

# 磁场对介观耦合金属环中持续电流的影响\*

嵇英华<sup>1,2)</sup> 刘咏梅<sup>3)</sup> 辛建之<sup>1)</sup> 谢芳森<sup>1,2)</sup> 雷敏生<sup>1,2)</sup>

<sup>1)</sup> 江西师范大学物理与通信电子学院, 南昌 330027)

<sup>2)</sup> 江西省光电子与通信重点实验室, 南昌 330027)

<sup>3)</sup> 江西师范大学数学与信息科学学院, 南昌 330027)

(2003 年 3 月 19 日收到, 2003 年 8 月 11 日收到修改稿)

在考虑电荷是量子化的基础上, 研究了外加磁场对介观耦合金属环中持续电流的影响. 结果表明: 由于存在耦合, 介观金属环中总是存在附加的持续电流, 附加的持续电流与电路参数及耦合系数有关. 当外加磁通量按正弦规律变化时, 介观耦合金属环中出现倍频与分频效应.

关键词: 介观耦合金属环, 持续电流, 磁场

PACC: 7335, 7335C

## 1. 引 言

在介观系统中, 由于电子波函数的相位相干性, 导致出现库仑阻塞、巨磁电阻效应等许多新奇的物理现象. 实验结果已证实: 当外加磁场作用于介观尺度的一维非超导金属环中时, 金属环中将存在由磁场诱导的持续电流, 并且此持续电流的大小将随通过环的磁通量的变化而作周期性振荡<sup>[1-4]</sup>. 人们对与持续电流相关的物理特性相继进行了一系列研究, 包括从单通道环推广到多通道环、温度效应、无序的影响、弹性散射与非弹性散射的不同作用、不同的系综平均及其区别、电子关联效应等等.

在介观尺度下, 不仅要考虑电子相位的相干性, 而且必须考虑电荷的量子化效应. 近几年来, 人们在考虑电荷量子化效应的基础上, 研究了介观电路中的库仑阻塞现象、电子的隧道贯穿、电荷与电流的量子涨落等<sup>[5-16]</sup>. 在本文中, 我们基于电荷是量子化的基本事实, 给出了一种介观互感耦合金属环的量子化方案. 计算了两个金属环中由磁场诱导出的持续电流, 着重研究了外加磁场和耦合因素对金属环中持续电流的影响. 结果表明: 在磁场作用下, 金属环中的持续电流总是存在由耦合效应引起的直流分量. 当外加磁场随时间作正弦规律变化时, 持续电流

中出现多频率的交变分量, 此时介观耦合金属环中出现倍频、分频效应.

## 2. 量子化方案

对于坐标是连续变化的物理系统, 按照正则量子化的方法, 当由经典力学过渡到量子力学时, 需把相应的物理量看成算符. 因而, 对于一个介观电路系统 (例如介观 LC 电路), 如果把电荷视作连续变化的, 则电荷  $q$  与共轭变量广义电流  $p$  等物理量看成为相应算符的方案为

$$q \rightarrow \hat{q}, \quad p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}.$$

算符  $\hat{q}$  与  $\hat{p}$  是一对线性厄米共轭算符, 它们满足正则对易关系

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar.$$

考虑到电荷是量子化的, 电荷算符  $\hat{q}$  的本征值应该是分立的, 即应该满足本征方程

$$\hat{q}|q\rangle = mq_e|q\rangle,$$

式中  $m$  为整数,  $q_e$  为基本电荷, 即  $q_e = 1.602 \times 10^{-19} \text{C}$ ,  $|q\rangle$  代表相应的本征态. 在此基础上, 电荷  $q$  与共轭变量广义电流  $p$  的量子化过程应改变为<sup>[17,18]</sup>

$$q \rightarrow \hat{q}, \quad p \rightarrow \frac{2\hbar}{q_e} \sin\left(\frac{q_e}{2\hbar}\hat{p}\right). \quad (1)$$

基于 (1) 式的量子化方法, 我们研究两个有互感

\* 江西省自然科学基金 (批准号 0212018) 资助的课题.

