第 53 卷 第 3 期 2004 年 3 月
1000-3290/2004/53(03)/0680-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.3, March, 2004

具有 Wood-Saxon 势的 Dirac 方程的束缚态*

陈 刚

(绍兴文理学院物理系，绍兴 312000)

(2003 年 3 月 14 日收到；2003 年 4 月 23 日收到修改稿)

给出了具有一维 Wood-Saxon 型标量势大于或等于其矢量势时的 Dirac 方程的 s 波束缚态解.

关键词：Wood-Saxon 势，Dirac 方程，束缚态，精确解

PACC：0365

1. 引 言

在强耦合条件下，在势场中运动的粒子的相对论效应变得非常重要[1]，而在考虑相对论效应时，处于势场中运动的粒子需要用 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程来描述. 最近寻找 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的精确解引起了人们的广泛兴趣，而且一些典型势阱中 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程的精确束缚态解已经被获得[2—12]，但这些解绝大多数是在标量势等于矢量势条件下获得的[6—12]. 文献[13—15]指出，当标量势大于或等于矢量势时其束缚态解存在，因此得到在标量势大于或等于矢量势条件下其 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程的精确束缚态解更具有理论意义.

Wood-Saxon 势函数为

$$V(r) = -\frac{V_0}{1+\exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}, \tag{1}$$

其中参数 R 为核半径，参数 a 为确定表面层的厚度，且 $a \ll R$. 这个势函数已广泛地描述中子与重核的相互作用. 文献[16]给出其 Schrödinger 方程的 s 波束缚态解. 文献[3]给出当 Wood-Saxon 型标量势大于或等于其矢量势时 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解. 本文将给出当一维 Wood-Saxon 型标量势大于或等于其矢量势时 Dirac 方程的 s 波束缚态解.

2. 一维 Wood-Saxon 势的 Dirac 方程的束缚态

一维标量 Wood-Saxon 势 $S(z)$ 和一维矢量 Wood-Saxon 势 $V(z)$ 的形式为

$$S(z) = -\frac{S_0}{1+\exp\left(\frac{z-R}{a}\right)} \qquad (S_0 > 0);$$

$$V(z) = -\frac{V_0}{1+\exp\left(\frac{z-R}{a}\right)} \qquad (V_0 > 0), \tag{2}$$

相应的 Dirac 方程为

$$\{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta[M+S(z)]\}\Psi(x,y,z) = [E-V(z)]\Psi(x,y,z). \tag{3}$$

取

$$\Psi(x,y,z) = \varphi(z)\exp[\mathrm{i}(p_1 x + p_2 y)], \tag{4}$$

其中 $\varphi(z) = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\\ \varphi_4\end{pmatrix}$ 为旋量波函数，p_1 和 p_2 为常动量. 由(3)式可得 $\varphi(z)$ 满足的方程为

$$\gamma_3\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} = [\gamma_4(E-V) - (M+S) - \mathrm{i}\gamma_1 p_1 - \mathrm{i}\gamma_2 p_2]\varphi, \tag{5}$$

其中 γ_μ 为 4×4 Dirac 矩阵. 以 $\gamma_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ 作用于方程(5)的等号两边，得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_3\end{pmatrix} = \left[-(E-V)^2 + (M+S)^2 + p_1^2 + p_2^2 - \begin{pmatrix}0 & \mathrm{i}(V'-S')\\ -\mathrm{i}(V'+S') & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_3\end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\begin{pmatrix}\varphi_2\\ \varphi_4\end{pmatrix} = \Big[-(E-V)^2 + (M+S)^2 + p_1^2 + p_2^2$$

* 浙江省教育厅科研计划项目(批准号：20031116)资助的课题.

$$+\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}(V'-S') \\ \mathrm{i}(V'+S') & 0 \end{pmatrix}\Bigg]\begin{pmatrix}\varphi_2\\ \varphi_4\end{pmatrix}. \tag{7}$$

