第 53 卷 第 3 期 2004 年 3 月
1000-3290/2004/53(03)/0676-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.53,No.3,March,2004

一般变换下的 Jacobi 椭圆函数展开法及应用*

刘官厅[1)2)†] 范天佑[1)]

1)(北京理工大学理学院,北京 100081)

2)(内蒙古师范大学数学系,呼和浩特 010022)

(2003 年 8 月 18 日收到;2003 年 11 月 18 日收到修改稿)

将在行波变换下的 Jacobi 椭圆函数展开法推广到范围非常广泛的一般函数变换下进行,利用这一方法求得了一些非线性发展方程的精确周期解,这些解包括了在行波变换下所求得的周期解. 证明了一些非线性发展方程的周期解一定是行波解.

关键词:非线性发展方程,周期解,行波解,Jacobi 椭圆函数

PACC:0340K,0290

1. 引 言

求解非线性发展方程的精确解在非线性问题的研究中占有非常重要的地位. 近几年,研究人员对求解非线性发展方程的精确解提出了许多方法,如双曲函数法[1—5]、齐次平衡法[6—9]、混合指数法[10,11]、Adomian 分解法[12,13]等. 在求非线性发展方程的周期解方面,Porubov 等人引入了 Weierstrass 椭圆函数展开法[14,15];Liu 等人提出了 Jacobi 椭圆函数展开法[16—21],求得了一大类非线性发展方程的周期解,包括对应的冲击波解和孤波解;Maruno 等人求得了 Simift-Hohenberg 方程和 Ginzburg-Landau 方程的 Jacobi 椭圆函数周期解[22,23]. 之后,Zhang 等人利用秩的概念,推广了 Jacobi 椭圆函数展开法的应用范围[24],得到了一些秩异类的非线性发展方程的周期解;Yan 等人用 10 种不同形式的 Jacobi 椭圆函数展开法,给出了一些非线性发展方程的多种周期解[25,26]. 然而,这些方法主要是在行波变换下进行的. 本文首先将在行波变换 $\xi = k(x - ct)$ 下的 Jacobi 椭圆函数展开法推广到范围非常广泛的一般函数变换 $\xi = h(x,t)$ 下进行,然后利用推广的 Jacobi 椭圆函数展开法求解了一些非线性发展方程,获得了它们的精确周期解,这些解包括了在行波变换下所求得的周期解. 更有意义的是在一般函数变换 $\xi = h(x,t)$ 下,所得到的周期解仍然具有行波解的形式,这就等于证明了一些非线性发展方程的周期解一定是行波解.

2. 一般函数变换下的 Jacobi 椭圆函数展开法

设非线性发展方程的一般形式为

$$P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \cdots) = 0, \tag{1}$$

其中 P 为关于变元 $u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \cdots$ 的多项式.

在变换

$$u(x,t) = u(\xi), \quad \xi = h(x,t) \tag{2}$$

下,(1)式约化为如下的微分方程:

$$F(u, u', u'', \cdots, h_x, h_t, h_{xx}, h_{xt}, h_{tt}, \cdots) = 0, \tag{3}$$

其中“′”表示 $du/d\xi$.

假设方程(3)的解 $u(\xi)$ 是一个关于 Jacobi 椭圆正弦函数 $\mathrm{sn}\xi$ 的多项式,即

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^{n} a_j \mathrm{sn}^j \xi, \tag{4}$$

称多项式中 $\mathrm{sn}\xi$ 的最高次数为 $u(\xi)$ 的阶数,记作 $O(u(\xi))$. 这一方法被称为 Jacobi 椭圆正弦函数展开法. 类似地,有 Jacobi 椭圆余弦函数展开法和第

* 国家自然科学基金(批准号:10171058)、内蒙古自治区自然科学基金及内蒙古师范大学青年科研基金重点项目(批准号:QNZ00111)资助的课题.