效应的介观金属环(图1).环1和环2电感系数分别

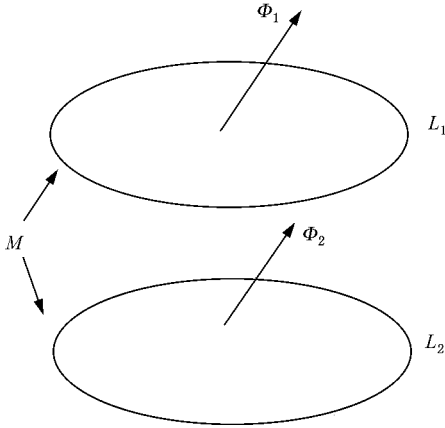


图1 介观耦合金属环示意图

为  $L_1, L_2$ ; 互感系数为  $M$ , 定义

$$M = k \sqrt{L_1 L_2},$$

式中  $k$  为耦合系数, 且  $0 \leq k \leq 1$ . 若将介观金属环系统放在外加磁场中, 穿过每个环的外加磁通量分别是  $\Phi_1, \Phi_2$ , 则系统的 Hamilton 量为

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{2\hbar^2}{(1-k^2)q_e^2} \left[ \frac{1}{L_1} \sin^2\left(\frac{q_e \hat{p}_1}{2\hbar}\right) + \frac{1}{L_2} \sin^2\left(\frac{q_e \hat{p}_2}{2\hbar}\right) \right. \\ & \left. + \frac{2k}{\sqrt{L_1 L_2}} \sin\left(\frac{q_e \hat{p}_1}{2\hbar}\right) \sin\left(\frac{q_e \hat{p}_2}{2\hbar}\right) \right] \\ & + (\hat{q}_1 \dot{\Phi}_1 + \hat{q}_2 \dot{\Phi}_2), \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $\hat{q}_1$  与  $\hat{q}_2$  分别是通过每个金属环的电量. 根据海森伯的算符运动方程,

$$\dot{X} = \frac{1}{i\hbar} [X, \hat{H}],$$

式中  $X \in (q, p)$ . 由系统的 Hamilton 量, 我们能够得到

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{q}_1}{dt} = & \frac{\hbar}{(1-k^2)q_e} \left[ \frac{1}{L_1} \sin\left(\frac{q_e \hat{p}_1}{\hbar}\right) \right. \\ & \left. + \frac{2k}{\sqrt{L_1 L_2}} \cos\left(\frac{q_e \hat{p}_1}{2\hbar}\right) \sin\left(\frac{q_e \hat{p}_2}{2\hbar}\right) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{q}_2}{dt} = & \frac{\hbar}{(1-k^2)q_e} \left[ \frac{1}{L_2} \sin\left(\frac{q_e \hat{p}_2}{\hbar}\right) \right. \\ & \left. + \frac{2k}{\sqrt{L_1 L_2}} \cos\left(\frac{q_e \hat{p}_2}{2\hbar}\right) \sin\left(\frac{q_e \hat{p}_1}{2\hbar}\right) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{d\hat{p}_1}{dt} = \frac{d\Phi_1}{dt}, \quad (5)$$

$$\frac{d\hat{p}_2}{dt} = \frac{d\Phi_2}{dt}. \quad (6)$$

### 3. 讨 论

由上述方程, 我们能够得到介观金属环中的持续电流. 首先, 我们研究介观金属环系统处在恒稳的外加磁场中, 穿过每个金属环中的磁通量保持不变, 即

$$\hat{p}_1 = \Phi_{10} + \hat{p}_{10},$$

$$\hat{p}_2 = \Phi_{20} + \hat{p}_{20},$$

式中  $\hat{p}_{10}, \hat{p}_{20}$  分别为  $t=0$  时两个金属环中的初始磁通量,  $\Phi_{10}, \Phi_{20}$  分别为穿过介观金属环1和金属环2与时间无关的外加磁通量. 由(3)–(6)式可得

