第 53 卷 第 3 期 2004 年 3 月
1000-3290/2004/53(03)/0661-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.53,No.3,March,2004

非保守力与非完整约束对 Lagrange 系统 Noether 对称性的影响*

张 毅[1)] 梅凤翔[2)]

1)(苏州科技学院土木工程系,苏州 215011)

2)(北京理工大学理学院,北京 100081)

(2003 年 8 月 15 日收到;2003 年 10 月 24 日收到修改稿)

研究非保守力和非完整约束对 Lagrange 系统的 Noether 对称性的影响. Lagrange 系统受到非保守力或非完整约束作用时,系统的 Noether 对称性和守恒量都会发生变化. 原有的一些 Noether 对称性消失了,一些新的 Noether 对称性产生了,在一定条件下,一些 Noether 对称性仍保持不变. 分别给出系统的 Noether 对称性以及守恒量保持不变的条件,并举例说明结果的应用.

关键词:Lagrange 系统,非保守力,非完整约束,Noether 对称性

PACC:0320

1. 引　　言

1918 年,Noether 研究了 Hamilton 作用量在相对广义坐标和时间的无限小变换下的不变性质[1],即 Noether 对称性. 1975 年,Djukić 和 Vujanović[2] 将 Noether 理论推广到无限小群变换包含广义速度的情形,从而解决了完整非保守系统的对称性与守恒量问题. 李子平 1981 年首先研究了线性非完整约束系统的对称变换,将 Noether 理论进一步推广到线性非完整系统[3—5],这一结果比 Bahar[6] 的同类结果早了 6 年. 1991 年,Liu[7] 通过引进 r 参数变换群无限小群变换的广义准对称的概念,给出一般非完整非保守力学系统的 Noether 理论. 近年来,对 Noether 对称性的研究已取得了一系列重要成果[2—15]. 当力学系统受到非保守力或非完整约束作用时,系统的 Noether 对称性和守恒量都会发生变化. 原有的一些 Noether 对称性消失了,一些新的 Noether 对称性产生了,在一定条件下,一些 Noether 对称性仍然保持不变. 本文研究非保守力和非完整约束对 Lagrange 力学系统的 Noether 对称性的影响,给出系统的 Noether 对称性和守恒量在受到非保守力或非完整约束作用后仍保持不变的条件,并举例说明结果的应用.

2. 非保守力对 Lagrange 系统 Noether 对称性的影响

Lagrange 系统的运动微分方程可表为[13]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \quad (s=1,\cdots,n), \tag{1}$$

其中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为 Lagrange 函数.

假设系统(1)受到非保守力 $Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 的作用,则运动微分方程成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s \quad (s=1,\cdots,n). \tag{2}$$

引入时间和广义坐标的无限小群变换

$$t^*=t+\Delta t,\quad q_s^*(t^*)=q_s(t)+\Delta q_s \quad (s=1,\cdots,n), \tag{3}$$

其展开式为

$$t^*=t+\varepsilon_\alpha\xi_0^\alpha(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon_\alpha\xi_s^\alpha(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s=1,\cdots,n), \tag{4}$$

其中 $\varepsilon_\alpha(\alpha=1,\cdots,r)$ 为无限小参数,$\xi_0^\alpha,\xi_s^\alpha$ 为无限小变换的生成元或生成函数.

判据 1[13]　对于无限小群变换(3),如果满足

* 国家自然科学基金(批准号:10272021)及江苏省青蓝工程基金资助的课题.

条件

$$\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta \dot{q}_s + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G), \tag{5}$$

其中 $\Delta G = \varepsilon_\alpha G^\alpha$，$G^\alpha = G^\alpha(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$为规范函数，则变换(3)为系统(1)的 Noether 准对称变换.

判据 2[13] 对于无限小群变换(3)，如果满足条件

$$\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta \dot{q}_s + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) + Q_s(\Delta q_s - \dot{q}_s\Delta t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta \tilde{G}), \tag{6}$$

其中 $\Delta \tilde{G} = \varepsilon_\alpha \tilde{G}^\alpha$，$\tilde{G}^\alpha = \tilde{G}^\alpha(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$为规范函数，则变换(3)为系统(2)的 Noether 广义准对称变换.

