第 53 卷 第 4 期 2004 年 4 月
1000-3290/2004/53(04)/1157-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.4, April, 2004

沟道效应的运动阻尼与系统走向混沌的临界特征*

罗诗裕 谭永明 邵明珠 韦洛霞 邓立虎

(东莞理工学院,东莞 523106)

(2003 年 6 月 16 日收到; 2003 年 8 月 26 日收到修改稿)

利用正弦平方势,把粒子运动方程化为具有运动阻尼和周期调制的摆方程.利用 Melnikov 方法分析了系统的全局分叉和混沌行为,指出了沟道辐射本底增强和沟道效应的无规行为与混沌之间的相关性.

关键词:沟道效应,摆方程,分叉,混沌

PACC:6180

1. 引 言

人们在研究带电粒子面沟道辐射或沟道效应时,常常假设带电粒子与晶体之间的相互作用势是平面连续势,而且假设粒子运动无阻尼.于是,粒子运动方程是一个无阻尼的非线性微分方程,是一个不显含时间的自治系统.

注意到晶体的特点是晶格原子规则地排列在格点上,而外层(价)电子通常都游离在点阵之间(或沟道内部),因此我们可以认为占据格点的不再是原子而是带正电的离子.略去格点的不连续性,假设晶面与粒子的相互作用势是连续的、而且是平面的,这就是所谓平面连续势假设.在平面连续近似下,如果不考虑带电粒子与沟道内部电子的相互作用,则带电粒子(如正电子)在面沟道中的运动行为就像在两个带(正)电平面之间的运动一样,总是在中心平面附近振荡.正是这一假设成功地描述了很多实验现象,特别是在低能和小振幅情况下,这一假设能很好成立[1—4].注意到任何假设都是近似的,而人们的认识正是在这种不断近似中接近了事物的本质.本文将对这两条假设进行修正,进一步考察运动阻尼和非平面连续势对粒子运动的影响.

考虑到格点并不连续,特别是在高能(或者短波)情况下,粒子将感受到格点的不连续作用;或者粒子不是在单晶沟道,而是在层状周期晶格(如在超晶格多层薄膜结构)中运动时,平面连续势将受到晶格场或外场的周期调制[5].再考虑到沟道粒子与(游离在沟道内部的)外层电子的相互作用,或者由于沟道辐射引起的辐射阻尼也将使沟道粒子的能量不断损失.正是由于这些原因,粒子运动方程应当是一个具有周期力和阻尼作用的非线性微分方程.利用我们曾经提出的正弦平方势[6],运动方程可进一步化为具有外周期力和阻尼力的摆方程.该系统是一个典型的具有全局分叉和混沌行为的动力学系统[7—10].本文导出了无扰动系统的周期解、回转(或穿透)型周期解和分界线方程,利用 Melnikov 方法构造了这些轨道的 Melnikov 函数,并对这个系统通向混沌的临界条件进行了分析.结果表明,当粒子的阻尼大小与外场的调制强度满足一定关系时,系统处于临界状态.

值得注意的是,临界状态并不是一个稳定状态,系统可以通过不同途径进入混沌[11—13].事实上,沟道辐射本底的增强或沟道效应的无规现象,都与系统的混沌行为直接相关.

2. 粒子的运动阻尼

注意到在平面连续近似下,人们常常忽略了带电粒子与沟道内部电子之间相互作用,于是粒子运动方程是一个无阻尼方程,系统是一个保守系统.事实上,由于带电粒子与游离在沟道内部的电子之间相互作用,将不可避免地影响沟道辐射和沟道效应.假设带电粒子和电子之间的相互作用是纯粹的库仑碰撞,粒子和电子(云)之间只有能量或动量交换,其效果等效于粒子受到摩擦力或阻尼力作用.我们关

* 广东省科技发展计划(批准号:2003A1040312)资助的课题.

