第 53 卷 第 4 期 2004 年 4 月
1000-3290/2004/53(04)/0991-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.4, April, 2004

低维俘获原子的玻色-爱因斯坦凝聚中的有限粒子数效应

崔海涛† 王林成 衣学喜

(东北师范大学理论物理研究所,长春 130024)

(2003 年 3 月 26 日收到;2003 年 4 月 23 日收到修改稿)

基于 Thomas-Fermi 近似,通过对配分函数的高温展开确定了体系的有效态密度,得到了在忽略相互作用下,低维受俘获原子玻色爱因斯坦凝聚的临界温度,并计算出了临界温度附近体系的比热容随温度的变化行为.研究结果表明:二维情况下,体系的比热容 c 正比于 T^2;而在一维情况下,c 随温度呈线性增加.

关键词:玻色-爱因斯坦凝聚,有限粒子数,低维束缚势,Thomas-Fermi 近似
PACC:0530J,6460

1. 引 言

自从玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)的概念提出以来,物理学家们对此进行了大量的研究工作.2001 年的诺贝尔物理学奖就授予了美国科学家 Wieman,Cornell 和德国科学家 Ketterle,以表彰他们在俘获稀薄碱金属原子气的 BEC 和对凝聚体特性的早期基础性研究所取得的成就[1].近几年对 BEC 的研究主要集中在三维束缚势下,凝聚体的相变特性及其他平衡态特性.随着实验技术的不断改进,低维体系 BEC 已经被 Görlitz 等[2]在实验上实现.他们通过降低三维凝聚体的平均场相互作用能,使得处在俘获势中的原子在一个或两个方向上受到更紧的束缚,原子在这个或这两个方向上的能级差远大于在另外方向上的能级差,从而得到二维和一维凝聚体.在一些其他的实验中也得到了低维的 BEC,例如在 ^{6}Li-^{7}Li 混合体系[3]中与在微型芯片上[4]实现的 BEC.

这些实验为长期以来关于在低维体系中 BEC 现象是否存在的争论提供了很重要的佐证.我们知道,对于均匀的理想气体,在空间维数 $d\leqslant 2$ 时 BEC 现象是不可能发生的.更严格的数学推导已经把这个结论推广到了存在相互作用的玻色系统中[5].但另一方面,当系统处于束缚势场中时,对于二维玻色体系,相变温度 T_c 满足 $KT_c=\hbar\omega\sqrt{\frac{6N}{\pi^2}}$[6];对于一维体系,相变温度 T_c 满足 $T_c=0.2T_0$[3](其中 T_0 是理想玻色气体的凝聚温度),可以实现 BEC.应该注意的是:上述的实验均是在热力学极限下($N\to\infty$,$V\to\infty$,$\frac{N}{V}=$常数)进行的,而实际上被束缚的原子数(大约 10^9 个)要远远偏离该极限,凝聚的原子数则更少(大约 10^3).因此有必要讨论有限粒子数情况下量子体系的凝聚特性.本文的目的就是把文献[7—9]的工作推广到低维情况,根据 Thomas-Fermi 近似,利用高温展开方法确定有限数目原子体系的有效态密度.利用该态密度研究体系临界温度及临界温度附近体系的比热容行为.

2. 二维玻色体系

考虑被束缚在二维谐振子势 $V(x,y)=\frac{1}{2}m\times(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2)$中的 N 个无相互作用的原子,它们具有如下的能级结构:

$$E_n=\hbar\omega_x\left(n_x+\frac{1}{2}\right)+\hbar\omega_y\left(n_y+\frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

则该体系的正则配分函数为

$$Q(\beta)=\sum_n \mathrm{e}^{-\beta E_n}=\sum_{n_x,n_y=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta(n_x\omega_x+n_y\omega_y)}$$

†E-mail:cuiht660@nenu.edu.cn

$$= \frac{1}{(1 - e^{-\beta\omega_x})(1 - e^{-\beta\omega_y})}. \tag{2}$$

这里我们采取了自然单位($\hbar = 1$),并将基态能量对配分函数的贡献暂时除去,在以后的讨论中我们将单独考虑它的作用.在原子的 BEC 实验中,体系一般处在 100 μK—100 nK 的温度区间,当原子开始在基态上凝聚时,体系的温度稳定在 100 nK 的量级.因此在整个实验过程中,体系的环境温度要比$\frac{\omega_i}{k_B} \approx$ 100 nK大得多.这样我们可以将 $Q(\beta)$按小量 $\beta\omega_i$ 展开成如下的形式:

$$Q(\beta) = A_2\beta^{-2} + A_1\beta^{-1} + A_0 + O(\beta), \tag{3}$$

式中

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{\omega_x\omega_y}, \\ A_1 &= \frac{1}{2\omega_x\omega_y}(\omega_x + \omega_y), \\ A_0 &= \frac{1}{12}\left(\frac{\omega_x}{\omega_y} + \frac{\omega_y}{\omega_x} + 3\right). \end{aligned} \tag{4}$$

应该强调的是,上述的展开是在 Thomas-Fermi 近似的条件下进行的,即条件 $\beta\omega_i \ll 1 (i = x, y)$必须得到满足.展开式(3)中等号右端第一项是热力学极限下的结果,第二项则是有限粒子数的修正.