如果无限小群变换(3)同时满足条件(5)和(6)，则变换(3)同时对应于系统(1)和系统(2)的 Noether 对称性，即 Lagrange 系统(1)在非保守力作用下，相应的 Noether 对称性保持不变.

如果无限小群变换(3)满足条件(5)但不满足条件(6)，则变换(3)对应于系统(1)的 Noether 对称性，而不是系统(2)的 Noether 对称性，即 Lagrange 系统(1)在非保守力作用下，相应的 Noether 对称性将会消失.

如果无限小群变换(3)不满足条件(5)但满足条件(6)，则变换(3)不是系统(1)的 Noether 对称性，而对应系统(2)的 Noether 对称性，即 Lagrange 系统(1)由于非保守力的作用，产生了新的 Noether 对称性.

Lagrange 系统在非保守力作用下 Noether 对称性保持不变的条件，可由下述定理 1 给出.

定理 1 如果无限小群变换(3)对应于系统(1)的 Noether 对称性，且非保守力 Q_s 和无限小生成元 ξ_0^α，ξ_s^α 满足条件

$$Q_s(\xi_s^\alpha - \dot{q}_s\xi_0^\alpha) = -\dot{\tilde{G}}^\alpha + \dot{G}^\alpha, \tag{7}$$

则当非保守力作用于系统(1)时，其 Noether 对称性将保持不变.

证明 由判据 1 和判据 2，易得结论.

对应于系统的 Noether 对称性，可由下述定理找到相应的守恒量.

定理 2[13] 如果无限小群变换(3)是系统(1)的 Noether 准对称变换，那么系统存在 r 个线性独立的守恒量，形如

$$I^\alpha = L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s^\alpha - \dot{q}_s\xi_0^\alpha) + G^\alpha = C_\alpha \quad (\alpha = 1,\cdots,r). \tag{8}$$

定理 3[13] 如果无限小群变换(3)是系统(2)的 Noether 广义准对称变换，那么系统存在 r 个线性独立的守恒量，形如

$$I^\alpha = L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s^\alpha - \dot{q}_s\xi_0^\alpha) + \tilde{G}^\alpha = C_\alpha \quad (\alpha = 1,\cdots,r). \tag{9}$$

由定理 2 和定理 3，有

定理 4 如果无限小群变换(3)是系统(1)的 Noether 准对称变换，且非保守力 Q_s 和无限小生成元 ξ_0^α，ξ_s^α 满足条件

$$Q_s(\xi_s^\alpha - \dot{q}_s\xi_0^\alpha) = 0, \tag{10}$$

则当非保守力作用于系统(1)时，与该 Noether 对称性相应的守恒量将保持不变.

例 1 设有两个自由度 Lagrange 系统，其 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}q_1^2, \tag{11}$$

然后受到非保守力

$$Q_1 = -\dot{q}_1, \quad Q_2 = -\dot{q}_2 \tag{12}$$

的作用[16].

对 Lagrange 系统(11)，条件(5)给出

$$-q_1\xi_1 + \dot{q}_1\dot{\xi}_1 + \dot{q}_2\dot{\xi}_2 - \left[\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}q_1^2\right]\dot{\xi}_0 = -\dot{G}, \tag{13}$$

受到非保守力(12)式作用后，(13)式成为

$$-q_1\xi_1 + \dot{q}_1\dot{\xi}_1 + \dot{q}_2\dot{\xi}_2 - \left[\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}q_1^2\right]\dot{\xi}_0 - \dot{q}_1(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0) - \dot{q}_2(\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0) = -\dot{\tilde{G}}. \tag{14}$$

取

$$\xi_0 = -1, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \tag{15}$$

显然，生成元(15)满足条件(13)，它对应 Lagrange 系统(11)的 Noether 对称性，但生成元不满足条件(14)，因此在非保守力作用下，系统(11)相应于生成元(15)的 Noether 对称性将消失.

