程度越高.

## 2. 散射光场的格林函数积分方程与基尔霍夫近似的表达式

下面从简谐光波满足的亥姆霍兹方程出发,首先推导光场在光介质分界面上满足的格林函数积分方程和透射光场格林函数积分表达式.在此基础上,再给出基尔霍夫近似下透射光场的表达式,以便于比较由这两种方法所得到的光场数值计算的结果.

### 2.1. 散射光场的格林函数积分方程

图1为光波在介质分界面上散射的示意图.为简单起见,我们讨论一维的情况.假定s偏振的平面光波 $E^i(\mathbf{r})$ 垂直入射,即波矢量 $\mathbf{k}_0$ 垂直于 $x$ 坐标平面, $\mathbf{r}$ 为空间位置矢量.介质的分界面是长度为 $L$ 的随机表面,其高度分布用 $z = D(x)$ 表示.介质分

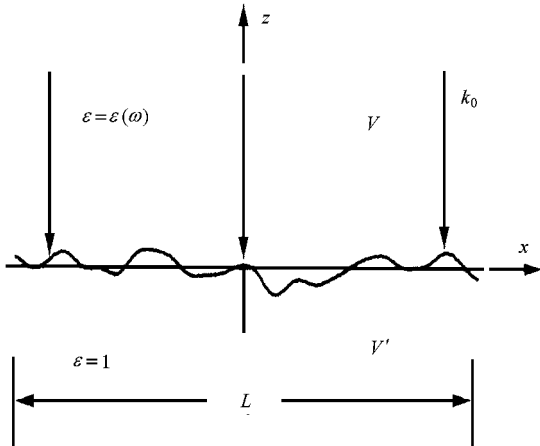


图1 光散射模拟的示意图

界面以上 $z > D(x)$ 的空间 $V$ 为上半空间,其介电常数 $\epsilon(\omega) = n^2$ .在本文中仅讨论 $\epsilon(\omega)$ 为实数的电介质. $z < D(x)$ 的下半空间 $V'$ 为真空( $\epsilon = 1$ ).则上半空间和下半空间的光波 $E(\mathbf{r})$ 和 $E'(\mathbf{r})$ 满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) + k^2 E(\mathbf{r}) = 0, \quad z > D(x), (\mathbf{r} \in V), \quad (1a)$$

$$\nabla^2 E'(\mathbf{r}) + k_0^2 E'(\mathbf{r}) = 0, \quad z < D(x), (\mathbf{r} \in V'), \quad (1b)$$

其中 $k_0 = |\mathbf{k}_0| = 2\pi/\lambda$ ,  $k = \sqrt{\epsilon}k_0$ . $E(\mathbf{r})$ 和 $E'(\mathbf{r})$ 在界面上满足边值关系

$$E(\mathbf{r}) \Big|_{z=D^+(\lambda_x)} = E'(\mathbf{r}) \Big|_{z=D^-(\lambda_x)}, \quad (2a)$$

$$\left[ \frac{\partial E(\mathbf{r})}{\partial n} \right]_{z=D^+(\lambda_x)} = \left[ \frac{\partial E'(\mathbf{r})}{\partial n} \right]_{z=D^-(\lambda_x)}, \quad (2b)$$

其中 $D^+$ 和 $D^-$ 分别表示从上半空间和下半空间无限趋近 $D(x)$ 的表面,偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial n} = (\mathbf{n} \cdot \nabla), \quad (\mathbf{n} = (1/\lambda)\{-\mathbf{e}_z D(x)\}dx, \mathbf{1}),$$

$$\lambda = (1 + \{\mathbf{e}_z D(x)\}^2 dx^2)^{1/2}.$$

在上半空间和下半空间分别取亥姆霍兹方程的格林函数 $\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 和 $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ,并由(1)式可得

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{r'}^2 E(\mathbf{r}') - E(\mathbf{r}') \nabla_{r'}^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)E(\mathbf{r}'), \quad (3a)$$

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{r'}^2 E'(\mathbf{r}') - E'(\mathbf{r}') \nabla_{r'}^2 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)E'(\mathbf{r}'). \quad (3b)$$

在本文所讨论的一维情况下,格林函数可以表示为

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (4a)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}\{\epsilon(\omega)\}^{1/2} k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\} \quad (4b)$$

其中 $H_0^{(1)}$ 为第一类零阶汉克(Hankel)函数.我们分两种情况对(3)式进行积分<sup>[7-9]</sup>.

1) 介质中( $\mathbf{r}' \in V$ ),由格林定理可将介质中的光场 $E(\mathbf{r})$ 用入射光场和介质表面上的光场来表示

$$E^i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left[ E(\mathbf{r}') \frac{\partial \alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial E(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] \gamma' = E(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V, \quad (5a)$$

$$E^i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left[ E(\mathbf{r}') \frac{\partial \alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial E(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] \gamma' = 0, \quad \mathbf{r} \in V', \quad (5b)$$

其中 $\mathbf{r}' = [x', z' = D(x')]$ .