† E-mail:guantingliu@163.com

三类 Jacobi 椭圆函数展开法[19]．注意若在一项中出现不同的 Jacobi 椭圆函数的乘积，则阶数为其和．例如 $O(\mathrm{sn}^i(\xi)\mathrm{cn}^j(\xi)\mathrm{dn}^k(\xi))=i+j+k$，其中 $\mathrm{sn}\xi$，$\mathrm{cn}\xi$ 和 $\mathrm{dn}\xi$ 分别为第一类（正弦）、第二类（余弦）和第三类 Jacobi 椭圆函数．

关于 Jacobi 椭圆函数，有

$$\mathrm{cn}^2\xi=1-\mathrm{sn}^2\xi,\quad \mathrm{dn}^2\xi=1-m^2\mathrm{sn}^2\xi;\tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{sn}\xi=\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{cn}\xi=-\mathrm{sn}\xi\mathrm{dn}\xi,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{dn}\xi=-m^2\mathrm{sn}\xi\mathrm{cn}\xi,\tag{6}$$

其中 $m(0<m<1)$ 为模数．

由(4)—(6)式知

$$O\left(u^q\frac{\mathrm{d}^pu}{\mathrm{d}\xi^p}\right)=(q+1)n+p,\quad p,q=0,1,2,3,\cdots\tag{7}$$

将(4)式代入(3)式，结合(5)，(6)和(7)式，使 $u(\xi)$ 的最高阶导数项的阶数与非线性项的阶数相平衡，便可确定(4)式中的 n，再令各 Jacobi 椭圆函数的系数为零，就可得到一组关于 $h(x,t)$ 及各阶导数的方程，由此便可确定 $h(x,t)$ 和待定系数 $a_j(j=0,1,2,\cdots)$．下面通过一些具体例子来说明这一方法的应用．

3．一般函数变换下的 Jacobi 椭圆函数展开法的应用

例 1　考虑如下形式的非线性 Klein-Gordon 方程：

$$u_{tt}-c_0^2u_{xx}+\alpha u-\beta u^2=0,\tag{8}$$

将(2)式代入(8)式，得

$$\xi_t^2u''+\xi_{tt}u'-c_0^2(\xi_x^2u''+\xi_{xx}u')+\alpha u-\beta u^2=0.\tag{9}$$

根据(7)式，并使 u'' 的阶数与 u^2 的阶数相平衡，得 $n+2=2n$，因此 $n=2$，即方程(8)具有如下形式的周期解：

$$u=a_0+a_1\mathrm{sn}\xi+a_2\mathrm{sn}^2\xi.\tag{10}$$

将(10)式代入(9)式，得

$$\begin{aligned}&a_0\alpha-a_0^2\beta+2a_2\xi_t^2-2a_2c_0^2\xi_x^2\\&+\big(a_1\alpha-2a_0a_1\beta-a_1(1+m^2)\xi_t^2\\&+a_1c_0^2(1+m^2)\xi_x^2\big)\mathrm{sn}\xi\\&+\big(a_2\alpha-a_1^2\beta-2a_0a_2\beta-4a_2(1+m^2)\xi_t^2\\&+4a_2c_0^2(1+m^2)\xi_x^2\big)\mathrm{sn}^2\xi\\&+(-2a_1a_2\beta+2a_1m^2\xi_t^2-2a_1c_0^2m^2\xi_x^2)\mathrm{sn}^3\xi\\&+(-a_2^2\beta+6a_2m^2\xi_t^2-6a_2c_0^2m^2\xi_x^2)\mathrm{sn}^4\xi\\&+\big(-a_1c_0^2\xi_{xx}+a_1\xi_{tt}\\&+(-2a_2c_0^2\xi_{xx}+2a_2\xi_{tt})\mathrm{sn}\xi\big)\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi\\&=0.\end{aligned}\tag{11}$$

