第 53 卷 第 3 期 2004 年 3 月
1000-3290/2004/53(03)/0684-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.3, March, 2004


# Rosen-Morse 势阱中相对论粒子的束缚态*

陈 刚

(绍兴文理学院物理系, 绍兴 312000)

(2003 年 4 月 11 日收到; 2003 年 6 月 13 日收到修改稿)

给出了具有 Rosen-Morse 型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 $s$ 波束缚态解. 运用超对称量子力学和形不变性得到了束缚态能谱, 通过变量代换求得波函数. 把上述方法推广到相对论量子力学.

关键词: Rosen-Morse 势, Klein-Gordon 方程, Dirac 方程, 束缚态

PACC: 0365

## 1. 引　言

在强耦合条件下, 在势场中运动的粒子的相对论效应变得非常重要[1], 而在考虑相对论效应时, 处于势场中运动的粒子需要用 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程来描述. Dominguez-Adame[2] 和 Talukdar 等人[3] 分别给出了具有 Hulthén 势的 Klein-Gordon 方程的 $s$ 波束缚态解和散射态解; Hu 等人[4] 给出了在 Hulthén 标量势与矢量势相等的条件下 Dirac 方程的 $s$ 波束缚态解; Hou 等人分别给出了在 Morse 标量势与矢量势相等的条件下 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 $s$ 波束缚态解[5], 在 Wood-Saxon 标量势大于等于矢量势的条件下 Klein-Gordon 方程的 $s$ 波束缚态解[6]; Guo 给出了在 $\tan^2(\pi\eta r)$ 标量势与矢量势相等的条件下 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 $s$ 波束缚态解[7]; Qiang 给出了在谐振子标量势与矢量势相等的条件下 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的束缚态解[8]. 本文作者已经分别给出了在 Pöschl-Teller[9]、无反射[10] 和四参数双原子分子[11] 标量势与矢量势相等的条件下 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 $s$ 波束缚态解, 在线性型标量势大于等于矢量势的条件下 Klein-Gordon 方程的 $s$ 波束缚态解[12]. 本文将考虑粒子在 Rosen-Morse 势[13]

$$V(r) = A\tanh r - B\,\mathrm{sech}^2 r$$

中的相对论效应, 在 Rosen-Morse 型标量势与矢量势相等的条件下, 分别给出了 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 $s$ 波束缚态解.

另外, 在前面的求解过程中都采用传统方法——把方程通过令变量转化到特殊函数(常见的是超几何函数, 如文献[2—4]和[6—11]; 合流超几何函数, 如文献[5, 12]), 然后根据特殊函数的性质得到它们的能谱方程. 本文运用最近发展起来的超对称量子力学和形不变性[14—19] 也得到了相关结果, 推广了超对称量子力学和形不变性方法在一些具体物理问题中的应用.

## 2. 具有 Rosen-Morse 型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程的 $s$ 波束缚态解

文献[2]指出, 具有标量势 $S(R)$ 与矢量势 $V(r)$ 的 $s$ 波 Klein-Gordon 方程为 ($\hbar = \mu = 1$)

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + [E - V(r)]^2 - [M + S(r)]^2\right\}u(r) = 0$$

$$\left[R(r) = \frac{u(r)}{r}\right], \tag{1}$$

其中 $E$ 为能量, $M$ 为质量. 对于 Rosen-Morse 势, 在标量势与矢量势相等的条件下, $s$ 波 Klein-Gordon 的方程为

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - 2(M + E)(A\tanh r + B\tanh^2 r) + [E^2 - M^2 + 2(E + M)B]\right\}u(r) = 0. \tag{2}$$

令

$$l(l+1) = 2(E + M)B, \tag{3}$$

$$\gamma = -2(E + M)A, \tag{4}$$

$$\lambda = E^2 - M^2 + 2(E + M)B, \tag{5}$$

---

* 浙江省教育厅科研计划项目(批准号: 20031116)资助的课题.