2) 真空中( $\mathbf{r}' \in V'$ ),同样可以将光场用介质表面的光场来表示

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left[ E'(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial E'(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] \gamma' = 0, \quad \mathbf{r} \in V, \quad (6a)$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left[ E'(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial E'(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] \gamma' = E'(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V'. \quad (6b)$$

根据边值关系(2)式,将表面上的光场及其导数定义为表面上的两个源函数

$$E(x) = E[x, D(x)] = E'[x, D(x)], \quad (7)$$

$$F(x) = \gamma \left[ \frac{\partial E(\mathbf{r})}{\partial n} \right]_{z=D(x)} = \gamma \left[ \frac{\partial E'(\mathbf{r}')}{\partial n} \right]_{z=D'(x)}. \quad (8)$$

将(7)(8)两式分别代入(5a)(6a)式中,并使 $\mathbf{r}$ 无限趋近于表面 $z \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} D(x) + \delta$ ,可得到随机表面上的光场满足以下的关系式:

$$E^{(i)}[x, D(x)] + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left\{ E(x') \left[ \frac{\partial G}{\partial z'} - D'(x') \frac{\partial G}{\partial x'} \right] - GF(x') \right\} = E(x), \quad (9a)$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left\{ E'(x') \left[ \frac{\partial G_0}{\partial z'} - D'(x') \frac{\partial G_0}{\partial x'} \right] - G_0 F(x') \right\} = 0. \quad (9b)$$

上式中 $G_0 = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 和 $G = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ (9)式即为表面上的光场所满足的积分方程组.在入射光波 $E^{(i)}$ 和界面高度分布 $D(x)$ 已知的情况下,可以通过求解上面的方程求出表面上的光场分布 $E(x)$ 及其导数 $F(x)$ .把(7)(8)两式代入(6b)式中,可以将真空中任意一点的光场即透射光场表示为

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left\{ E'(x') \left[ \frac{\partial G_0}{\partial z'} - D'(x') \frac{\partial G_0}{\partial x'} \right] - G_0 F(x') \right\} = E'(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V', \quad (10)$$

其中 $D'(x)$ 是表面高度分布 $D(x)$ 的一阶导数.

## 2.2. 散射光场的基尔霍夫近似表达式

基尔霍夫近似条件下,透射光场的表达式可由严格的光场的表达式(10)得出.但在该近似条件下,表面上的光场 $E'(x')$ 及其导数 $F(x')$ 则不用通过求解积分方程(9a)和(9b),而是近似地将 $E'(x')$ 简化为入射光场和透过系数 $T(x')$ 的乘积,即在图1所示的条件下,将 $E'(x')$ 简化为

$$E'(x') = T(x')E^{(i)}(x') = T(x') \exp[-ikD(x')], \quad (11)$$

而在对 $E'(x')$ 求导时,通常将 $T(x') = T$ 作为常数来处理,即

$$F(x') = -ikTD'(x') \exp[-ikD(x')]. \quad (12)$$

将(11)和(12)式代入(10)式,得到基尔霍夫近似下的透射光场的表达式

$$E'(x) = -\frac{T}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \exp[-ikD(x')] \times \left\{ \left[ \frac{\partial G_0}{\partial z'} - D'(x') \frac{\partial G_0}{\partial x'} \right] + ikD'(x')G_0 \right\}. \quad (13)$$

考虑在菲涅耳和夫琅禾费衍射的条件下,(4)式中给出的格林函数 $G_0$ 的宗量

$$k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = k_0 \sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2} \gg 1, \quad \text{令 } \rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \text{ 利用贝塞尔函数和诺伊曼(Neumann)函数的渐近表达式, 则有}$$

$$G_0 = i\pi H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \sim i\pi \sqrt{2/\pi k_0 \rho} \exp(ik_0 \rho - i\pi/4), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_0}{\partial z'} - D'(x') \frac{\partial G_0}{\partial x'} &= i\pi k_0 \frac{(z-z') - D'(x')(x-x')}{\rho} H_1^{(1)}(k_0 \rho) \\ &\sim i\pi k_0 \frac{(z-z') - D'(x')(x-x')}{\rho} \\ &\times \sqrt{2/\pi k_0 \rho} \exp(ik_0 \rho - i3\pi/4), \end{aligned} \quad (15)$$

且

$$k_0 \rho = k_0 \sqrt{(x-x')^2 + [z - D'(x')]^2} \approx -k_0 z \left[ 1 - \frac{D'(x')}{z} + \frac{(x-x')^2}{2z^2} \right]. \quad (16)$$

(16)式右端的负号对应于图1的下半空间( $z < 0$ ).在采用基尔霍夫近似的文献中,一般都采用“小坡度近似”,即忽略表面高度的导数.为了比较,下面我们也在基尔霍夫近似理论中采用这一近似,并将以上各式代入(13)式,则真空中(下半空间)任一点处的光场表示为

$$E'(x) = -i \frac{T}{4} \sqrt{2k_0/\pi \rho} \exp(-i3\pi/4) \exp(-ik_0 z) \times \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \exp[-ik_0(n-1)D(x')] \times \exp[-ik_0(x-x')^2/2z]. \quad (17)$$

