第 53 卷 第 4 期 2004 年 4 月
1000-3290/2004/53(04)/0996-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53,No.4,April,2004

ENSO 非线性模型的摄动解*

莫嘉琪†
(安徽师范大学数学系,芜湖 241000)
林万涛
(中国科学院大气物理研究所,北京 100029)
(2003 年 6 月 6 日收到;2003 年 7 月 9 日收到修改稿)

研究了一类 ENSO 摄动模型.利用摄动理论和方法,构造了相应问题的渐近展开式.

关键词:非线性,摄动,ENSO 模型
PACC:0545

南方涛动和 El Niño/La Niño(厄尔尼诺/拉尼娜)分别是发生在热带大气和海洋中的异常事件.描述这种循环气候的现象,被称为 ENSO.ENSO 事件是影响全球气候表象大尺度的海洋-大气耦合系统,它是一个复杂的非线性系统,它的发生严重地影响全球各地区气候和生态等方面的变化,全球的经济发展和人类生活都会受到严重的影响,并带来许多灾害.因此对它的规律和预防的研究,为当前国际学术界所关注.许多学者用不同的方法对它的局部和整体性态作了多方位的研究,如自忆性原理[1]、Fokker-Plank 方程方法[2]、高阶奇异谱分析[3]和可预报性的研究,在边界激变现象、不确定性的自适应控制、多种同步法及扰动情形下的研究等[4—11].

非线性摄动理论和方法在国际学术界的研究中是一个十分热门的对象[12].许多学者[13—18]对此做了大量的工作.作者也作了一类常微分方程非线性奇摄动边值问题[19,20]、反应扩散问题[21—23]、椭圆型边值问题[24,25]、双曲型初始边值问题[26]、非线性方程奇摄动问题的冲击层解[27,28]、生物数学问题[29]等工作.

本文是讨论一类大气物理中海-气现象的 ENSO 模型,在一定的条件下,从数学理论的角度研究出对应的系统本身的不稳定性,并利用摄动理论和方法较简捷地得到了相应非线性问题解组的任意次近似的渐近展开式,并证明了它的一致有效性.

考虑如下没有随机噪声影响下的 ENSO 系统[4]:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=a_1T-a_2\mu h+\sqrt{2/3}\,T(T-\mu h)-2T^3,\qquad(1)$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=b(2h-T)-2h^3,\qquad(2)$$

式中 T 为海表温度距平 SST,h 为温跃层厚度,系数 $a_1=\Delta\bar{T}'_z+\Delta\bar{T}'_x-\alpha'_s$,$a_2=\Delta\bar{T}'_x$($\Delta\bar{T}'_z$,$\Delta\bar{T}'_x$ 为无量纲基本状态参数,α'_s 为 SST 非正规的 Newton 冷却系数),b 为有关气-海函数的无量纲数,而系数 μ 为量度温跃层位移效应的数,在本文中我们仅考虑它为正的小参数.在这种情形下,我们将用摄动理论和方法来得到系统(1),(2)的渐近解.

由于在实测中 $a_1<0$,$b>0$,不难算得,(1),(2)式对应的线性系统,当 μ 为足够小时,对应的奇点为不稳定鞍点,其零解是不稳定的.而非线性系统(1),(2)相应的非线性项为($\sqrt{2/3}\,T(T-\mu h)-2T^3$,$-2h^3$),不难判定其零解仍为不稳定的.

设

$$T\sim\sum_{i=0}^{\infty}T_i\mu^i,\qquad h\sim\sum_{i=0}^{\infty}h_i\mu^i,\qquad(3)$$

将(3)式代入(1),(2)式,令 $\mu=0$,得

$$\frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}t}=a_1T_0+\sqrt{2/3}\,T_0^2-2T_0^3,\qquad(4)$$

* 国家自然科学基金重大项目(批准号:90211004)和中国科学院"百人计划"资助的课题.

† E-mail:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

$$\frac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}t} = b(2h_0 - T_0) - 2h_0^3. \tag{5}$$

同样可判定，非线性系统(4)，(5)的零解也是不稳定的．又由于系统(4)，(5)的特殊性，容易用初等方法可求得其解$(T_0(t), h_0(t))$．并且这组解当$t \to +\infty$时，在对应的相平面上，其轨线远离原点．这和非线性系统(1)，(2)的解的性态一致．

为了求得原问题(1)，(2)的更高阶近似，将(3)式代入(1)，(2)式后，合并$\mu^i, i = 1,2,\cdots$的同次幂，并使方程两端同次幂的系数相等，对$i = 1,2,\cdots$得

$$\frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}t} = (a_1 + 2\sqrt{2/3}T_0 - 6T_0^2)T_i + F_i, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}h_i}{\mathrm{d}t} = (2(b + 3h_0^2)h_i - bT_i) + G_i, \tag{7}$$

式中F_i, G_i均为$T_j, G_j (j \leqslant i-1)$逐次已知的函数，其结构从略．由线性问题(6)，(7)，可以依次求出解组$(T_i, h_i), i = 1,2,\cdots$．于是由(3)式得到原问题(1)，(2)解的形式渐近展开式．