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{q}_1}{dt} = & \frac{\hbar}{(1-k^2)q_e} \left\{ \frac{1}{L_1} \sin\left(\frac{q_e}{\hbar}(\Phi_{10} + \hat{p}_{10})\right) \right. \\ & \left. + \frac{k}{\sqrt{L_1 L_2}} \sin\left(\frac{q_e}{2\hbar}[(\Phi_{10} + \Phi_{20}) + (\hat{p}_{10} + \hat{p}_{20})]\right) \right. \\ & \left. - \frac{k}{\sqrt{L_1 L_2}} \sin\left(\frac{q_e}{2\hbar}[(\Phi_{10} - \Phi_{20}) + (\hat{p}_{10} - \hat{p}_{20})]\right) \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{q}_2}{dt} = & \frac{\hbar}{(1-k^2)q_e} \left\{ \frac{1}{L_2} \sin\left(\frac{q_e}{\hbar}(\Phi_{20} + \hat{p}_{20})\right) \right. \\ & \left. + \frac{k}{\sqrt{L_1 L_2}} \sin\left(\frac{q_e}{2\hbar}[(\Phi_{10} + \Phi_{20}) + (\hat{p}_{10} + \hat{p}_{20})]\right) \right. \\ & \left. + \frac{k}{\sqrt{L_1 L_2}} \sin\left(\frac{q_e}{2\hbar}[(\Phi_{10} - \Phi_{20}) + (\hat{p}_{10} - \hat{p}_{20})]\right) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

上述结果表明: 穿过每个环中的磁通量不仅诱导出了相应环中的持续电流, 而且由于耦合效应, 在相邻环中也诱导出了附加的持续电流; 当金属环之间无耦合时,  $k=0$ , 则附加的持续电流为零. 按照经典电磁场理论, 只有穿过闭合回路的磁通量发生变化时才可能在闭合回路中产生感应电流. 因此, 上述介观金属环中出现的持续电流是一种典型的量子效应. 在其他条件不变的情况下, 金属环之间的耦合越强, 即耦合系数  $k$  越大, 附加的持续电流也越大.

如果外加磁场按正弦规律变化, 我们不妨假设穿过每个金属环中的磁通量为

$$\Phi_1 = \Phi_{1H} \sin(\omega_1 t),$$

$$\Phi_2 = \Phi_{2H} \sin(\omega_2 t),$$

式中  $\Phi_{1H}$  和  $\Phi_{2H}$  分别为穿过金属环1和金属环2的外加磁通量的幅度,  $\omega_1$  和  $\omega_2$  为相应外加磁通量变化的频率. 由(3)和(6)式, 可得介观金属环1中的持续电流为

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{q}_1}{dt} = & \frac{\hbar}{(1-k^2)q_e} \left\{ \left[ \frac{1}{L_1} \sin\left(\frac{q_e}{\hbar}(\Phi_1 + \hat{p}_{10})\right) \right] \right. \\ & + \frac{k}{\sqrt{L_1 L_2}} \sin\left(\frac{q_e}{2\hbar}(\Phi_1 + \Phi_2) + (\hat{p}_{10} + \hat{p}_{20})\right) \\ & \left. - \frac{k}{\sqrt{L_1 L_2}} \sin\left(\frac{q_e}{2\hbar}(\Phi_1 - \Phi_2) + (\hat{p}_{10} - \hat{p}_{20})\right) \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

利用关系式

$$\sin(\alpha + Z \sin \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(Z) \sin(\alpha + m\varphi)$$

(其中  $J_m(Z)$  为  $m$  阶第一类贝塞尔函数) 进一步可得到

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{q}_1}{dt} = & \frac{\hbar}{(1-k^2)q_e} \left\{ \left[ \frac{1}{L_1} J_0\left(\frac{q_e \Phi_{1H}}{\hbar}\right) \sin\left(\frac{q_e}{\hbar} \hat{p}_{10}\right) \right] \right. \\ & + \frac{k}{\sqrt{L_1 L_2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m\left(\frac{q_e \Phi_{1H}}{2\hbar}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{q_e \Phi_{2H}}{2\hbar}\right) \\ & \times \sin[(m\omega_1 + n\omega_2)t + (\hat{p}_{10} + \hat{p}_{20})] \\ & - \frac{k}{\sqrt{L_1 L_2}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l\left(\frac{q_e \Phi_{1H}}{2\hbar}\right) \cdot \sum_{h=-\infty}^{\infty} J_h\left(\frac{q_e \Phi_{2H}}{2\hbar}\right) \\ & \left. \times \sin[(l\omega_1 - h\omega_2)t + (\hat{p}_{10} - \hat{p}_{20})] \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