利用态密度可以将配分函数 $Q(\beta)$写成积分的形式

$$\begin{aligned} Q(\beta) &= \sum_n e^{-\beta E_n} \\ &= \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \rho(E) e^{-\beta E} dE, \end{aligned} \tag{5}$$

式中 ε_0 为系统的基态能量.在本文的情况下 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(w_x + w_y)$,$\rho(E)$为体系的态密度.我们把 $\rho(E)$展开能量 E 的级数形式

$$\rho(E) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n E^n. \tag{6}$$

从(3)和(5)式不难发现,$\rho(E)$的展开式(7)中只有 E 的一次幂和常数项起重要作用.故(6)式可近似为如下形式:

$$\rho(E) = B_1 E + B_0. \tag{7}$$

将(7)代入到(5)式中,并与(3)式比较,得到如下关系:

$$B_1 = A_2,$$
$$B_0 = A_1.$$

下面我们将利用(7)式来计算体系的临界温度 T_c,并据此来研究体系在临界温度附近比热容随温度的变化.由玻色分布

$$n(E_i) = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta E} - 1}, \tag{8}$$

其中 $z = e^{\beta E}$为逸度[10],得到系统中总的粒子数

$$N = \sum_i n(E_i) = \sum_i \frac{1}{z^{-1}e^{\beta E_i - 1}}. \tag{9}$$

用积分形式表示为

$$N = n_0 + \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{\rho(E)}{z^{-1}e^{\beta E} - 1} dE, \tag{10}$$

式中 n_0 为处于基态能级上的粒子数.这里我们取积分下限为 ε_0,以避免可能引入的非物理的结果.将(7)式代入,经过计算得

$$\begin{aligned} N = n_0 &+ \frac{B_1}{\beta^2} g_2(z) - \frac{B_1}{\beta^2}\Big\{\beta\varepsilon_0 \\ &+ \beta\mu \ln\left[\beta\varepsilon_0\left(1 - \frac{\mu}{\varepsilon_0}\right)\right]\Big\} \\ &- \frac{B_0}{\beta}\ln\left[\beta\varepsilon_0\left(1 - \frac{\mu}{\varepsilon_0}\right)\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

式中 $g_n(z)$为玻色积分.引入特征温度 T_0,

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{k_B}\left(\frac{N}{B_1 g_2(1)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(w_x w_y)^{\frac{1}{2}}}{k_B}\left(\frac{N}{g_2(1)}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{12}$$

表示在热力学极限下,处于各向异性谐振子势场中玻色体系的临界温度[6].则基态原子数 n_0 与体系原子总数 N 的比值

$$\begin{aligned} \frac{n_0}{N} = 1 - \frac{T^2}{T_0^2}\Big\{&\frac{g_2(z)}{g_2(1)} - \frac{\beta}{g_2(1)} \\ &\times \left[\varepsilon_0 + \mu\ln\left[\beta\varepsilon_0\left(1 - \frac{\mu}{\varepsilon_0}\right)\right]\right] \\ &- \frac{B_0\beta}{B_1 g_2(1)}\ln\left[\beta\varepsilon_0\left(1 - \frac{\mu}{\varepsilon_0}\right)\right]\Big\}. \end{aligned} \tag{13}$$

原子开始在基态凝聚时,体系临界温度表示为

$$T_c \approx T_0\left[1 + \frac{B_0\beta_0}{2B_1 g_2(1)}\ln(\beta_0\varepsilon_0) + \frac{\beta_0\varepsilon_0}{2g_2(1)}\right]. \tag{14}$$

从图 1 可以发现:随着粒子数 N 的增大,体系的临界温度 T_c 也随之增大.但应注意的是,由于(14)式等号右端第二项的绝对值要远大于第三项.因此 T_c 总是小于 T_0,它们之间的差别主要取决于体系中粒子数的大小和束缚势的形状.