把(2)式代入方程(6)和(7),令 $p_1=0, p_2=0$,并引入新的变量

$$x=\frac{1}{1+\exp\left(\dfrac{z-R}{a}\right)}. \tag{8}$$

为了求出禁闭的束缚态解,必须使得 $S_0>V_0$[13-15]. 用文献[17]的方法作正则变换

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{S_0-V_0} & \sqrt{S_0-V_0}\\ \mathrm{i}\sqrt{S_0+V_0} & -\mathrm{i}\sqrt{S_0+V_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\ U_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\varphi_2\\ \varphi_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{S_0-V_0} & \sqrt{S_0-V_0}\\ \mathrm{i}\sqrt{S_0+V_0} & -\mathrm{i}\sqrt{S_0+V_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde U_1\\ \tilde U_2\end{pmatrix}, \tag{9}$$

使方程(6)和(7)中矩阵变为对角矩阵,从而使 φ_1 和 φ_3,φ_2 和 φ_4 的方程退耦,得出

$$x^2(1-x)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f+x(1-x)(1-2x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f+[-\alpha^2+\beta^2x-\lambda^2x^2]f=0, \tag{10}$$

$$x^2(1-x)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}g+x(1-x)(1-2x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g+[-\alpha^2+\beta^2x-\eta^2x^2]g=0, \tag{11}$$

其中 f 为 U_1 或 $\tilde U_2$,g 为 U_2 或 $\tilde U_1$,系数 $\alpha,\beta,\lambda,\delta,\eta$ 分别为

$$\alpha^2=a^2(M^2-E^2), \tag{12}$$

$$\beta^2=\left[2a^2(MS_0+EV_0)-a\sqrt{S_0^2-V_0^2}\right], \tag{13}$$

$$\lambda^2=\left[a^2(S_0^2-V_0^2)-a\sqrt{S_0^2-V_0^2}\right], \tag{14}$$

$$\delta^2=\left[2a^2(MS_0+EV_0)+a\sqrt{S_0^2-V_0^2}\right], \tag{15}$$

$$\eta^2=\left[a^2(S_0^2-V_0^2)+a\sqrt{S_0^2-V_0^2}\right]. \tag{16}$$

对于束缚态,必须使得 $M>E$,且 $\beta^2>\alpha^2+\lambda^2$[3]. 另外,对于束缚态解也需满足边界条件 $f(0)=0$ 和 $f(1)=0$. 为了求解方程(10),作变量代换

$$f(x)=x^\alpha(1-x)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}v(x), \tag{17}$$

其中 $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\sqrt{\alpha^2+\lambda^2-\beta^2}$,则方程(10)变为超几何方程

$$x(1-x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}v(x)+[(2\alpha+1)-(2\alpha+2\varepsilon+3)x]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v(x)-\left[2\alpha(\alpha+\varepsilon+1)-\beta^2+\varepsilon+\frac{1}{2}\right]v(x)=0. \tag{18}$$

方程(18)的解可用超几何函数表示. 因此方程(10)满足边界条件 $f|_{x=0}=0$ 的解为

$$f(x)=x^\alpha(1-x)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\mathrm{F}(\alpha+\varepsilon+1+\mu,\alpha+\varepsilon+1-\mu,2\alpha+1;x), \tag{19}$$

其中 $\mu=\sqrt{\lambda^2+\frac{1}{4}}$. 为了得到其量子化条件,在 $x=1$ 处运用超几何函数的变换关系[18]

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(a,b,c;x)=&\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\times\mathrm{F}(a,b,a+b-c+1;1-x)\\&+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-x)^{c-a-b}\times\mathrm{F}(c-a,c-b,c-a-b+1;1-x),\end{aligned} \tag{20}$$

由于当 $x\to1$ 时,超几何函数的值为 1 且 x^α 对波函数无贡献(即 $x^\alpha=1$),则当 $x\to1$ 时,波函数的渐近解为

$$\begin{aligned}f(x)\approx&\frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(-2\varepsilon-1)}{\Gamma(\alpha-\varepsilon-\mu)\Gamma(\alpha-\varepsilon+\mu)}(1-x)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\\&+\frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(2\varepsilon+1)}{\Gamma(\alpha+\varepsilon+1-\mu)\Gamma(\alpha+\varepsilon+1+\mu)}\times(1-x)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}.\end{aligned} \tag{21}$$