方程 (10) 的右端第一项是由初始磁通量引起的持续电流, 为一直流分量. 一般而言, 对于一个理想的介观金属环, 电子自旋、杂质、无规力等因素共同作用下的初始磁通量很小, 故第一项表示直流持续电流很小. 因而, 我们在实验中难以测量到单环的持续电流. 方程 (10) 的右端第二、第三项代表的是附加电流, 其中总有一项是与时间无关附加的直流持续电流, 另外各项则是含有各种频率的交变电流, 是由互感耦合效应引起的. 如果金属环之间没有耦合效应, 各金属环中就没有附加的交变电流. 一般情况下, 各交变电流分量对时间的平均值为零. 然而, 如果外加磁通量的变化频率满足

$$m\omega_1 + n\omega_2 = 0,$$

$$l\omega_1 - h\omega_2 = 0$$

$$(m, n, l, h = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

则我们能够测量到的介观金属环中的持续电流不仅含有由各环自身初始磁通量引起的持续电流, 而且还存在另外一项由耦合效应引起的附加的直流持续电流. 介观金属环 1 中持续电流对时间的平均值为

$$\left\langle \frac{d\hat{q}_1}{dt} \right\rangle = \frac{\hbar}{(1-k^2)q_e} \left\{ \left[ \frac{1}{L_1} J_0\left(\frac{q_e \Phi_{1H}}{\hbar}\right) \sin\left(\frac{q_e}{\hbar} \hat{p}_{10}\right) \right] \right.$$

$$\begin{aligned} & + \frac{2k}{\sqrt{L_1 L_2}} J_0\left(\frac{q_e \Phi_{1H}}{2\hbar}\right) J_0\left(\frac{q_e \Phi_{2H}}{2\hbar}\right) \\ & \times \sin(\hat{p}_{20}) \cos(\hat{p}_{10}) \\ & + \frac{k}{\sqrt{L_1 L_2}} J_m\left(\frac{q_e \Phi_{1H}}{2\hbar}\right) J_{-n}\left(\frac{q_e \Phi_{2H}}{2\hbar}\right) \\ & \times \sin(\hat{p}_{10} + \hat{p}_{20}) \\ & - \frac{k}{\sqrt{L_1 L_2}} J_l\left(\frac{q_e \Phi_{1H}}{2\hbar}\right) J_h\left(\frac{q_e \Phi_{2H}}{2\hbar}\right) \\ & \left. \times \sin(\hat{p}_{10} - \hat{p}_{20}) \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\hat{q}_2}{dt} \right\rangle = & \frac{\hbar}{(1-k^2)q_e} \left\{ \left[ \frac{1}{L_2} J_0\left(\frac{q_e \Phi_{1H}}{\hbar}\right) \sin\left(\frac{q_e}{\hbar} \hat{p}_{10}\right) \right] \right. \\ & + \frac{2k}{\sqrt{L_1 L_2}} J_0\left(\frac{q_e \Phi_{1H}}{2\hbar}\right) J_0\left(\frac{q_e \Phi_{2H}}{2\hbar}\right) \\ & \times \sin(\hat{p}_{10}) \cos(\hat{p}_{20}) \\ & + \frac{k}{\sqrt{L_1 L_2}} J_m\left(\frac{q_e \Phi_{1H}}{2\hbar}\right) J_{-n}\left(\frac{q_e \Phi_{2H}}{2\hbar}\right) \\ & \times \sin(\hat{p}_{10} + \hat{p}_{20}) \\ & + \frac{k}{\sqrt{L_1 L_2}} J_l\left(\frac{q_e \Phi_{1H}}{2\hbar}\right) J_h\left(\frac{q_e \Phi_{2H}}{2\hbar}\right) \\ & \left. \times \sin(\hat{p}_{10} - \hat{p}_{20}) \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

显然, 只要各环之间存在耦合, 附加的直流持续电流就一定存在. 在多环耦合的情况下, 有类似的结果, 但要复杂得多.