下面来证明相应的展开式关于μ的一致有效性．

设

$$U_m = \sum_{i=0}^{m} T_i\mu^i, \quad V_m = \sum_{i=0}^{m} h_i\mu^i, \tag{8}$$

且令

$$R_T = T - U_m, \quad R_h = h - V_m.$$

再由(1)，(2)式，利用中值定理，在有限的时间区间$[0, t_0]$内我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}R_T}{\mathrm{d}t} - a_1R_T + a_2\mu R_h \\
&= -\frac{\mathrm{d}U_m}{\mathrm{d}t} + a_1U_m - a_2\mu U_m + \sqrt{2/3} \\
&\quad \times [(U_m + R_T)(U_m + R_T - \mu V_m - \mu R_h) \\
&\quad - 2(U_m + R_T)^3] \\
&= \left[-\frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}t} + a_1T_0 + \sqrt{2/3}T_0^2 - 2T_0^3\right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m}\left[-\frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}t} + (a_1 + 2\sqrt{2/3}T_0 - 6T_0^2)T_i + F_i\right]\mu^i \\
&\quad + \sqrt{2/3}[(U_m + R_T)(U_m + R_T - \mu V_m - \mu R_h) \\
&\quad - 2(U_m + R_T)^3] + \sqrt{2/3}[U_m(U_m - \mu V_m) - 2U_m^3] \\
&\quad + O(\mu^{m+1}) \\
&= \sqrt{2/3}[(U_m + \theta_1R_T)(U_m + \theta_1R_T \\
&\quad - \mu V_m - \mu\theta_1R_h) - 2(U_m + \theta_1R_T)^3] \\
&\quad \times (R_T + \mu R_h) + O(\mu^{m+1}), \\
&\qquad\qquad 0 < \theta_1 < 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}R_h}{\mathrm{d}t} - b(2R_h - R_T) \\
&= -\frac{\mathrm{d}V_m}{\mathrm{d}t} + b(2V_m - U_m) - 2(V_m + R_h)^3 \\
&= \left[-\frac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}t} + b(2h_0 - T_0) - 2h_0^3\right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m}\left[-\frac{\mathrm{d}h_i}{\mathrm{d}t} + (2(b - 3h_0^2)h_i - T_i) + G_i\right]\mu^{m+1} \\
&\quad - 2(V_m + R_h)^3 + 2V_m^3 + O(\mu^{m+1}) \\
&= -2(V_m + \theta_2R_h)^3R_h + O(\mu^{m+1}), \\
&\qquad\qquad 0 < \theta_2 < 1.
\end{aligned}$$

再由不动点原理[12]，问题(1)，(2)在相应的初始状态下存在解组$(T(t), h(t))$，并在任意有限时间段$[0, t_0]$内，关于μ有如下一致有效的渐近展开式成立：

$$T(t) = \sum_{i=0}^{m} T_i\mu^i + O(\mu^{m+1}),$$

$$h(t) = \sum_{i=0}^{m} h_i\mu^i + O(\mu^{m+1}).$$

---

[1] Feng G L *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1181 (in Chinese)[封国林等 2002 物理学报 **51** 1181]

[2] Liu S K *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 10 (in Chinese)[刘式适等 2002 物理学报 **51** 10]

[3] Zhang J S，Xiao X C 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1221 (in Chinese)[张家树、肖先赐 2000 物理学报 **50** 1221]

[4] Feng G L *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 606 (in Chinese)[封国林等 2001 物理学报 **50** 606]

[5] Wang B *et al* 1999 *J*. *Atmos*. *Sci*. **56** 5

[6] Guan X P *et al* 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 276 (in Chinese)[关新平等 2003 物理学报 **52** 276]

[7] Guan X P *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1670 (in Chinese)[关新平等 2001 物理学报 **50** 1670]

[8] Hong L，Xu J X 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 612(in Chinese)[洪灵、徐健学 2001 物理学报 **50** 612]

[9] Chen S H *et al* 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 233

[10] Li Z，Han C Z 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 9

[11] Lü J H，Zhang S C 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 12

[12] de Jager E M, Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North-Holland Publishing Co.)

[13] O'Malley R E Jr 2000 *J. Math. Anal. Appl.* **242** 18

[14] Butuzov V F *et al* 2001 *J. Differential Equations* **169** 373

[15] Kelley W G 2001 *J. Math. Anal. Appl.* **255** 678

[16] Hamouda M 2002 *Applicable Anal.* **81** 837

[17] Bell D C, Deng B 2003 *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **3-4** 515

[18] Adams K L *et al* 2003 *J. Engineering Math.* **45** 197

[19] Mo J Q 1993 *J. Math. Anal. Appl.* **178** 289

[20] Mo J Q 1999 *J. Sys. Sci. Math. Scis.* **12** 55

[21] Mo J Q 1989 *Science in China* A **32** 1306

[22] Mo J Q, Feng M C 2001 *Acta Math. Sci.* B **21** 254

[23] Mo J Q 2001 *Acta Math. Appl. Sin.* **17** 255

[24] Mo J Q, Shao S 2001 *Adv. Math.* **30** 141

[25] Mo J Q, Ouyang C 2001 *Acta Math. Sci.* B **21** 93

[26] Mo J Q 2001 *Acta Math. Appl. Sin.* **17** 469

[27] Mo J Q, Wang H 2002 *Progress in Natural Sci.* **12** 945

[28] Mo J Q *et al* 2003 *Progress in Natural Sci.* **13** 768

[29] Mo J Q, Wang H 2002 *J. Biomathematics* **17** 143

Perturbed solution for the ENSO nonlinear model

Mo Jia-Qi

(*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu* 241000, *China*)

Lin Wan-Tao

(*Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100029, *China*)

(Received 6 June 2003; revised manuscript received 9 July 2003)

Abstract

A class of ENSO perturbed model is studied. Using the perturbation theory and method, the asymptotic expansions of solution of corresponding problem are constructed.

Keywords: nonlinear, perturbation, ENSO model

PACC: 0545

* Project supported by the Major Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 90211004), and the "Hundred Talents Program" of Chinese Academy of Sciences.