令各 Jacobi 椭圆函数的系数为零，解得

$$a_0=\frac{\alpha}{2\beta}\left(1\pm\frac{1+m^2}{\sqrt{1-m^2+m^4}}\right),\quad a_1=0,$$
$$a_2=\mp\frac{3\alpha m^2}{2\beta\sqrt{1-m^2+m^4}},\tag{12}$$

且 ξ 满足

$$\xi_{tt}-c_0^2\xi_{xx}=0,\tag{13}$$

$$-a_2\beta+6m^2\xi_t^2-6c_0^2m^2\xi_x^2=0.\tag{14}$$

注意到(13)式为一波动方程，其通解为

$$\xi=\phi_1(x+c_0t)+\phi_2(x-c_0t),\tag{15}$$

其中 ϕ_1，ϕ_2 为任意二阶可微函数，将(15)式代入(14)式，得 ϕ_1，ϕ_2 所满足的限制条件为

$$\phi'_1\phi'_2=-\frac{a_2\beta}{24c_0^2m^2}.\tag{16}$$

将(12)和(15)式代入(10)式，得非线性 Klein-Gordon 方程(8)的精确周期解为

$$\begin{aligned}u=&\frac{\alpha}{2\beta}\left(1\pm\frac{1+m^2}{\sqrt{1-m^2+m^4}}\right)\\&\mp\frac{3\alpha m^2}{2\beta\sqrt{1-m^2+m^4}}\\&\times\mathrm{sn}^2(\phi_1(x+c_0t)+\phi_2(x-c_0t)).\end{aligned}\tag{17}$$

若令

$$\phi_1=-\frac{a_2\beta}{24c_0^2m^2}(x+c_0t),\quad \phi_2=x-c_0t,$$

则(17)式给出文献[18]中相应的结果．

若令 $m\to1$，则 $\mathrm{sn}\xi\to\tanh\xi$，这时(17)式退化为孤波解．

实际上，(10)，(12)，(13)和(14)式给出了非线性 Klein-Gordon 方程(8)到波动方程(13)的一个 Backlünd 变换，因此还可利用(13)式的初边值问题的解研究方程(8)的初边值问题．

例 2　考虑如下形式的 KdV 方程：

$$u_t+uu_x+\beta u_{xxx}=0,\tag{18}$$

将(2)式代入(18)式，得

$$\xi_tu'+\xi_xuu'+\beta(\xi_x^3u'''+3\xi_x\xi_{xx}u''+\xi_{xxx}u')=0.\tag{19}$$

根据 u''' 与 uu' 的阶数相平衡，得 $n=2$，即方程

(18)具有如下形式的周期解：

$$u = a_0 + a_1\mathrm{sn}\xi + a_2\mathrm{sn}^2\xi. \tag{20}$$

将(20)式代入(19)式,得

$$\begin{aligned}&6a_2\beta\xi_x\xi_{xx} - 3a_1(1+m^2)\beta\xi_x\xi_{xx}\mathrm{sn}\xi\\&- 12a_2(1+m^2)\beta\xi_x\xi_{xx}\mathrm{sn}^2\xi\\&+ 6a_1m^2\beta\xi_x\xi_{xx}\mathrm{sn}^3\xi + 18a_2m^2\beta\xi_x\xi_{xx}\mathrm{sn}^4\xi\\&+ [a_1\beta\xi_{xxx} + a_1\xi_t + a_0a_1\xi_x - a_1(1+m^2)\beta\xi_x^3\\&+ (2a_2\beta\xi_{xxx} + 2a_2\xi_t + a_1^2\xi_x\\&+ 2a_0a_2\xi_x - 8a_2(1+m^2)\beta\xi_x^3)\mathrm{sn}\xi\\&+ (3a_1a_2\xi_x + 6a_1m^2\beta\xi_x^3)\mathrm{sn}^2\xi\\&+ (2a_2^2\xi_x + 24a_2m^2\beta\xi_x^3)\mathrm{sn}^3\xi]\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi\\&= 0.\end{aligned} \tag{21}$$

令各 Jacobi 椭圆函数的系数为零,解得

$$\xi = \pm\sqrt{-\frac{a_2}{12m^2\beta}}\left[x - \left(a_0 + \frac{a_2^2(1+m^2)}{3m^2}\right)t\right] + C,\quad a_1 = 0, \tag{22}$$

其中 a_0,a_2,C 为任意常数.