将生成元(15)代入(13)式，可得 $G = 0$，于是由定理 2 得到守恒量

$$I^1 = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}q_1^2 = \text{const.} \tag{16}$$

实际上，守恒量(16)是 Lagrange 系统(11)的能量积分. 上述分析表明，受非保守力作用后，该能量积分

将消失.

容易验证生成元

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 1, \tag{17}$$

同时满足条件(13)和(14),即 Lagrange 系统(11)在非保守力作用下,相应于生成元(17)的 Noether 对称性保持不变. 将(17)式代入条件(13)和(14),分别得到

$$G = 0, \tag{18}$$

$$\tilde{G} = q_2. \tag{19}$$

由定理 2,相应于无限小生成元(17),Lagrange 系统(11)存在守恒量

$$I^2 = \dot{q}_2 = \text{const}. \tag{20}$$

由定理 3,由于非保守力的作用,守恒量(20)将变成

$$I^{2\prime} = \dot{q}_2 + q_2 = \text{const}. \tag{21}$$

取

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = e^t, \tag{22}$$

生成元(22)不满足条件(13),但满足条件(14),且有 $\tilde{G} = 0$,即 Lagrange 系统(11)在非保守力作用下产生了新的相应于生成元(22)的 Noether 对称性.

3. 非完整约束对 Lagrange 系统 Noether 对称性的影响

假设 Lagrange 系统的运动受到 g 个理想 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g), \tag{23}$$

约束(23)加在虚位移上的限制为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g), \tag{24}$$

非完整系统的运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s = 1, \cdots, n). \tag{25}$$

若系统非奇异,即设 $\det(h_{sk}) = \det(\partial^2 L/\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k) \neq 0$,则在运动微分方程积分以前,可由方程(23)和(25)求出约束乘子 λ_β 作为 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数,于是方程(25)可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = \Lambda_s \qquad (s = 1, \cdots, n), \tag{26}$$

其中

$$\Lambda_s = \Lambda_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}. \tag{27}$$

称方程(26)为非完整系统(23),(25)的相应完整系统的运动方程.

判据 3　对于无限小群变换(3),如果满足条件

$$\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta \dot{q}_s + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) + \Lambda_s(\Delta q_s - \dot{q}_s \Delta t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta \tilde{G}), \tag{28}$$

其中 $\Delta\tilde{G} = \varepsilon_\alpha \tilde{G}^\alpha$, $\tilde{G}^\alpha = \tilde{G}^\alpha(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 为规范函数,则变换(3)为相应完整系统(26)的 Noether 广义准对称变换.

因

$$\delta q_s = \Delta q_s - \dot{q}_s \Delta t = \varepsilon_\alpha(\xi_s^\alpha - \dot{q}_s \xi_0^\alpha), \tag{29}$$

考虑到 ε_α 的独立性,(24)式可写成

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s^\alpha - \dot{q}_s \xi_0^\alpha) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g). \tag{30}$$

判据 4　对于无限小群变换(3),如果满足条件(28)和限制条件(30),则变换(3)为非完整系统(23),(26)的 Noether 广义准对称变换.

Lagrange 系统(1)受到非完整约束(23)的作用后,有些 Noether 对称性可以保持,有如下定理.

定理 5　如果无限小群变换(3)的生成元 $\xi_0^\alpha, \xi_s^\alpha$ 和广义约束力 $\Lambda_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足条件

$$\Lambda_s(\xi_s^\alpha - \dot{q}_s \xi_0^\alpha) = -\dot{\tilde{G}}^\alpha + \dot{G}^\alpha, \tag{31}$$

则 Lagrange 系统(1)的 Noether 对称性也是相应完整系统(26)的 Noether 对称性.

定理 6　如果无限小群变换(3)的生成元 $\xi_0^\alpha, \xi_s^\alpha$ 相应于 Lagrange 系统(1)的 Noether 对称性,并且满足条件(30)和(31),则此对称性也是非完整系统(23),(26)的 Noether 对称性.