方程(2)变为

$$-\frac{d^2}{dr^2}u(r)+[l(l+1)\tanh^2 r-\gamma\tanh r]u(r)=\lambda u(r). \tag{6}$$

利用文献[20]的方法容易求得方程(6)的基态波函数和基态能分别为

$$u_0(r)=(\mathrm{sech}r)^l\exp\left(\frac{\gamma}{2l}r\right),\quad \lambda_0=l-\frac{\gamma^2}{4l^2}. \tag{7}$$

与方程(7)对应的超势为

$$W(r)=l\tanh r-\frac{\gamma}{2l}. \tag{8}$$

从方程(8)可得超对称伴势分别为

$$V_-(r,l)=l(l+1)\tanh^2 r-\gamma\tanh r-l+\frac{\gamma^2}{4l^2}, \tag{9}$$

$$V_+(r,l)=l(l-1)\tanh^2 r-\gamma\tanh r+l+\frac{\gamma^2}{4l^2}. \tag{10}$$

从方程(9)和(10)可得

$$V_+(r,l)=V_-(r,l-1)+R(l-1), \tag{11}$$

于是立即可得

$$\lambda_n^{(-)}=\sum_{k=1}^{n}R(l-k)=\frac{\gamma^2}{4l^2}+l^2-(l-n)^2-\frac{\gamma^2}{4}\frac{1}{(l-n)^2},\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{12}$$

由方程(7)和(12)得

$$\lambda_n=l(l+1)-(l-n)^2-\frac{\gamma^2}{4}\frac{1}{(l-n)^2}. \tag{13}$$

运用超对称量子力学和形不变性可以求出方程(6)的波函数，但这里将直接设变量得到方程(6)的波函数．设

$$u(y)=\exp\left[\frac{\gamma}{2(l-n)}r\right](\cosh r)^{-l+n}F(y), \tag{14}$$

$$y=\frac{1+\tanh r}{2}, \tag{15}$$

则方程(6)变为

$$y(1-y)\frac{d^2F(y)}{dy^2}+\left[\left(l-n+\frac{\gamma}{2(l-n)}+1\right)-2(l-n+1)y\right]\times\frac{dF(y)}{dy}+(2nl-n^2+n)F(y)=0. \tag{16}$$

方程(16)是一个超几何方程，其解为[21]

$$F(y)=\mathrm{F}\left(-n,2l-n+1,l-n+\frac{\gamma}{2(l-n)}+1,y\right). \tag{17}$$

由方程(5)，(13)得到方程(2)的能谱方程为

$$M^2-E^2-(l-n)^2-\frac{\gamma^2}{4}\frac{1}{(l-n)^2}=0, \tag{18}$$

相对应的波函数为(未归一化)

$$R(r)=\frac{1}{r}\left\{\exp\left[\frac{\gamma}{2(l-n)}r\right](\cosh r)^{-l+n}\times\mathrm{F}\left(-n,2l-n+1,l-n+\frac{\gamma}{2(l-n)}+1,\frac{1+\tanh r}{2}\right)\right\}, \tag{19}$$

其中 $l=\frac{1}{2}[-1+\sqrt{1+8(E+M)B}]$，$\gamma=-2(E+M)A$.

## 3．具有 Rosen-Morse 型标量势与矢量势的 Dirac 方程的束缚态解

文献[4]指出，具有标量势 $S(r)$ 与矢量势 $V(r)$ 的 Dirac 方程为($\hbar=\mu=1$)

$$\{C\cdot\boldsymbol{P}+D[M+S(r)]\}\psi=[E-V(r)]\psi. \tag{20}$$

在相对论情况下，中心力场中粒子的守恒量完全集可以取为$(H,\boldsymbol{K},\boldsymbol{J}^2,\boldsymbol{J}_z)$，$(H,\boldsymbol{K},\boldsymbol{J}^2,\boldsymbol{J}_z)$的共同本征函数为[22]

$$\psi=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}f_{n,K}(r)\phi^A_{jm_j}\\ \mathrm{i}g_{n,K}(r)\phi^B_{jm_j}\end{pmatrix}\quad\left(\text{当 } K=j+\frac{1}{2}\text{ 时}\right), \tag{21}$$

$$\psi=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}f_{n,K}(r)\phi^B_{jm_j}\\ \mathrm{i}g_{n,K}(r)\phi^A_{jm_j}\end{pmatrix}\quad\left(\text{当 } K=-\left(j+\frac{1}{2}\right)\text{时}\right), \tag{22}$$