将(22)式代入(20)式,得 KdV 方程(18)的精确周期解为

$$u = a_0 + a_2\mathrm{sn}^2\left[\pm\sqrt{-\frac{a_2}{12m^2\beta}}\times\left(x - \left(a_0 + \frac{a_2(1+m^2)}{3m^2}\right)t\right) + C\right]. \tag{23}$$

若令

$$k = \pm\sqrt{-\frac{a_2}{12m^3\beta}},\quad c = a_0 + \frac{a_2(1+m^2)}{3m^2},\quad C = 0,$$

则(23)式给出文献[18]中相应的结果.

若令 $m\to1$,则 $\mathrm{sn}\xi\to\tanh\xi$,这时(23)式退化为 KdV 方程(18)的孤波解.

例 3 考虑如下形式的 mKdV 方程：

$$u_t + \alpha u^2u_x + \beta u_{xxx} = 0, \tag{24}$$

将(2)式代入(24)式,得

$$\xi_tu' + \alpha\xi_xu^2u' + \beta(\xi_x^3u''' + 3\xi_x\xi_{xx}u'' + \xi_{xxx}u') = 0. \tag{25}$$

根据 u''' 与 u^2u' 的阶数相平衡,得 $n = 1$,即方程(24)具有如下形式的周期解：

$$u = a_0 + a_1\mathrm{sn}\xi. \tag{26}$$

将(26)式代入(25)式,得

$$\begin{aligned}&- 3a_1(1+m^2)\beta\xi_x\xi_{xx}\mathrm{sn}\xi + 6a_1m^2\beta\xi_x\xi_{xx}\mathrm{sn}^3\xi\\&+ [a_1\beta\xi_{xxx} + a_1\xi_t + a_0^2a_1\alpha\xi_x + 2a_0a_1^2\alpha\xi_x\mathrm{sn}\xi\\&- a_1(1+m^2)\beta\xi_x^3 + (a_1^3\alpha\xi_x + 6a_1m^2\beta\xi_x^3)\mathrm{sn}^2\xi]\\&\times\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi = 0.\end{aligned} \tag{27}$$

令各 Jacobi 椭圆函数的系数为零,解得

$$\xi = \pm\sqrt{-\frac{a_1^2\alpha}{6m^2\beta}}\left[x - \frac{a_1^2\alpha(1+m^2)}{6m^2}t\right] + C,\quad a_0 = 0, \tag{28}$$

其中 a_1,C 为任意常数.

将(28)式代入(26)式,得 mKdV 方程(24)的精确周期解为

$$u = a_1\mathrm{sn}\left[\pm\sqrt{-\frac{a_1^2\alpha}{6m^2\beta}}\left(x - \frac{a_1^2\alpha(1+m^2)}{6m^2}t\right) + C\right]. \tag{29}$$

若令

$$k = \pm\sqrt{-\frac{a_1^2\alpha}{6m^2\beta}},\quad c = \frac{a_1^2\alpha(1+m^2)}{6m^2},\quad C = 0,$$

则(29)式给出文献[18]中相应的结果.

若令 $m\to1$,则 $\mathrm{sn}\xi\to\tanh\xi$,这时(29)式退化为 mKdV 方程(24)的孤波解.

4. 结 论

本文将在行波变换下的 Jacobi 椭圆函数展开法推广到范围非常广泛的一般函数变换下进行,利用这一方法求得了一些非线性发展方程的新的精确周期解. 三个例子说明一些非线性发展方程的周期解一定是行波解或它们的叠加. 同时例 1 还给出了一个非线性 Klein-Gordon 方程(8)到波动方程(13)的一个 Backlünd 变换. 本文的方法具有一定的普遍性,可以用来求解更多的非线性发展方程.