Lagrange 系统(1)受到非完整约束(23)的作用后,可由以下定理找到相应的守恒量.

定理 7[13]　如果无限小群变换(3)是相应完整系统(26)的 Noether 广义准对称变换,那么系统存在形如(9)式的 r 个线性独立的守恒量.

定理 8[13]　如果无限小群变换(3)是非完整系统(23),(26)的 Noether 广义准对称变换,那么系统存在形如(9)式的 r 个线性独立的守恒量.

Lagrange 系统(1)受到非完整约束(23)的作用后,在一定条件下,系统的某些 Noether 对称性守恒量可以保持,有如下定理.

定理 9　如果 Lagrange 系统(1)受到非完整约束(23)的作用后,某一 Noether 对称性保持不变,且满

足条件

$$\Lambda_s(\xi_s^\alpha - \dot{q}_s\xi_0^\alpha) = 0, \tag{32}$$

则与该 Noether 对称性相应的守恒量也保持不变.

例 2 研究 Appell-Hamel 模型[12,13,17]. 系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - mgq_3, \tag{33}$$

所受的非完整约束为

$$f = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \dot{q}_3^2 = 0. \tag{34}$$

运动微分方程(25)给出

$$m\ddot{q}_1 = 2\lambda\dot{q}_1, \quad m\ddot{q}_2 = 2\lambda\dot{q}_2,$$
$$m\ddot{q}_3 = -mg - 2\lambda\dot{q}_3, \tag{35}$$

由方程(34),(35)解得

$$\lambda = -\frac{mg}{4\dot{q}_3}, \tag{36}$$

于是有

$$m\ddot{q}_1 = -\frac{mg\dot{q}_1}{2\dot{q}_3}, \quad m\ddot{q}_2 = -\frac{mg\dot{q}_2}{2\dot{q}_3},$$
$$m\ddot{q}_3 = -mg + \frac{1}{2}mg. \tag{37}$$

对照(27)式,有

$$\Lambda_1 = -\frac{1}{2}mg\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_3}, \quad \Lambda_2 = -\frac{1}{2}mg\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_3},$$
$$\Lambda_3 = \frac{1}{2}mg. \tag{38}$$

对 Lagrange 系统(33),条件(5)给出

$$-mg\xi_3 + m\dot{q}_1\dot{\xi}_1 + m\dot{q}_2\dot{\xi}_2 + m\dot{q}_3\dot{\xi}_3$$
$$-\left[\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + mgq_3\right]\dot{\xi}_0 = -\dot{G}, \tag{39}$$

受到非完整约束(34)的作用后,(39)式成为

$$-mg\xi_3 + m\dot{q}_1\dot{\xi}_1 + m\dot{q}_2\dot{\xi}_2 + m\dot{q}_3\dot{\xi}_3$$
$$-\left[\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + mgq_3\right]\dot{\xi}_0$$
$$-\frac{1}{2}mg\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_3}(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0) - \frac{1}{2}mg\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_3}(\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0)$$
$$+\frac{1}{2}mg(\xi_3 - \dot{q}_3\xi_0) = -\dot{\tilde{G}}. \tag{40}$$

方程(39)有如下解:

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0,$$
$$G = 0, \tag{41}$$
$$\xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 1,$$
$$G = mgt, \tag{42}$$
$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = t, \quad \xi_2 = \xi_3 = 0,$$
$$G = -mq_1, \tag{43}$$
$$\xi_0 = \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = t, \quad \xi_3 = 0,$$
$$G = -mq_2. \tag{44}$$

生成元(41)—(44)均对应 Lagrange 系统(33)的 Noether 对称性.