## 4. 结 论

在介观尺度下, 电荷的量子化是我们研究介观系统量子特性的一个基本出发点. 通过考虑电荷的量子化效应, 我们研究了有耦合效应的介观金属环中的持续电流. 结果表明: 在外加磁场作用下, 介观金属环中的持续电流对时间的平均值总是存在由耦合效应引起的附加的直流持续电流. 另外, 由 (10) 式可以看出: 在随时间作正弦规律变化的外加磁场和耦合效应作用下, 介观金属环中出现含有各种频率的交变电流, 表现为倍频和分频现象. 利用选频技术, 我们能够采集到需要的频率信号. 这方面的工作有待进一步研究.

- [ 1 ] Buttiker M , Imry Y , Landauer R 1983 *Phys. Lett. A* **96** 365
- [ 2 ] Levy L P *et al* 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 2074
- [ 3 ] Chandrasekhar V *et al* 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 3578
- [ 4 ] Ye J F , Ye F , Ding G H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 468 ( in Chinese ) [ 叶剑斐、叶 飞、丁国辉 2003 *物理学报* **52** 468 ]
- [ 5 ] Li Y Q , Chen B 1996 *Phys. Rev. B* **53** 4027
- [ 6 ] Wang J S , Liu T K , Zhan M S 2002 *Phys. Lett. A* **276** 155
- [ 7 ] Ji Y H , Rao J P , Lei M S 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 395 ( in Chinese ) [ 嵇英华、饶建平、雷敏生 2002 *物理学报* **51** 395 ]
- [ 8 ] Ling R L 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2343 ( in Chinese ) [ 凌瑞良 1999 *物理学报* **48** 2343 ]
- [ 9 ] Fan H Y , Liang X T 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 174
- [ 10 ] Long C Y , Liu B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1011 ( in Chinese ) [ 龙超云、刘 波 2001 *物理学报* **50** 1011 ]
- [ 11 ] Ji Y H , Lei M S , Ouyang C Y 2002 *Chin. Phys.* **11** 163
- [ 12 ] Liang X T , Fan H Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 486
- [ 13 ] Gu Y J 2001 *Chin. Phys.* **10** 490
- [ 14 ] Chen B , Li Y Q *et al* 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 129 ( in Chinese ) [ 陈 斌、李有泉等 1997 *物理学报* **46** 129 ]
- [ 15 ] Wang X G , Pan S H 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 171
- [ 16 ] Wang Z Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1808 ( in Chinese ) [ 汪仲清 2002 *物理学报* **51** 1808 ]
- [ 17 ] Flores J C 2001 *Phys. Rev. B* **64** 235309
- [ 18 ] Flores J C *et al* 2002 *Phys. Rev. B* **66** 153410

## Influences of a magnetic field on the persistent currents of mesoscopic coupling metallic ring<sup>\*</sup>

Ji Ying-Hua<sup>1,2)</sup> Liu Yong-Mei<sup>3)</sup> Xin Jian-Zhi<sup>1)</sup> Xie Fang-Sen<sup>1,2)</sup> Lei Min-Sheng<sup>1,2)</sup>

<sup>1)</sup>( *Institute of Physics and Communicative Engineering , Jiangxi Normal University , Nanchang 330027 , China* )

<sup>2)</sup>( *Key Laboratory of Optoelectronic and Telecommunication of Jiangxi , Nanchang 330027 , China* )

<sup>3)</sup>( *Institute of Mathematics and Informatics , Jiangxi Normal University , Nanchang 330027 , China* )

( Received 19 March 2003 ; revised manuscript received 11 August 2003 )

### Abstract

Based on the discreteness of electric charge , the influences of an external magnetic field on the persistent current of the mesoscopic coupling metallic rings are investigated. The results obtained indicate that there is an additional persistent current in each mesoscopic metallic ring. The additional persistent currents are related to the circuit parameter and coupling coefficient. If the external magnetic flux varies according to sine law , the effect of double-frequency and division-frequency appears in these rings.

**Keywords :** mesoscopic coupling metallic rings , persistent current , magnetic field

**PACC :** 7335 , 7335C

<sup>\*</sup> Project supported by the Natural Science Foundation of Jiangxi Province , China ( Grant No. 0212018 ).