需要指出以下两点:(i)上式的结果除了相位因子 $\exp(-i3\pi/4)$ 外,与通常在菲涅耳衍射中将随机表面看作是透过函数为 $T \exp[-ik_0(n-1)D(x')]$ 的相位屏的结果是完全一致的.这表明,除了一个常数相位因子外,在一维的条件下采用(4)式的格林函数与通常采用的格林函数

$$G_A(r) = \frac{\exp(ik \cdot r)}{r} \quad (18)$$

在菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射的条件下是完全等价的。(ii)在(17)式中的相位屏的透过函数用  $R \exp\{-[k_{\parallel} \cdot r' + k_z D(x')]\}$  这里  $k_{\parallel}$  和  $k_z$  为通常定义的波矢量的平行和垂直分量,  $R$  为反射系数, 则(17)式便成为我们熟知的菲涅耳衍射的散射光场. 这一结果也可以进一步化简出夫琅禾费衍射条件下的散射光场. 需要指出的是(17)式中的相位因子  $\exp(-i3\pi/4)$  是由于一维情况下的格林函数和二维情况下的不同而引起的. 由于一维情况下格林函数不依赖于坐标  $y$ , 所代表的随机表面以及散射过程的物理图像在  $y$  方向上是无限延伸的, 从而(17)式给出的散射光场的表达式包含了格林函数为(18)式的二维散射光场在  $y$  方向上的积累结果, 而相位因子  $\exp(-i3\pi/4)$  正是在该方向的累加效应在一维光场  $E(x)$  中的体现.

### 3. 数值计算方法与自仿射分形随机表面及其导数的产生

#### 3.1. 光场数值计算的格林函数法

在用格林函数法对光场进行数值计算中, 首先要将光场  $E(x')$  及其导数  $F(x')$  在介质分界面上满足的积分方程(9)式进行数字化离散, 求出  $E(x')$  和  $F(x')$  的数值. 在数字化离散处理过程中, 将介质分界面在入射光照明范围  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  内等间隔的用  $N$  个点分割, 将积分转化为有限求和, 使(9)式转化为以界面上  $N$  个点处的光场  $E$  及其导数  $F$  的值为未知量的线性方程组<sup>[9-11]</sup>

$$\begin{bmatrix} A + I & B \\ A^{(0)} - I & B^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} E^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

上式中  $E^{(i)}$ ,  $E$ ,  $F$  分别表示包含  $N$  个元素的列矩阵, 它们第  $n$  个元素  $E_n^{(i)}$ ,  $E_n$ ,  $F_n$  分别是函数  $E_x^{(i)}$ ,  $E(x)$ ,  $F(x)$  在  $x_n = -\frac{L}{2} + (n-1)\Delta x$  ( $\Delta x = L/(N-1)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ) 处的取值, 式中子矩阵元素  $A$  和  $B$  分别表示为

$$A_{mn} = \frac{i\sqrt{\epsilon}k_0\Delta x}{2} \times \frac{D'(x_n)(x_m - x_n) - [D(x_m) - D(x_n)]}{\{(x_m - x_n)^2 + [D(x_m) - D(x_n)]^2\}^{1/2}}$$

$$\times H_1^{(1)}(\sqrt{\epsilon}k_0\{ (x_m - x_n)^2 + [D(x_m) - D(x_n)]^2\}^{1/2}), \quad (m \neq n),$$

$$A_{mm} = \frac{-\Delta x}{2\pi\gamma^2} D'(x_n), \quad (m = n), \quad (20a)$$

$$B_{mn} = (i\Delta x/2)H_0^{(1)}(\sqrt{\epsilon}k_0\{ (x_m - x_n)^2 + [D(x_m) - D(x_n)]^2\}^{1/2}), \quad (m \neq n),$$

$$B_{mm} = (i\Delta x/2)H_0^{(1)}(\sqrt{\epsilon}k_0\gamma\Delta x/2e), \quad (m = n), \quad (20b)$$

其中  $I$  为单位矩阵, 子矩阵  $A^{(0)}$ ,  $B^{(0)}$  对应于真空中的情形, 它们的元素  $A_{mn}^{(0)}$ ,  $B_{mn}^{(0)}$  的值为  $A$ ,  $B$  的元素  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  在真空中即  $\epsilon = 1$  时的取值.

在求出表面上光场及其导数的数值分布之后, 再根据(10)式, 通过数值积分求出下半空间中任一点处的透射光场.