心的是粒子横向运动,在实验室坐标系中,阻尼力可表示为[12]

$$f_1(t) = -\mu m_0 \gamma \frac{dx}{dt}, \tag{1}$$

式中

$$\mu = \frac{4\pi n_e e^4 Z_1 Z_2}{\gamma^2 m_e m_0 (v^*)^3} L. \tag{2}$$

这里 Z_1, Z_2 是粒子和电子的电荷数, e 是电子电荷, m_e 是电子质量, m_0 是粒子的静止质量, γ 是相对论因子, v^* 是粒子与电子的相对横向速度, n_e 是电子浓度, L 是库仑对数,且由公式

$$L = \ln(b_{max}/b_{min}) \tag{3}$$

给出.这里 b_{max} 和 b_{min} 是粒子和电子的最大和最小碰撞参数.最大碰撞参数由 Debye 长度 λ_D 给出,

$$b_{max} = \lambda_D = \sqrt{\frac{kT\gamma}{4\pi n_e e^2}} = 7.4 \times 10^2 (\gamma T/n_e)^{1/2}, \tag{4}$$

式中 k 是 Boltzmann 常数, T 是绝对温度.(4)式中 T 的单位是 eV, n_e 的单位是 cm^{-3}, b_{max} 的单位是 cm. 当电子和粒子对头碰撞时,可得最小碰撞参数

$$b_{min} \cong \frac{2Z_1 e^2}{m_e (v^*)^2} = \frac{2Z_1 e^2}{m_e c^2}\left(\frac{v^*}{c}\right)^{-2}, \tag{5}$$

式中 c 是光速.将(4)和(5)式代入(3)式,可得

$$L \cong \ln\left\{\lambda_D \left(\frac{v^*}{c}\right)^2 / (2Z_1 e^2/m_e c^2)\right\}. \tag{6}$$

对于 $T = 0.5$ eV, $\left(\frac{v^*}{c}\right) = 10^{-3}$, $\frac{n_e}{\gamma} = 10^9$ cm^{-3},(6)式化为

$$L \cong \ln(3 \times 10^4/Z_1). \tag{7}$$

令

$$\begin{aligned} r_e &= e^2/m_e c^2, \\ r_p &= e^2/E_0, \\ m &= AE_0, \\ j &= en_e\beta c, \\ \beta &= v/c, \end{aligned} \tag{8}$$

并代入(2)式,可得

$$\mu = \frac{4\pi r_e r_p j Z_1^2 L}{\gamma^2 eA\beta}\left(\frac{c}{v^*}\right)^3. \tag{9}$$

这里, v 是粒子运动速度, A 是粒子的原子量, $E_0 = m_0 c^2$ 是粒子静止质量; r_e 和 r_p 是电子和质子的经典半径.将(9)式代入(1)式,可把运动阻尼化为

$$f_1(t) = -\eta_1 \frac{dx}{dt}, \tag{10}$$

式中

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \mu m, \\ m &= m_0 \gamma. \end{aligned} \tag{11}$$

3. 正弦平方势和粒子运动方程

根据牛顿第二定律,粒子运动方程可表示为[15,16]

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \eta_1 \frac{dx}{dt} + \frac{d}{dx}V(x) = f(t), \tag{12}$$

式中 $m = m_0\gamma$ 是粒子质量, $V(x)$ 是粒子-晶体相互作用势.利用我们曾经提出过的正弦平方势[6],可将它表示为

$$V(x) = K\beta_1 \sin^2(\pi x/d_p), \tag{13}$$

式中 β_1 是势参数,

$$K = \pi Z_1 Z_2 e^2 N d_p^2. \tag{14}$$

其中 d_p 是晶面间距, Nd_p^2 是晶体原子的面密度, Z_2 是晶体原子的电荷数.注意到晶格场的周期性或外场的周期调制,比如将超晶格'折沟道'势作傅里叶展开,并取 $n = 1$ 的项,即可把调制函数表示为[5]

$$f(t) = f_0 \sin \omega t, \tag{15}$$

式中假设了初相位为零,而 f_0 是外场调制振幅, ω 是调制频率.令

$$\begin{aligned} \xi &= 2\pi x/d_p, \\ \tau &= \frac{2\delta^{1/2}}{d_p} t, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \delta &= 2\pi^2 K\beta_1/(pvd_p^2), \\ p &= mv, \\ \alpha &= \mu/\delta^{1/2}, \\ \beta_2 &= f_0/\delta, \\ \Omega &= \omega/(v\delta^{1/2}), \end{aligned} \tag{17}$$

则方程(12)可化为

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \sin\xi = -\alpha\frac{d\xi}{d\tau} + \beta_2 \sin\Omega\tau, \tag{18}$$

式中 α, $\beta_2 > 0$,且为小量.方程(18)是一个具有外周期力和阻尼力作用的摆方程.