当 BEC 开始出现时,体系的比热容在临界点附

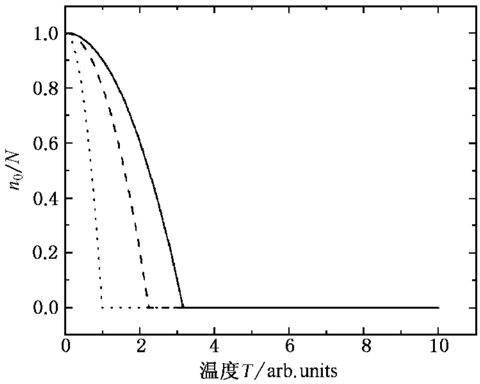

图 1　二维束缚势中凝聚的原子数随温度的变化　曲线从左到右原子数依次为 1000,5000,10000

近发生突变,此即著名的 λ 相变.通过对 λ 相变的研究可以确定体系的临界温度,研究体系的低温特性.因此我们有必要讨论体系比热容在临界点附近的温度特性.热力学势为

$$U = n_0 \varepsilon_0 + \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{E\rho(E)}{z\mathrm{e}^{\beta E} - 1}\mathrm{d}E . \tag{15}$$

将(7)式代入得

$$\begin{aligned} U =& n_0\varepsilon_0 + \frac{2B_1}{\beta^3} g_3(z) + \frac{B_0}{\beta^2} g_2(z) \\ & - 2B_1\left\{\frac{\varepsilon_0}{2\beta} + \mu\left\{\frac{\varepsilon_0}{\beta} - \frac{\mu}{\beta}\ln\left[\beta\varepsilon_0\left(1-\frac{\mu}{\varepsilon_0}\right)\right]\right]\right\} \\ & + \frac{\mu}{\beta}\ln(-\beta\mu)\Big\} - \frac{B_0}{\beta}\left\{\varepsilon_0 + \mu\ln\left[\beta\varepsilon_0\left(1-\frac{\mu}{\varepsilon_0}\right)\right]\right]\Big\}. \end{aligned} \tag{16}$$

由关系 $c = \frac{1}{N}\frac{\partial U}{\partial T}$,并略去基态能量对热力学势的贡献,我们得到体系比热容在临界点附近的温度特性,

$$\begin{aligned} c =& \frac{1}{NKT^2}\left[\frac{6B_1}{\beta^4} g_3(z) + \frac{2B_0}{\beta^3} g_2(z) \right. \\ & \left. - \frac{2\mu B_1}{\beta^3} g_2(z) - \frac{\mu B_0}{\beta^2} g_1(z)\right], \\ & T > T_c, \end{aligned} \tag{17}$$

$$c = \frac{1}{NKT^2}\left[\frac{6B_1}{\beta^4} g_3(1) + \frac{2B_0}{\beta^3} g_2(1)\right], \quad T < T_c . \tag{18}$$

当 $T < T_c$ 时,体系的比热容随 T^2 变化,$T = T_c$ 时达到最大值,

$$c_{\max} = \frac{1}{NKT_c^2}\left[\frac{6B_1}{\beta_c^4} g_3(1) + \frac{2B_0}{\beta_c^3} g_2(1)\right]. \tag{19}$$

且在该点 $\left(\frac{\partial c}{\partial T}\right)_{T=T_c}$ 不连续,这表明了 BEC 开始出现.

3. 一维玻色体系

对于束缚在一维谐振子势场 $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ 中的原子,其能级为

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{20}$$

配分函数为

$$Q(\beta) = \sum_n \mathrm{e}^{-\beta E_n} = \frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-\beta\omega})}.$$

同样,在 Thomas-Fermi 近似下对 $Q(\beta)$ 进行展开,我们得到

$$Q(\beta) = A_1\beta^{-1} + A_0 + O(\beta), \tag{21}$$

式中

$$A_1 = \frac{1}{\omega},$$

$$A_0 = \frac{1}{2}.$$

利用与第二节类似的方法,我们得到一维体系的有效态密度 $\rho(E)$ 为

$$\rho(E) = \frac{1}{\omega}, \tag{22}$$

即对于一维无相互作用玻色体系,态密度只是束缚势场频率的倒数,而与体系的温度无关.将(22)式代入(10)式,得到体系的总粒子数为

$$N = n_0 - \frac{1}{\omega\beta}\ln\left[\beta\varepsilon_0\left(1-\frac{\mu}{\varepsilon_0}\right)\right]. \tag{23}$$