其中

$$\phi^A_{jm_j}=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{j+m_j}{2j}}Y_{j-\frac{1}{2},m_j-\frac{1}{2}}\\ \sqrt{\frac{j-m_j}{2j}}Y_{j-\frac{1}{2},m_j+\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\quad \phi^B_{jm_j}=\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{j-m_j+1}{2j+2}}Y_{j+\frac{1}{2},m_j-\frac{1}{2}}\\ \sqrt{\frac{j+m_j+1}{2j+2}}Y_{j+\frac{1}{2},m_j+\frac{1}{2}}\end{pmatrix}. \tag{23}$$

把(21)或(22)式代入(20)式，可分离出 Dirac 方程的

径向部分为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}-\frac{K}{r}f=[M+E+S(r)-V(r)]g,\quad(24)$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}+\frac{K}{r}g=[M-E+S(r)+V(r)]f.\quad(25)$$

对于 Rosen-Morse 势,在标量势与矢量势相等的条件下,方程(24),(25)变为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}-\frac{K}{r}f=(M+E)g,\quad(26)$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}+\frac{K}{r}g=[(M-E)+2(A\tanh r-B\mathrm{sech}^2 r)]f,\quad(27)$$

把(26)式代入(27)式,可得 $s$ 波($K=1$)的方程为

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}-2(M+E)(A\tanh r+B\tanh^2 r)+[E^2-M^2+2(E+M)B]\right\}f=0.\quad(28)$$

方程(28)与方程(2)完全类似,于是立即可得 $s$ 波束缚态满足的能谱方程为

$$M^2-E^2-(l-n)^2-\frac{\gamma^2}{4}\frac{1}{(l-n)^2}=0,\quad(29)$$

相对应的波函数为(未归一化)

$$f(r)=\exp\left[\frac{\gamma}{2(l-n)}r\right](\cosh r)^{-l+n}\mathrm{F}\left(-n,2l-n+1,l-n+\frac{\gamma}{2(l-n)}+1,\frac{1+\tanh r}{2}\right),\quad(30)$$

$$\begin{aligned}g(r)=\frac{1}{(M+E)}\Big\{&\left[\frac{\gamma}{2(l-n)r}-(l-n)\tanh r-\frac{1}{r}\right]\exp\left[\frac{\gamma}{2(l-n)}r\right](\cosh r)^{-l+n}\mathrm{F}\Big(-n,2l-n+1,\\&l-n+\frac{\gamma}{2(l-n)}+1,\frac{1+\tanh r}{2}\Big)+\frac{n^2-2nl-n}{2\left(l-n+\frac{\gamma}{2(l-n)}+1\right)}\exp\left[\frac{\gamma}{2(l-n)}r\right](\cosh r)^{-l+n-2}\\&\times\mathrm{F}\left(-n+1,2l-n+2,l-n+\frac{\gamma}{2(l-n)}+2,\frac{1+\tanh r}{2}\right)\Big\},\end{aligned}\quad(31)$$

其中

$$l=\frac{1}{2}\left[-1+\sqrt{1+8(E+M)B}\right],$$

$$\gamma=-2(E+M)A.$$

把 $f(r)$ 和 $g(r)$ 代入(21)或(22)式,可得在 Dirac 方程的 $s$ 波旋量波函数.