由于 $\beta^2>\alpha^2+\lambda^2$,令 $\frac{1}{2}+\varepsilon=\mathrm{i}\sigma$,且 $\sigma=\sqrt{\beta^2-\alpha^2-\lambda^2}$,则有

$$\begin{aligned}f(x)\approx&\frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(-2\mathrm{i}\sigma)}{\Gamma\left(\alpha-\mu+\frac{1}{2}-\mathrm{i}\sigma\right)\Gamma\left(\alpha+\mu+\frac{1}{2}-\mathrm{i}\sigma\right)}\Bigg[\exp(-\mathrm{i}\sigma R/\alpha)\\&+\frac{\Gamma(2\mathrm{i}\sigma)\Gamma\left(\alpha-\mu+\frac{1}{2}-\mathrm{i}\sigma\right)\Gamma\left(\alpha+\mu+\frac{1}{2}-\mathrm{i}\sigma\right)}{\Gamma(-2\mathrm{i}\sigma)\Gamma\left(\alpha-\mu+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\sigma\right)\Gamma\left(\alpha+\mu+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\sigma\right)}\exp(\mathrm{i}\sigma R/\alpha)\Bigg],\end{aligned} \tag{22}$$

(22)式的计算运用了当 $x\approx 1$ 及 $z=0$ 时的近似公式 $1-x=\exp(-R/\alpha)$. 根据边界条件 $f|_{x=1}=0$,可得量子化条件为

$$\arg\Gamma(2\mathrm{i}\sigma)-\arg\Gamma\left(\alpha-\mu+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\sigma\right)-\arg\Gamma\left(\alpha+\mu+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\sigma\right)+\sigma R/a=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),\tag{23}$$

即

$$\begin{aligned}&\arg\Gamma\left(2\mathrm{i}a\sqrt{(E_n-V_0)^2-(M-S_0)^2}\right)\\&-\arg\Gamma\Big(a\sqrt{M^2-E_n^2}\\&-\sqrt{a^2(S_0^2-V_0^2)-a\sqrt{S_0^2-V_0^2}+\frac{1}{4}}\\&+\frac{1}{2}+\mathrm{i}a\sqrt{(E_n-V_0)^2-(M-S_0)^2}\Big)\\&-\arg\Gamma\Big(a\sqrt{M^2-E_n^2}\\&+\sqrt{a^2(S_0^2-V_0^2)-a\sqrt{S_0^2-V_0^2}+\frac{1}{4}}\\&+\frac{1}{2}+\mathrm{i}a\sqrt{(E_n-V_0)^2-(M-S_0)^2}\Big)\\&+\sqrt{(E_n-V_0)^2-(M-S_0)^2}R\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi.\end{aligned}\tag{24}$$

同样可求出满足方程(11)的 $g(x)$的解,结果为

$$\begin{aligned}g(x)&=x^{\alpha}(1-x)^{\frac{1}{2}+\kappa}\\&\times\mathrm{F}(\alpha+\kappa+1+\mu,\alpha+\kappa+1-\mu,\\&2\alpha+1;x),\end{aligned}\tag{25}$$

其中 $\kappa=-\frac{1}{2}+\sqrt{\alpha^2+\eta^2-\delta^2}$,相应于 $g(x)$的量子化条件为

$$\begin{aligned}&\arg\Gamma\left(2\mathrm{i}a\sqrt{(E_m-V_0)^2-(M-S_0)^2}\right)\\&-\arg\Gamma\Big(a\sqrt{M^2-E_m^2}\\&-\sqrt{a^2(S_0^2-V_0^2)+a\sqrt{S_0^2-V_0^2}+\frac{1}{4}}\\&+\frac{1}{2}+\mathrm{i}a\sqrt{(E_m-V_0)^2-(M-S_0)^2}\Big)\\&-\arg\Gamma\Big(a\sqrt{M^2-E_m^2}\\&+\sqrt{a^2(S_0^2-V_0^2)+a\sqrt{S_0^2-V_0^2}+\frac{1}{4}}\\&+\frac{1}{2}+\mathrm{i}a\sqrt{(E_m-V_0)^2-(M-S_0)^2}\Big)\\&+\sqrt{(E_m-V_0)^2-(M-S_0)^2}R\\&=\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\quad(m=0,\pm1,\pm2,\cdots).\end{aligned}\tag{26}$$