则体系在临界温度 T_c 下满足如下方程:

$$1 + \frac{k_B T_c}{N\omega}\ln\frac{\varepsilon_0}{k_B T_c} = 0. \tag{24}$$

通过对图 2 的分析我们发现:一维玻色体系的临界温度 T_c 仍然随着粒子数 N 的增加而增加,而且变化得很明显.这也从一个侧面说明了一维体系 BEC 现象的存在.将(22)式代入(15)式,得到体系热力学势为

$$U = n_0\varepsilon_0 + \frac{1}{\omega\beta^2} g_2(z). \tag{25}$$

则比热容在临界点附近的温度特性

$$c = \frac{2k_B^2}{N\omega}\left[g_2(z)T - \frac{\mu}{2k_B} g_1(z)\right], \quad T > T_c, \tag{26}$$

$$c = \frac{2k_B^2}{N\omega} g_2(1)T, \qquad T < T_c . \tag{27}$$

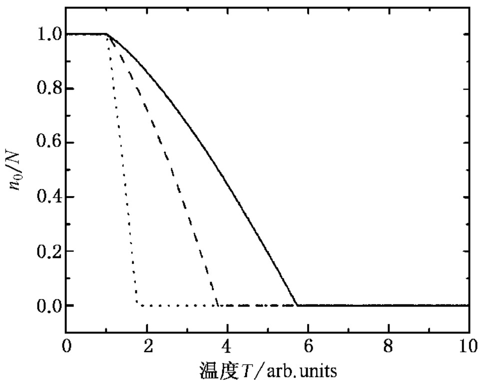

图 2 一维束缚势中凝聚的原子数随温度的变化 曲线从左到右原子数依次为 1000,5000,10000

由(26),(27)式可以发现,当 $T<T_c$ 时,体系比热容随温度线性增加,到达点 T_c 时,体系比热容达到最大值 $c_{\max}=\frac{2k_B^2}{N\omega}g_2(1)T_c$.经过计算我们还发现,$\left(\frac{\partial c}{\partial T}\right)_{T\to T_c^-}$ 趋于一有限值,$\left(\frac{\partial c}{\partial T}\right)_{T\to T_c^+}$ 趋于另一有限值.这表明体系在该处比热容不连续,有相变出现.

4. 结果与讨论

利用高温展开研究了有限数目原子的低维 BEC.我们发现,在低维玻色体系中,临界温度 T_c 随粒子数的变化行为与三维情况基本相同.而临界温度下,比热容的温度特性则与体系的维数相关;二维情况 $c\propto T^2$,一维情况 $c\propto T$.我们可以作如下猜测 对于 d 维玻色体系,在凝聚温度以下,比热容 $c\propto T^d$.我们也把计算出的临界温度与文献[11]的结果做了比较,对于二维和三维情况我们有相同的结果[7—9],而在一维情况下,由于 $g_1(1)$发散,需单独考虑.

[1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R *et al* 1995 *Science* **269** 198;Davism K B, Mewes M O, Andrews M R *et al* 1995 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **75** 3969

[2] Görlitz A, Vogels J M *et al* 2001 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **87** 130402

[3] Schreck J ,Khaykovich L, Corwin K L *et al* 2001 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **87** 80403

[4] Ott H, Fortagh J, Schlotterbeck G *et al* 2001 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **87** 230401;Hänsel W, Hommelhoff P, Hänsch T W *et al* 2001 *Nature* **413** 501

[5] Hohenberg P C 1967 *Phys*. *Rev*. A **158** 383

[6] Bagnato V, Klepper D 1991 *Phys*. *Rev*. A **44** 7439

[7] Yi X X, Wang H J, Sun C P 1998 *Physica Scripta* **57** 324

[8] Yi X X, Su J C 1999 *Physica Scripta* **60** 117

[9] Yi X X 1999 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **48** 995 (in Chinese)[衣学喜 1999 物理学报 **48** 995]

[10] Li M Z *et al* 1999 *Phys*. *Rev*. A **60** 4168

[11] Chou T T, Yang C N, Yu L H 1996 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **53** 4257

Low-dimensional Bose-Einstein condensation in finite-number trapped atoms

Cui Hai-Tao† Wang Lin-Cheng Yi Xue-Xi

(*Institute of Theoretical Physics*, *Northeast Normal University*, *Changchun* 130024, *China*)

(Received 26 March 2003; revised manuscript received 23 April 2003)

Abstract

The effect of finite number of trapped atoms is discussed in Bose-Einstein condensation without interaction, according to Thomas-Fermi approximation. We obtain the state density by high-temperature expansion and calculate the critical temperature in one-dimensional (1D) and two-dimensional (2D) trap potentials. Then the temperature dependence of specific heat are analyzed. The results show that: in 2D case, the specific heat c is proportional to T^2; in 1D case, c increases linearly with temperature.

Keywords: Bose-Einstein condensation, finite number, low dimensional trap potential, Thomas-Fermi approximation

PACC: 0530J, 6460

† E-mail: cuiht660@nenu.edu.cn