#### 3.2. 基尔霍夫近似下的光场的数值计算

在基尔霍夫近似的条件下对透射光场进行数值计算相对来说比较简单. 在自仿射分形表面的高度数值分布  $D(x')$  给定的情况下, 根据(17)式可以通过数值积分, 直接计算得到菲涅耳衍射区的散射光场的数值分布. 夫琅禾费衍射区的光场的数值计算, 可以像通常的文献中那样, 通过对(17)式进一步近似和简化, 进而转化为对相位因子  $\exp[-ik_0(n-1)D(x')]$  的数字傅里叶变换.

一般来说, 基尔霍夫近似不适于距离表面几个波长以内的近场区域的光波的计算. 但在从近场到菲涅耳衍射区之间的区域内的光场, 可以用(13)式进行数值积分计算. 在该区间内, 既可以采用(4)式给出的一维情况下的格林函数, 也可以将其用二维情况下的格林函数(18)式来替代, 实际计算表明, 用这一替代所引起的误差可以忽略.

#### 3.3. 自仿射分形随机表面产生及其导数计算

在格林函数积分和基尔霍夫近似下的光场数值计算中, 都是以已知自仿射分形随机表面的高度分布  $D(x')$  的值为前提的. 近年来, 在自仿射分形表面的光散射研究中, 已经发展出多种产生其高度分布的方法. 我们提出了类比推导夫琅禾费面上散斑场相关函数过程的自仿射分形随机表面的产生方法<sup>[12]</sup>. 其大致原理和方法如下:

自仿射分形表面的高度分布  $D(x')$  的自相关函

数可表示为

$$R_h(\rho) = D(x')D(x' + \rho) = w^2 \exp[-(\rho/\xi)^{2\alpha}], \quad (21)$$

其中  $\rho$  为相关间隔,  $w$  和  $\xi$  分别为随机表面的粗糙度和横向相关长度,  $\alpha$  为表面的粗糙指数, 它与表面的分形维数  $d_f$  之间的关系为  $\alpha = d - d_f$ ,  $d$  为表面所嵌入空间的维数, 且  $0 \leq \alpha \leq 1$ . 由于  $R_h(\rho)$  是  $\rho$  的对称下降函数, 其傅里叶变换是非负实数, 因此可以定义“孔径函数” $p(u)$ :

$$\begin{cases} p(u) = [P(u)]^{1/2}, \\ P(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \exp[-(v/\xi)^{2\alpha}] \times \exp(i2\pi uv) dv. \end{cases} \quad (22)$$

我们用下面的傅里叶变换作为复高度函数的产生公式:

$$D_c(x') = D_r(x') + iD_i(x') = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} p(u) \exp[i2\pi\eta(u)] \exp(-i2\pi ux') du, \quad (23)$$

其中  $D_r(x')$  和  $D_i(x')$  分别为  $D_c(x')$  的实部和虚部,  $\eta(u)$  是均值为 0 的实变量白噪声过程,  $\eta(u) = 0$ ,  $\eta(u)\eta(u') = \delta(u - u')$ . 由傅里叶变换定理, 并注意到  $\exp[i2\pi\eta(u)]$  是复白噪声过程, 其实部和虚部的均值均为零, 可以得到  $D_c(x')$  和  $D_i(x')$  及  $D_r(x')$  的自相关函数<sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned} D_c(x')D_c^*(x' + \rho) &= 2 D_r(x')D_r(x' + \rho) \\ &= 2 D_i(x')D_i(x' + \rho) \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} [p(u)]^2 \exp(-i2\pi u\rho) du \\ &= 2w^2 \exp[-(\rho/\xi)^{2\alpha}]. \end{aligned} \quad (24)$$

由于 (23) 式中的  $D_c(x')$  可以看作是大量基元  $\exp[i2\pi\eta(u)]\exp(-i2\pi ux')$  的相干叠加<sup>[14]</sup>, 由统计理论中的中心极限定理, 可知  $D_r(x')$  和  $D_i(x')$  都是均值为零的高斯随机过程. 根据 (23) 式,  $D_r(x')$  和  $D_i(x')$  都可作为自仿射分形表面高度的数值分布. 在本文的计算中, 只采用了实部  $D_r(x')$ .

我们知道, 从严格的数学角度来说, 分形随机表面的重要特征是其高度分布处处连续但不可微, 因此, 其高度的一阶和二阶导数  $D'(x')$  和  $D''(x')$  不能按常规的两点差分法来对其进行数值计算. 为此

我们采用下面的傅里叶变换的方法对表面的高度来进行求导. 首先对表面高度分布进行数字傅里叶变换

$$H(f_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} D(x_0) \exp(-i2\pi f_x x_0) dx_0, \quad (25)$$

表面高度函数的导数则通过  $D(x_0)$  的逆傅里叶变换对  $x_0$  求一阶、二阶导数来获得, 即

$$\frac{dD(x_0)}{dx_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi f_x H(f_x) \exp(i2\pi f_x x_0) df_x \quad (26)$$

和

$$\frac{d^2 D(x_0)}{d^2 x_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} (i2\pi f_x)^2 H(f_x) \exp(i2\pi f_x x_0) df_x, \quad (27)$$

利用上述方法, 在产生随机表面样本的同时可以得到其一阶和二阶导数的数值分布.