根据(24)和(26)式可得其束缚态能级,相应的旋量波函数 $\varphi(x)$的各个分量为

$$\varphi_1(x)=\sqrt{S_0-V_0}[c_1f(x)+c_2g(x)],\tag{27}$$

$$\varphi_2(x)=\sqrt{S_0-V_0}[c_3f(x)+c_4f(x)],\tag{28}$$

$$\varphi_3(x)=\mathrm{i}\sqrt{S_0-V_0}[c_1f(x)-c_2g(x)],\tag{29}$$

$$\varphi_4(x)=\mathrm{i}\sqrt{S_0-V_0}[c_3g(x)-c_4f(x)],\tag{30}$$

其中 $f(x)$,$g(x)$对应于(19),(25)式,c_1,c_2,c_3,c_4 为系数,且 c_2,c_3,c_4 可以用 c_1 来表示,而 c_1 可由波函数的归一化条件给出.

3. 结论与讨论

综上所述,本文给出了在 Wood-Saxon 型标量势大于或等于 Wood-Saxon 型矢量势条件下其 Dirac 方程的 s 波精确束缚态解,给出了其束缚态能级所满足的公式及未归一化波函数. 对于在 Wood-Saxon 型标量势等于 Wood-Saxon 型矢量势条件下,其 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程与 Schrödinger 方程类似,而 Wood-Saxon 势的 Schrödinger 方程求解在文献[16]中已有详细讨论,这里就不再求解.

[1] Wang I C and Wong C Y 1988 *Phys. Rev.* D **38** 348
[2] Dominguez-Adame F 1989 *Phys. Lett.* A **136** 175
[3] Hou C F and Zhou Z X 1999 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **8** 561
[4] Hu S Z and Su R K 1991 *Acta Phys. Sin.* **40** 1201 (in Chinese) [胡嗣柱、苏汝铿 1991 物理学报 **40** 1201]
[5] Ran Y Q, Xue L H and Hu S Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2435 (in Chinese) [冉扬强、薛立徽、胡嗣柱 2002 物理学报 **51** 2435]
[6] Hou C F, Li Y and Zhou Z X 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1999 (in Chinese) [侯春风、李 焱、周忠祥 1999 物理学报 **48** 1999]
[7] Guo J Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1453 (in Chinese) [郭建友 2002 物理学报 **51** 1453]

[8] Qiang W C 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 757

[9] Chen G 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1651 (in Chinese) [陈 刚 2001 物理学报 **50** 1651]

[10] Chen G and Lou Z M 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1071 (in Chinese) [陈 刚、楼智美 2003 物理学报 **52** 1071]

[11] Chen G and Lou Z M 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1075 (in Chinese) [陈 刚、楼智美 2003 物理学报 **52** 1075]

[12] Chen C Y *et al* 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1579 (in Chinese) [陈昌远等 2003 物理学报 **52** 1579]

[13] Long C and Robson D 1983 *Phys*. *Rev*. D **27** 644

[14] Fishbane P M *et al* 1983 *Phys*. *Rev*. D **27** 2433

[15] Su R K and Ma Z Q 1986 *J*. *Phys*. A **19** 1739

[16] Flügge S 1974 *Practical Quantum Mechanics* (Berlin:Springer)

[17] Su R K and Zhang Y H 1984 *J*. *Phys*. A **17** 851

[18] Wang Z X and Guo D R 2000 *An Introduction to Special Functions* (Beijing:Peking University Press) (in Chinese) [王竹溪、郭敦仁 2000 特殊函数概论(北京:北京大学出版社)]

Bound states for Dirac equation with Wood-Saxon potential*

Chen Gang

(*Department of Physics*, *Shaoxing College of Arts and Sciences*, *Shaoxing* 312000, *China*)

(Received 14 March 2003; revised manuscript received 23 April 2003)

Abstract

The *s* wave exact bound state solutions of Dirac equation are obtained when the Wood-Saxon -type scalar potential is not less than its vector potential.

Keywords: Wood-Saxon potential, Dirac equation, bound state, exact solution

PACC: 0365

* Project supported by the Science Foundation from the Education Bureau of Zhejiang Province, China (Grant No. 20031116).