4. 系统的全局分叉与混沌行为

4.1. 无扰动系统的相平面特征

考虑方程(18)的无扰动情形

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \zeta, \\ \dot{\zeta} &= -\sin\xi. \end{aligned} \tag{19}$$

方程(19)描述了系统(18)的基本特征,相应的

Hamiltonian 量为

$$h = \frac{\zeta^2}{2} + (1 - \cos \xi). \tag{20}$$

根据 h 的大小,相平面上的轨道可分为三类.

(1) 异宿轨道 $h = 2$. 把相平面分为两个区域,相应的解记为 Π^s,且可表示为

$$\begin{aligned} \xi &= \pm 2 \arcsin(\mathrm{th}\tau), \\ \zeta &= \pm 2 \operatorname{sech} \tau, \end{aligned} \tag{21}$$

式中 $\pm$ 号分别对应上、下平面的两条异宿轨道,粒子沿这条轨道运动的周期 T^s 为无穷.

(2) 振荡型周期轨道 $0 < h < 2$. 用符号 Π^0 表示,且有

$$\begin{aligned} \xi &= 2 \arcsin(\kappa \ \mathrm{sn}\ \tau), \\ \zeta &= 2\kappa \ \mathrm{cn}\ \tau, \end{aligned} \tag{22}$$

式中 $\kappa = h/2$, $\mathrm{sn}\ \tau$ 和 $\mathrm{cn}\ \tau$ 是 Jacobian 椭圆函数,粒子沿轨道(22)式的运动周期

$$T^0 = 4\mathrm{K}(\kappa), \tag{23}$$

式中 $\mathrm{K}(\kappa)$是第一类椭圆积分. 当 h 单调增加时,周期 T^0 从 2π 增加到无穷.

(3) 回转型周期轨道 $h > 2$. 用符号 Π^r 表示,且可表示为

$$\xi = \pm 2 \arcsin\left(\mathrm{sn} \frac{\tau}{\kappa'} \right), \tag{24}$$

$$\zeta = \pm \frac{2}{\kappa} \ \mathrm{dn} \frac{\tau}{\kappa'}, \tag{25}$$

式中 $\kappa' = 2/h$, $\mathrm{dn}\tau$ 为 Jacobian 椭圆函数,粒子沿轨道(24),(25)式的运动周期

$$T^r = 2\kappa' \mathrm{K}(\kappa').$$

当 h 单调减少时,周期 T^r 由零增加到无穷.

4.2. 异宿轨道的 Melnikov 函数

现在考察扰动系统(18),并构造和计算异宿轨道(21)式的 Melnikov 函数[7-9]

$$\begin{aligned} M^{\pm}(\tau_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\tau)[-\alpha\zeta + \beta_2 \sin \Omega(\tau + \tau_0)] \mathrm{d}\tau \\ &= 8\alpha \pm 2\pi\beta_2 \operatorname{sech}(\Omega\pi/2) \sin \Omega\tau_0. \end{aligned} \tag{26}$$

系统的混沌临界值可表示为

$$|\beta_{2c}^{\pm}| = \pm \frac{4\alpha}{\pi} \mathrm{ch}(\Omega\pi/2). \tag{27}$$

当 $|\beta_2| > |\beta_{2c}^{+}|$ 时, $M^{+}(\tau_0)$ 有简单零点,因此,在 Poincare 截面上双曲不动点的上支稳定流形与不稳定流形出现横截异宿交点,意味着系统(18)将出现 Smale 马蹄.

当 $|\beta_2| = |\beta_{2c}^{+}|$ 时, $M^{+}(\tau_0)$ 有二阶零点,满足(27)式的参数$(\alpha, \beta_2, \Omega)$为稳定流形与不稳定流形发生二次异宿相切的参数值.

当 $|\beta_2| < |\beta_{2c}^{+}|$ 时, $M^{+}(\tau_0)$ 无简单零点,即双曲不动点的上支稳定流形与不稳定流形永不相交,扰动系统(18)无 Smale 马蹄.

对于(27)式中取负号情形,可类似地讨论.