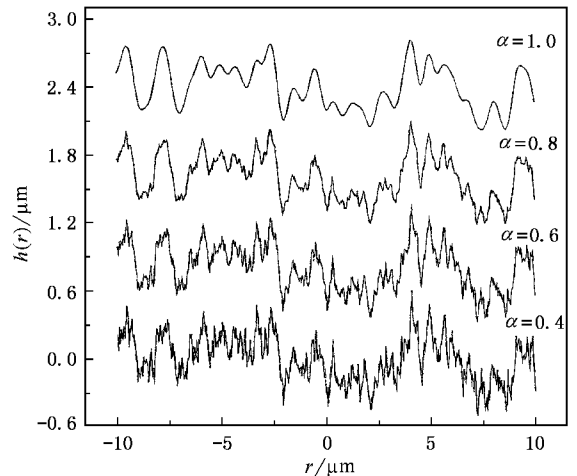


图 2 模拟产生的 4 个自仿射分形表面样本

图 2 给出了用上述方法产生的表面长度  $L$  为  $20\mu\text{m}$  的 4 个表面样本. 它们的均方根粗糙度  $w$  均为  $0.2\mu\text{m}$ , 横向相关长度均为  $0.5\mu\text{m}$ , 粗糙指数  $\alpha$  分别取 1.0, 0.8, 0.6 和 0.4, 对应的表面分形维数分别为 1.0, 1.6, 1.4 和 1.2, 在每个表面样本的产生中均使用了同一组随机数. 对所产生的随机表面按 (21) 式进行了相关函数的计算及表面参数拟合, 拟合得到的表面参数与设定的表面参数相符合.

#### 4. 光场计算的编程实现与计算结果讨论

在实际的计算模拟中, 我们设定入射光波  $E^{(i)}$

是振幅为 1、波长为  $0.6328\mu\text{m}$  的平面波,  $N$  取 1000 个点, 介质设定为玻璃介质 ( $n = 1.532$ ). 由 (20) 式可以看出, 线性方程组系数矩阵的元素  $A_{mm}, B_{mm}$  以及  $A_{mn}^{(0)}, B_{mn}^{(0)}$  的构造需要用到第一类零阶和一阶汉克函数, 这些元素的表达式中的系数和宗量中用到表面高度  $D(x_n)$  及其导数. 在编程中利用汉克函数  $H_v^{(1)}$  和贝塞尔函数  $J_v$  以及诺伊曼函数  $Y_v$  之间的关系  $H_v^{(1)}(Z) = J_v(Z) + iY_v(Z)$ , 并判断其宗量  $Z = \sqrt{\epsilon k_0} \left\{ (x_m - x_n)^2 + [D(x_m) - D(x_n)]^2 \right\}^{1/2}$  和  $Z = \sqrt{\epsilon k_0} \gamma \Delta x / 2e$  的数值, 在它们很小 ( $Z < 0.1$ ) 和很大 ( $Z > 17.5$ ) 的极限情况下, 采用渐近表达式; 在其宗量取中间值 ( $0.1 < Z < 17.5$ ) 时, 将与汉克函数相应的贝塞尔函数和诺伊曼函数的数值按宗量 0.1 的间隔输入到程序的数组中, 对于宗量为该范围内任意值的汉克函数的数值, 用数组中两个邻近宗量值对应的汉克函数的数值通过线性插值来进行计算.

在系数矩阵  $A, B$  以及  $A^{(0)}, B^{(0)}$  的元素构造完毕后, 利用复系数方程组的全选主元高斯消去法<sup>[15]</sup> 解 (19) 式中的  $2N$  阶方程组, 从而求得介质分界面上的散射光场  $E(x')$  及其导数  $F(x')$  的数值. 然后由这些数值进行 (10) 式的数值积分, 便得到光波经随机表面散射后的光场.

图 3 (a) 和 (b) 中的实线分别给出了用格林函数法计算得到的一个随机表面样本在表面上的透过光场  $E(x')$  的实部和虚部, 该表面参数设定为粗糙度  $w = 0.1\mu\text{m}$ , 横向相关长度  $\xi = 0.5\mu\text{m}$  和粗糙指数  $\alpha = 1.0$ . 为了比较, 在图中同时用虚线给出了相应的基尔霍夫近似下表面的透过光场  $T \exp[-ik_0 n$

$\times D(x')]$  这里透过系数  $T$  近似地用垂直入射的条件下光波反射折射的菲涅耳公式来计算,  $T = 2n / (n + 1) = 1.2101$ . 从图中可以看出, 由两种方法所得到的随机分界面上的光波的实部和虚部吻合得比较好, 只有微小的差别, 但就是这种差别使得由两种方法得到的表面上的光强有比较大的差别. 用通常的基尔霍夫近似条件下对应的光强分布

$$|T \exp[-ik_0 n D(x')]|^2 = |T|^2$$

为一常数, 因此这一近似无法反映表面附近的近场光波传播的行为. 图 3 (c) 由下向上依次给出了由格林函数法得到的表面上和离开表面  $0.1\lambda, 0.5\lambda, 1\lambda$  处的光强数值分布, 为了在同一幅图中清楚的表示, 我们分别在距表面不同距离处的光强加了一定的衬底. 从图中可以看出, 表面上的光强是起伏变化的, 光强的这种起伏和随机表面附近的隐失波密切相关. 另外, 还可看出近场随机光场在一个波长范围内随离开表面距离的增加而迅速演化的现象.