## 4. 结 论

综上所述,具有相等的标量与矢量 Rosen-Morse 型势函数的 Klein-Gordon 方程的 $s$ 波束缚态解可以严格地求出,$s$ 波 Dirac 方程的 $f$ 分量所满足的方程与 Klein-Gordon 方程非常相似,其解可用同样的方法求得,从而可求出 $s$ 波 Dirac 方程的 $g$ 分量,由此可得出 Dirac 方程的 $s$ 波束缚态旋量波函数.与以前不同的是,运用超对称量子力学和形不变性方法也可以求出 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 $s$ 波束缚态能谱和波函数,关于超对称量子力学和形不变性方法的其他物理问题(例如在标量势大于等于矢量势条件下其 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 $s$ 波束缚态能谱和波函数),需要进一步探索和讨论.


[1] Wang I C and Wong C Y 1988 *Phys*. *Rev*. D **38** 348

[2] Dominguez-Adame F 1989 *Phys*. *Lett*. A **136** 175

[3] Talukdar B, Yunus A and Amin M R 1989 *Phys*. *Lett*. A **141** 326

[4] Hu S Z and Su R K 1991 *Acta Phys*. *Sin*. **40** 1201 (in Chinese)[胡嗣柱、苏汝铿 1991 物理学报 **40** 1201]

[5] Hou C F, Li Y and Zhou Z X 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1999 (in Chinese)[侯春风、李 焱、周忠祥 1999 物理学报 **48** 1999]

[6] Hou C F and Zhou Z X 1999 *Acta Phys*. *Sin*. (Overseas Edition) **8** 561

[7] Guo J Y 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1453 (in Chinese)[郭建友 2002 物理学报 **51** 1453]

[8] Qiang W C 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 757

[9] Chen G 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1651 (in Chinese)[陈 刚 2001 物理学报 **50** 1651]

[10] Chen G and Lou Z M 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1071 (in Chinese)[陈 刚、楼智美 2003 物理学报 **52** 1071]

[11] Chen G and Lou Z M 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1075 (in Chinese)[陈 刚、楼智美 2003 物理学报 **52** 1075]

[12] Chen G and Zhao D F 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2954 (in Chinese) [陈 刚、赵定烽 2003 物理学报 **52** 2954]

[13] Rosen N and Mores P M 1932 *Phys. Rev.* **42** 210

[14] Witten E 1981 *Nucl. Phys.* B **188** 513

[15] Cooper F and Freeman B 1983 *Ann. Phys.* **146** 262

[16] Cooper F, Khare A and Sukhatme U 1995 *Phys. Rep.* **251** 267

[17] Gendenshtein L 1983 *JETP Lett.* **38** 356

[18] Qian S W *et al* 2002 *Commun. Theor. Phys.* **38** 139

[19] Chen G, Chen Z D and Lou Z M *Chin. Phys.* to be published

[20] Chu D P, Shi M J and Chen Y H 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 535 (in Chinese) [朱栋培、石名俊、陈银华 1992 物理学报 **41** 535]

[21] Wang Z X and Guo D R 2000 *An Introduction to Special Functions* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [王竹溪、郭敦仁 2000 特殊函数概论(北京：北京大学出版社)]

[22] Zeng J Y 1997 *Quantum Mechanics* vol Ⅱ, 2nd ed (Beijing: Science Press) (in Chinese) [曾谨言 1997 量子力学 卷Ⅱ 第二版(北京：科学出版社)]


# Bound states of relativistic particles in Rosen-Morse potential*


Chen Gang

(*Department of Physics, Shaoxing College of Arts and Sciences, Shaoxing* 312000, *China*)


(Received 11 April 2003; revised manuscript received 13 June 2003)


Abstract

The exact bound state solutions of the Klein-Gordon equation and Dirac equation with scalar and vector Rosen-Morse potentials are obtained in this paper. In addition, we use the supersymmetric quantum mechanics and shape invariance to get the bound state energy spectrum and use a change of variable to obtain the wave function. The above methods are extended to relativistic quantum mechanics.



**Keywords**: Rosen-Morse potential, Klein-Gordon equation, Dirac equation, bound state

**PACC**: 0365


* Project supported by the Science Foundation from the Education Bureau of Zhejiang Province, China (Grant No. 20031116).