限制条件(30)给出

$$\dot{q}_1(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0) + \dot{q}_2(\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0)$$
$$-\dot{q}_3(\xi_3 - \dot{q}_3\xi_0) = 0, \tag{45}$$

生成元(43),(44)不满足条件(40),(45),即它们对应的 Noether 对称性由于施加了非完整约束而消失了. 生成元(41),(42)都满足条件(40),且分别有

$$\tilde{G} = 0, \tag{46}$$

$$\tilde{G} = \frac{1}{2}mgt, \tag{47}$$

由定理 5,它们对应相应完整系统的 Noether 对称性. 生成元(41)还满足限制条件(45),由定理 6,它还对应非完整系统的 Noether 对称性.

由定理 9 和定理 8,对应于生成元(41),Lagrange 系统(33)和非完整约束系统(34)具有相同的守恒量.

$$I^1 = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + mgq_3 = \text{const}. \tag{48}$$

对应于生成元(42),Lagrange 系统(33)存在守恒量

$$I^2 = m\dot{q}_3 + mgt = \text{const}. \tag{49}$$

受非完整约束(34)作用后,守恒量(49)成为

$$I^{2\prime} = m\dot{q}_3 + \frac{1}{2}mgt = \text{const}. \tag{50}$$

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys.* KI II 235

[2] Djukić D S and Vujanović B 1975 *Acta Mech.* **23** 17

[3] Li Z P 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 1659 (in Chinese) [李子平 1981 物理学报 **30** 1659]

[4] Li Z P 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 1699 (in Chinese) [李子平 1981 物理学报 **30** 1699]

[5] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) p295 (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子

约束系统及其对称性质(北京 北京工业大学出版社) 第 295 页]
[6] Bahar L Y and Kwatny H G 1987 *Int*. *J*. *Non-Linear Mech*. **22** 125
[7] Liu D 1991 *Sci*. *China* A **34** 419
[8] Mei F X 1993 *Sci*. *China* A **36** 709
[9] Vujanovic B 1986 *Acta Mech*. **65** 63
[10] Zhang J F 1989 *Chin*. *Sci*. *Bull*. **34** 1756(in Chinese)[张解放 1989 科学通报 **34** 1756]
[11] Luo S K 1991 *Chin*. *Sci*. *Bull*. **36** 1930
[12] Mei F X, Liu D and Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p 483(in Chinese) [梅凤翔、刘　端、罗　勇 1991 高等分析力学(北京 北京理工大学出版社) 第 483 页]
[13] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) p90 (in Chinese)[梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社) 第 90 页]
[14] Zhao Y Y and Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) p1 (in Chinese)[赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与守恒量(北京 科学出版社) 第 1 页]
[15] Zhang Y and Mei F X 2000 *Appl*. *Math*. *Mech*. **21** 59
[16] Zhang R C, Chen X W and Mei F X 2000 *Chin*. *Phys*. **9** 801
[17] Mei F X 1985 *Foundations of Mechanics of Nonholonomic Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p38 (in Chinese) [梅凤翔 1985 非完整系统力学基础 (北京 北京工业学院出版社) 第 38 页]

Effects of non-conservative forces and nonholonomic constraints on Noether symmetries of a Lagrange system *

Zhang Yi[1)]　Mei Feng-Xiang[2)]

[1)] (*Department of Civil Engineering*, *University of Science and Technology of Suzhou*, *Suzhou* 215011, *China*)

[2)] (*School of Science*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*)

(Received 15 August 2003; revised manuscript received 24 October 2003)

Abstract

The effects of non-conservative forces and nonholonomic constraints on Noether symmetries and conserved quantities of a Lagrange system are studied. When non-conservative forces or nonholonomic constraints are inserted in a Lagrange system, the Noether symmetries and the conserved quantities of the system may vary. Some Noether symmetries disappear, some new Noether symmetries emerge, and under certain conditions, some Noether symmetries will still remain. The conditions under which the Noether symmetries and the conserved quantities of the system will remain are given, and two examples are given to illustrate the application of the results.

Keywords: Lagrange system, non-conservative force, nonholonomic constraint, Noether symmetry

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10272021), and the 'Qing Lan' Project Foundation of Jiangsu Province, China.