4.3. 次谐振荡的 Melnikov 函数

由方程(18)和(22)可构造和计算如下形式的次谐 Melnikov 函数[12]:

$$M^{m/n}(\tau_0) = \int_0^{nT^0} \zeta^{\pm}(\tau)[-\alpha\zeta + \beta_2 \sin \Omega(\tau + \tau_0)] \mathrm{d}\tau \tag{28}$$

$$= \begin{cases} 16(\mathrm{E} - \kappa'^2 K)\alpha & (n > 1, m \text{ 为偶数}), \\ 16(\mathrm{E} - \kappa'^2 K)\alpha + 4\pi\beta_2 \operatorname{sech} \Omega K' \sin \Omega\tau_0 & (n = 1, m \text{ 为奇数}). \end{cases} \tag{29}$$

鉴于 $\alpha \neq 0$ 时,恒有 $M^{m/n}(\tau_0) \neq 0$. 因此,只考虑 $n = 1$, m 为奇数的情况. 定义 m 阶次谐分叉的混沌临界值

$$|\beta_{2c}(m)| = \frac{4\alpha}{\pi}(\mathrm{E} - \kappa'^2 K)\alpha \ \mathrm{ch}\ \Omega K', \tag{30}$$

式中 E 是第二类椭圆积分,而 $K' = \mathrm{K}(\kappa')$.

当 $|\beta_2| > |\beta_{2c}(m)|$ 时, $M^{m/1}(\tau_0)$ 有两个简单零点,扰动系统(18)有两个振荡型次谐波解,其中一个为鞍点型,另一个为结点型.

当 $|\beta_2| = |\beta_{2c}(m)|$ 时, $M^{m/1}(\tau_0)$ 有两阶零点,满足方程(30)的参数$(\alpha, \beta_2, \Omega)$应为 m 阶振荡型次谐波鞍结分叉值.

当 $|\beta_2| < |\beta_{2c}(m)|$ 时, $M^{m/1}(\tau_0)$ 无零点,扰动系统(18)不存在 m 阶振荡型次谐波解.

4.4. 回转型周期轨道的 Melnikov 函数

让我们考察具有周期为 $T_2(\kappa) = \dfrac{2\pi m}{\Omega n}$ 的回转型

周期轨道(24)和(25)式.构造并计算出它的 Melnikov 函数[12]

$$M_{\pm}^{m/n}(\tau_0) = \int_0^{nT_2} \zeta^{\pm}(\tau)[-\alpha\zeta^{\pm}(\tau) + \beta_2 \sin\Omega(\tau+\tau_0)]\mathrm{d}\tau \tag{31}$$

$$= \begin{cases} 8n\mathrm{E}\kappa^{-1}\alpha & (n>1, m\ \text{为自然数}), \\ 8\mathrm{E}\kappa^{-1}\alpha \pm 2\pi\beta_2 \,\mathrm{sech}\,\Omega\kappa K' \sin\Omega\tau_0 & (n=1, m\ \text{为自然数}). \end{cases} \tag{32}$$

定义一个混沌临界值

$$|\beta_{2c}^{\pm}(m)| = \left|\frac{4\mathrm{E}}{\kappa\pi}\right| \mathrm{ch}\,\Omega\kappa K'. \tag{33}$$

当

$$|\beta_2| > |\beta_{2c}^{+}(m)|,$$

$M_{\pm}^{m/n}(\tau_0)$有两个简单零点,扰动系统(18)有两个位于双曲不动点上方的 m 阶回转型次谐波鞍结分叉值.

当

$$|\beta_2| = |\beta_{2c}^{+}(m)|,$$

$M_{\pm}^{m/n}(\tau_0)$有两阶零点,从而满足(33)式的参数(α,β_2,Ω)为不动点上方的 m 阶回转(穿透)型次谐波鞍结分叉值.

当

$$|\beta_2| < |\beta_{2c}^{+}(m)|,$$

$M_{\pm}^{m/n}(\tau_0)$无零点,因此扰动系统(18)不存在双曲不动点上方的 m 阶回转(穿透)型次谐波解.

对于(33)式取负号情形可类似地讨论.