为了了解在自仿射分形随机表面的远场光场计算中基尔霍夫近似的精确程度, 下面我们对由这一近似和由格林函数法进行数值计算所得到的光强分布进行比较. 同时, 为了进一步了解在格林函数积分中的各积分项对自仿射分形表面散射光场计算的影响, 也在忽略了随机表面光场的导数  $F(x')$  后以及分别采用 (4) 式和 (18) 式给出的格林函数等条件下, 对远场光场进行数值计算, 并将结果进行比较.

图 4 分别给出了长度为  $20\mu\text{m}$  的随机表面在横向相关长度  $\xi = 0.5\mu\text{m}$ , 粗糙度  $w = 0.1, 0.2, 0.4, 1.0\mu\text{m}$ , 粗糙指数  $\alpha = 1.0$  (图 4 (a) — (d)) 和  $\alpha = 0.6$  (图 4 (e) — (h)) 时, 距离表面  $1\text{cm}$ 、探测范围  $8\text{mm}$  处光散射的强度分布. 图中曲线 1 表示严格的计算结

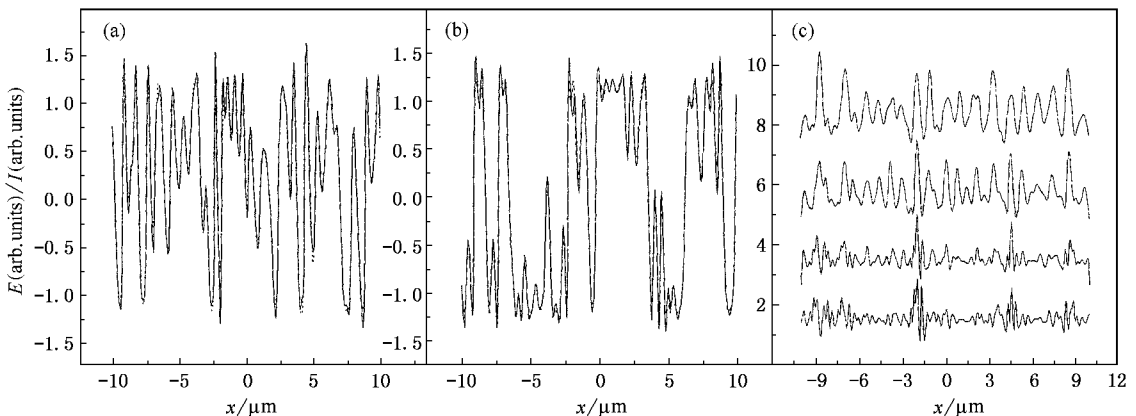


图 3 (a) 和 (b) 分别为表面上透射光场的实部和虚部比较 (c) 由下向上依次表示表面上和离开表面  $0.1\lambda, 0.5\lambda, 1\lambda$  处光强的数值分布