[1] Li Z B and Zhang S Q 1997 *Acta Math. Sci.* **17** 81 (in Chinese) [李志斌、张善卿 1997 数学物理学报 **17** 81]

[2] Li Z B *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2062 (in Chinese) [李志斌等 2001 物理学报 **50** 2062]

[3] Zhang G X *et al* 2000 *Sci. China* A **30** 1103 (in Chinese) [张桂戌等 2000 中国科学 A **30** 1103]

[4] Li D S *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1569 (in Chinese) [李德生等 2003 物理学报 **52** 1569]

[5] Yang L *et al* 2001 *Phys. Lett.* A **278** 267

[6] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[7] Wang M L 1996 *Phys*. *Lett*. A **213** 279

[8] Zhang J L *et al* 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 245

[9] Fan E G *et al* 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 353（in Chinese）[**范恩贵等** 1998 **物理学报 47** 353]

[10] Xu G Q *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 946（in Chinese）[**徐桂琼等** 2002 **物理学报 51** 946]

[11] Xu G Q *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1424（in Chinese）[**徐桂琼等** 2002 **物理学报 51** 1424]

[12] Wazwaz A M 1999 *Appl*. *Math*. *Commun*. **102** 77

[13] El-Sayed S M 2003 *Chaos Solitons Fractals* **18** 1025

[14] Porubov A V 1996 *Phys*. *Lett*. A **221** 391

[15] Porubov A V *et al* 1999 *J*. *Math*. *Phys*. **40** 884

[16] Liu S K *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2068（in Chinese）[**刘式适等** 2001 **物理学报 50** 2068]

[17] Liu S K *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 10（in Chinese）[**刘式适等** 2002 **物理学报 51** 10]

[18] Liu S K *et al* 2001 *Phys*. *Lett*. A **289** 69

[19] Liu S K *et al* 2001 *Phys*. *Lett*. A **290** 72

[20] Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 718（in Chinese）[**刘式达等** 2002 **物理学报 51** 718]

[21] Liu S K *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1923（in Chinese）[**刘式适等** 2002 **物理学报 51** 1923]

[22] Maruno K *et al* 2003 *Physica* D **176** 44

[23] Maruno K *et al* 2003 *Opt*. *Commun*. **221** 199

[24] Zhang S Q *et al* 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1066（in Chinese）[**张善卿等** 2003 **物理学报 52** 1066]

[25] Yan Z Y 2002 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **38** 143

[26] Yan Z Y 2003 *Chaos Solitons Fractals* **18** 575

Jacobi elliptic function expansion method under a general function transform and its applications*

Liu Guan-Ting[1)2)†] Fan Tian-You[1)]

[1)]（*School of Science*，*Beijing Institute of Technology*，*Beijing* 100081，*China*）

[2)]（*Department of Mathematics*，*Inner Mongolia Normal University*，*Huhhot* 010022，*China*）

（Received 18 August 2003；revised manuscript received 18 November 2003）

Abstract

A Jacobi elliptic function expansion method under a general function transform，which is more general than the Jacobi elliptic function expansion method under a traveling wave transform，is proposed to construct the exact solutions of nonlinear evolution equations. It is shown that some new exact periodic solutions of them are obtained by this method and these new solutions include previous solutions. Meanwhile，it is proved that the periodic solutions of some nonlinear evolution equations must be traveling solutions.

Keywords：Nonlinear evolution equation，periodic solution，traveling solution，Jacobi elliptic function

PACC：0340K，0290

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China（Grant No. 10171058），the Natural Science Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region，China，and the Scientific Research Foundation for Youth of Inner Mongolia Normal University，China（Grant No. QNZ00111）.

† E-mail：guantingliu@163.com