5. 结果和讨论

沟道效应和沟道辐射的主要特征决定于沟道粒子的运动行为. $0<h<2$ 描述了沟道粒子的行为,$h>2$描述了准沟道粒子的行为.具有弱阻尼的沟道粒子,在外场作用下可先后在相柱面上出现两个 Smale 马蹄,出现振荡型奇阶次谐分叉和回转型次谐分叉.由(28)和(29)式可以看出,当外场的振幅大于临界振幅时,系统将经过无限次分叉进入混沌状态,使沟道辐射的本底增加.事实上,实验发现当选用不同的晶体来研究时,发现沟道辐射本底各不相同,这除了人们关心的几种因素(如晶体结构、晶格振动和电子多重散射等)外,与沟道辐射的混沌行为是直接相关的[3,4].

[1] Luo S Y, Shao M Z 1988 *Acta Phys. Sin.* **37** 1278 (in Chinese) [罗诗裕、邵明珠 1988 物理学报 **37** 1278]

[2] Luo S Y, Ma R K 2002 *Nucl. Phys. Rev.* **19** 407 (in Chinese) [罗诗裕、马如康 2002 原子核物理评论 **19** 407]

[3] Korol A, Solovyov A V, Greiner W 1998 *J. Phys. G* **24** L45

[4] Korol A, Solovyov A V, Greiner W 1999 *Int. J. Mod. Phys.* E **8** 49

[5] Luo S Y, Lin J F, Shao M Z *et al* 2003 *Nucl. Phys. Rev.* **20** 55 (in Chinese) [罗诗裕、林钧锋、邵明珠等 2003 原子核物理评论 **20** 55]

[6] Luo S Y 1984 *Chin. Phys.* (USA) **4** 670

[7] Shao M Z 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 1825 (in Chinese) [邵明珠 1992 物理学报 **41** 1825]

[8] Luo S Y, Shao M Z 1988 *Radiation Effects Express* **1** 239

[9] Luo S Y, Shao M Z, Tang J N *et al* 1988 *Acta Phys. Sin.* **37** 1394 (in Chinese) [罗诗裕、邵明珠、唐建宁等 1988 物理学报 **37** 1394]

[10] Luo S Y, Liu Z R, Shao M Z 1985 *Chin. J. Semicond.* **6** 82 (in Chinese) [罗诗裕、刘曾荣、邵明珠 1985 半导体学报 **6** 82]

[11] Luo S Y 1985 *Appl. Math. Mech.* **6** 499 (in Chinese) [罗诗裕 1985 应用数学和力学 **6** 499]

[12] Shao M Z, Luo S Y, Hofmann I 1990 *Acta Phys. Sin.* **39** 1189 (in Chinese) [邵明珠、罗诗裕、Hofmann I 1990 物理学报 **39** 1189]

[13] Shao M Z, Luo S Y, Hofmann I 1990 *Acta Phys. Sin.* **39** 1200 (in Chinese) [邵明珠、罗诗裕、Hofmann I 1990 物理学报 **39** 1200]

[14] Shao M Z, Luo S Y, Hofmann I 1990 *Acta Phys. Sin.* **39** 1207 (in Chinese) [邵明珠、罗诗裕、Hofmann I 1990 物理学报 **39** 1207]

[15] Luo S Y, Shao M Z, Zhou X F 2003 *Chin. J. Semicond.* **24** 513 (in Chanese) [罗诗裕、邵明珠、周小方 2003 半导体学报 **24** 513]

[16] Shao M Z 1993 *Chin. J. Semicond.* **14** 353 (in Chanese) [邵明珠 1993 半导体学报 **14** 353]

Motion damping in channelling effects and the chaotic behaviour of a system*

Luo Shi-Yu Tan Yong-Ming Shao Ming-Zhu Wei Luo-Xia Deng Li-Hu

(*Dongguan University of Technology*, *Dongguan* 523106, *China*)

(Received 16 June 2003; revised manuscript received 26 August 2003)

Abstract

The equation of motion of particles has been reduced to the pendulum equation with a damping term and a forced term by using the sine-squared potential. The global bifurcation and chaotic behaviours have been analysed using Melnikov technique, and it is shown that the enhancement of the radiation background and the random phenomenon of the channelling efect are related to chaotic behaviours of the system.

Keywords: channelling effect, pendulum equation, bifurcation, chaos

PACC: 6180

* Project supported by the Science and Technology Development Program of Guangdong Province, China (Grant No. 2003A1040312).