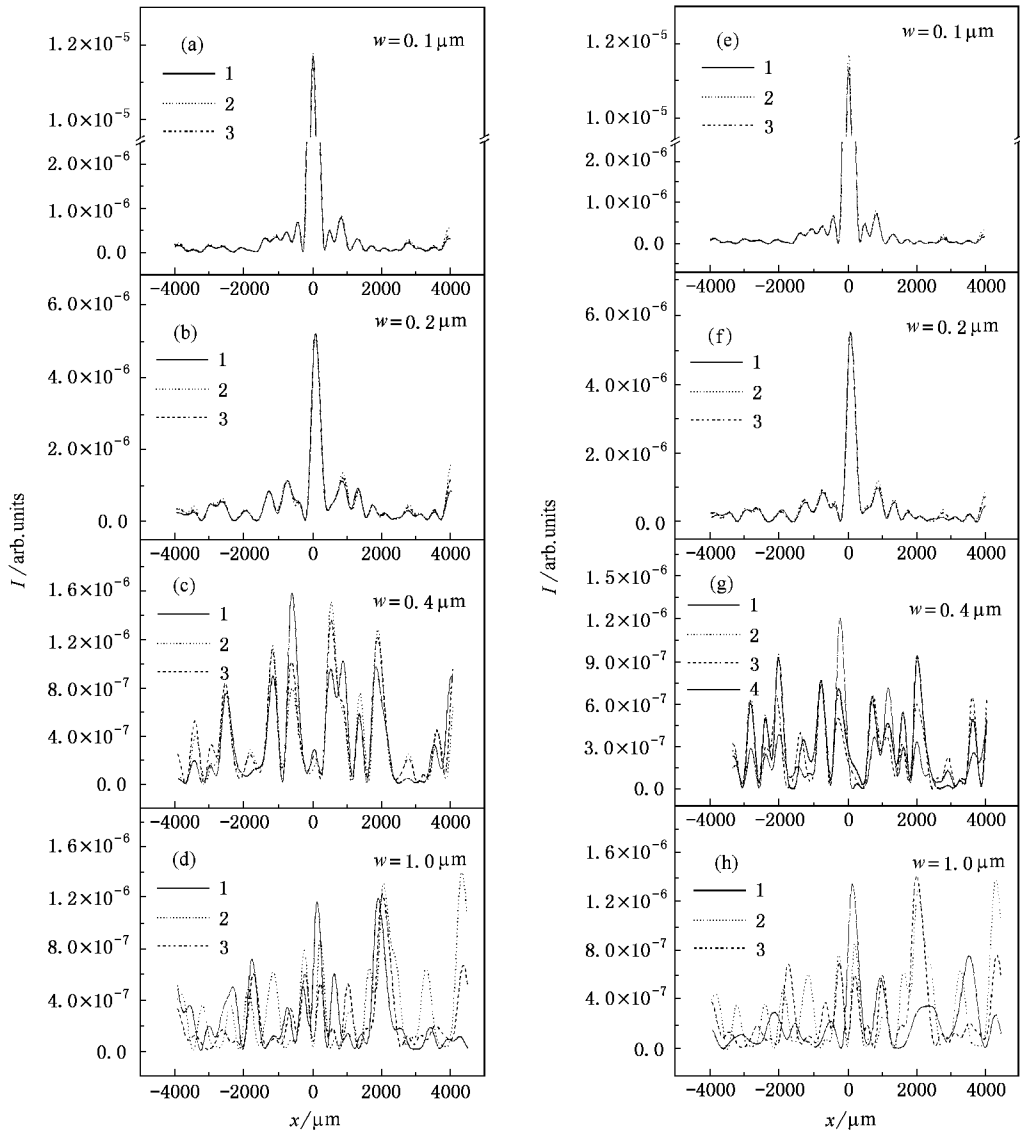


图4 分别表示在距离随机表面1cm处,表面参数设定为 $\xi=0.5\mu\text{m}$ , $w=0.1,0.2,0.4,1.0\mu\text{m}$ , $\alpha=1.0$ (a)-(d)和 $\alpha=0.6$ (e)-(h)时,由不同计算方法得到的结果

果,即用格林函数法求解表面上的光强及其导数后,根据(10)式计算得到的结果.曲线2表示用格林函数法求解表面上的光强及其导数后,由(18)式作为格林函数,并在(10)式的积分中忽略了光场导数 $F(x')$ 和表面的导数 $D'(x')$ 后得到的计算结果.通过这一结果可以了解 $F(x')$ 和 $D'(x')$ 对散射光场的影响.曲线3表示应用基尔霍夫近似计算得到的结果,即以(18)式为格林函数,按照(17)式的方法计算得到的结果.这是通常采用的计算远场光场的基尔霍夫近似的方法.

由这些结果可以看出,在表面粗糙度比较小( $w \leq 0.2\mu\text{m}$ )的条件下,图中的三条曲线吻合得比较

好,说明此时基尔霍夫近似的精确程度比较高.在计算中忽略表面光场的导数项对散射光场计算结果的影响不大.随着表面粗糙度的增加,三条曲线的偏差增大,说明基尔霍夫近似的精确程度变低.在粗糙度相同,表面的分形维数不同的情况下,分形维数越高,基尔霍夫近似的精确程度越低.但总的来说,随机表面的粗糙度是影响基尔霍夫近似精确程度的决定性因素,因此,基尔霍夫近似只有在表面的粗糙度比较小的情况下才有较高的精度.而且,在粗糙比较大时,忽略表面光场的导数项也会给计算结果带来比较大的误差,说明此时表面光场的导数项是不能忽略的.

为了比较(4)式和(18)式表示的两种不同形式的格林函数的差别,在图4(g)中以加粗的实线给出了取(4)式的格林函数,并在(10)式的积分中令 $F(x')=0$ 和 $D'(x')=0$ 得到的结果.通过与同一图中曲线2的比较,可以看出,在离表面1cm处,采用两种不同形式的格林函数 $G_A$ 和 $G_0$ 对计算结果的影响很小.

另外,我们还计算了距随机表面20cm处的透射光场,光强的分布除了横向展宽外,在各种情况下光强的分布曲线的形状类似于相同条件下图4给出的结果,在此不再赘述.

## 5. 结 论

本文从电磁场传播的亥姆霍兹方程出发,利用格林函数和边界条件,推导出光场在介质分界面上

满足的积分方程.通过在界面上对积分方程的数字离散化处理和矩阵元素的构造,实现了用格林函数法对界面上光场的严格地数值计算.同时,也由透射光场的格林函数积分,得出了基尔霍夫近似下的光场计算的表达式.通过与夫琅禾费散斑场的相关函数推导过程类比的方法,提出了自仿射分形随机表面的产生方法,并利用傅里叶变换的方法对随机表面高度分布的导数进行数值计算.在此基础上,我们对采用基尔霍夫近似进行自仿射分形随机表面的散射光场数值计算的精确程度进行了研究.发现在随机表面粗糙度比较小时,基尔霍夫近似的精度比较高.在粗糙度相同的情况下,表面的分形维数越小,基尔霍夫近似的精度越高.本文的结果对于基尔霍夫近似用于自仿射分形随机表面散射光场研究的适用范围的确定具有重要指导意义.

- 
- [ 1 ] Meakin P 1998 *Fractals, scaling and growth far from equilibrium* (London:Cambridg University)
- [ 2 ] Lopez J M 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 4594
- [ 3 ] Qi D P *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1260( in Chinese ) [ 齐东平等 2000 *物理学报* **47** 1477 ]
- [ 4 ] Wong P Z 1985 *Phys. Rev. B* **32** 7417
- [ 5 ] Yang H N *et al* 1993 *Diffraction from rough surfaces and dynamic growth fronts*( World Scientific, Singapore )
- [ 6 ] Zhao Y P *et al* 2001 *Characterization of amorphous and crystalline rough surfaces: principles and applications* ( New York: Academic Press )
- [ 7 ] Simonsen I *et al* 2000 *Phys. Rev. E* **61** 5914
- [ 8 ] Simonsen I *et al* 2001 *J. Opt. Soc. Am. (A)* **18** 1101
- [ 9 ] Sanchez-Gil J A *et al* 1991 *J. Opt. Soc. Am. (A)* **8** 1270
- [ 10 ] Maradudin A A *et al* 1990 *Ann. Phys. (NY)* **203** 255
- [ 11 ] Sanchez-Gil J A *et al* 1998 *J. Chem. Phys.* **108** 317
- [ 12 ] Cheng C F 2002 *Phys. Rev. E* **65** 0611xx-1
- [ 13 ] Dainty J C 1984 *Lase speckle and related phenomena* 2nd ed( Berlin: Springer-Verlag )
- [ 14 ] Liu P S 1987 *Fundamentals of Statistical Optics of Spekle* ( Beijing: Science Press )( in Chinese ) [ 刘培森 1987 *散斑统计光学基础* (北京: 科学出版社) ]
- [ 15 ] Xu S L 1992 *Arithmetic of fortran program*( Tsinghua Press ) [ 徐士良 1992 *FORTAN 常用算法程序集*( 清华大学出版社) ]



# Green 's function method of light scattering from random surfaces compares with Kirchhoff 's approximation \*

Liu Chun-Xiang<sup>1B)</sup> Cheng Chuan-Fu<sup>2B)</sup> Ren Xiao-Rong<sup>3)</sup> Liu Man<sup>2B)</sup> Teng Shu-Yun<sup>2)</sup> Xu Zhi-Zhan<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> *Optical Physics Laboratory , Institute of Physics and Center for Condensed Matter Physics , Chinese Academy of Sciences , Beijing 100080 , China )*

<sup>2)</sup> *Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics , Chinese Academy of Sciences , Shanghai 201800 ,China )*

<sup>3)</sup> *Shandong Normal University , Jinan 250014 , China )*

( Received 19 February 2003 ; revised manuscript received 13 June 2003 )

## Abstract

Starting from the Helmholtz Equation , we obtain the integral equations of the light field at the medium interfaces by use of Green 's theorem. Then the integral equations are discretized into a linear equation set , from which the values of the light field and its derivatives at the interface can be numerically solved. We also obtain the expression for the transmissive light waves from the Green 's-function integral in the case of Kirchhoff 's approximation. By an analogy to the derivation process of the autocorrelation functions of speckles in Fraunhofer plane , we propose the method for the generation of random self-affine fractal surfaces and Fourier transformation method for the numerical derivative of random surfaces. Then we study the accuracy of Kirchhoff 's approximation in the scattering of light field from the random self-affine fractal surface. We find that the accuracy of Kirchhoff 's approximation is relatively high when the root-mean-square roughness  $w$  is small. for random surfaces with the same value of  $w$  but smaller values of roughness exponent  $\alpha$  , the Kirchhoff 's approximation gives higher accuracy in the calculation of scattered light fields. We believe that the results of this paper would be of significance in understanding the validity range of the Kirchhoff 's approximation when it is applied to light scattering from self-affine random surfaces.

**Keywords** : Green 's function integral , Kirchhoff 's approximation , self-affine fractal random surface

**PACC** : 4225F , 3115

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China( Grant No.69978012 ).