第 53 卷 第 5 期 2004 年 5 月
1000-3290/2004/53(05)/1280-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53,No.5,May,2004

含自旋轨道耦合的三维各向同性谐振子的四类升降算符

傅美欢[1)2)] 任中洲[1)]

[1)](南京大学物理系,南京 210008)

[2)](南京工业职业技术学院,南京 210007)

(2003 年 5 月 20 日收到;2003 年 7 月 29 日收到修改稿)

推导出了含自旋-轨道耦合的三维各向同性谐振子的升、降算符,给出了谐振子能级的分裂情况.

关键词:自旋-轨道耦合,谐振子,升、降算符

PACC:0365

1. 引 言

升、降算符方法可以用来处理中心力场中粒子的径向 Schrödinger 方程,考虑到多维中心力场能级的简并性,特别是 l 简并,需要引进多种升、降算符把同一个 Hamilton 量的相邻能量本征态联系起来.曾谨言等人已经解出了三维各向同性谐振子的四类升、降算符[1—3].在此基础上,本文进一步导出含自旋-轨道耦合的三维各向同性谐振子的四类升、降算符,在这些算符的作用下,给出了谐振子能级的分裂情况.包含自旋-轨道作用的三维谐振子问题有广泛的应用,核物理中它可以正确给出幻数和壳效应.当从 Dirac 方程过渡到 Schrödinger 方程时,也会出现自旋-轨道耦合项,所以包含耦合项是有意义的.

2. 含自旋-轨道耦合的三维各向同性谐振子的四类升、降算符

三维谐振子在势 $V(r)=\frac{1}{2}Kr^2$(K 为刻画位势强度的参量,在自然单位制下,$K=1$)作用下,如果考虑自旋-轨道耦合,Hamilton 量将会出现一项耦合项(Thomas 项)[4,5]

$$\xi(r)\,s\cdot l=\frac{1}{2}s\cdot l, \tag{1}$$

式中 $\xi(r)=\frac{1}{2r}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}=\frac{1}{2}$(本式也采用自然单位制,下同).在非相对论情况下,可选(H, l^2, j^2, j_z)为守恒量完全集,所以

$$\begin{aligned}
s\cdot l&=\frac{1}{2}(j^2-l^2-s^2)\\
&=\frac{1}{2}\Big[j(j+1)-l(l+1)-\frac{3}{4}\\
&=\begin{cases}\frac{1}{2}l, & j=l+\frac{1}{2},\\ -\frac{1}{2}(l+1), & j=l-\frac{1}{2}\qquad (l\geqslant 1),\end{cases}
\end{aligned}\tag{2}$$

则三维谐振子的径向方程可写为

$$H(l)\chi_l(r)=E\chi_l(r), \tag{3}$$

其中

$$H(l)=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{l(l+1)}{2r^2}+\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{2}G(l), \tag{4}$$

$$G(l)=\begin{cases}\frac{1}{2}l, & j=l+\frac{1}{2},\\ -\frac{1}{2}(l+1), & j=l-\frac{1}{2}\qquad (l\geqslant 1).\end{cases} \tag{5}$$

(3)式可改为

$$D(l)\chi_l(r)=\lambda_l\chi_l(r),\qquad \lambda_l=-2E,$$

$$D(l)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}-r_2-G(l)=-2H(l). \tag{6}$$

用因式分解的方法[1,2,6,7],可解出这时的两类角动量和能量的升、降算符

$$A_+(l)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-\frac{l+1}{r}+r,$$

$$A_-(l)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\frac{l}{r}-r,$$

$$B_{+}(l)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-\frac{l+1}{r}-r,\quad B_{-}(l)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\frac{l}{r}+r. \tag{7}$$

容易证明

$$\begin{aligned}
&A_{+}(l-1)A_{-}(l)=D(l)+[2l-1+G(l)],\\
&A_{-}(l+1)A_{+}(l)=D(l)+[2l+3+G(l)],\\
&B_{+}(l-1)B_{-}(l)=D(l)-[2l-1+G(l)],\\
&B_{-}(l+1)B_{+}(l)=D(l)-[2l+3+G(l)],
\end{aligned} \tag{8}$$

而且

$$\begin{aligned}
&D(l)[A_{+}(l-1)\chi_{l-1}]\\
&=\{\varepsilon_{l-1}+2-[G(l)-G(l-1)]\}[A_{+}(l-1)\chi_{l-1}],\\
&D(l)[A_{-}(l+1)\chi_{l+1}]\\
&=\{\varepsilon_{l+1}-2+[G(l+1)-G(l)]\}[A_{-}(l+1)\chi_{l+1}],\\
&D(l)[B_{+}(l-1)\chi_{l-1}]\\
&=\{\varepsilon_{l-1}-2-[G(l)-G(l-1)]\}[B_{+}(l-1)\chi_{l-1}],\\
&D(l)[B_{-}(l+1)\chi_{l+1}]\\
&=\{\varepsilon_{l+1}+2+[G(l+1)-G(l)]\}[B_{-}(l+1)\chi_{l+1}].
\end{aligned} \tag{9}$$

令标记能量的量子数为 $N=2n_r+l+\frac{1}{2}G(l)$,由上述(9)式的四式可知,$A_{+}(l-1)$的作用是使角动量 l 增加 1,同时使能量 E 减小 $1-\frac{1}{2}[G(l)-G(l-1)]$,即径向量子数 n_r 减小 1 ;$A_{-}(l+1)$的作用是使角动量 l 减小 1,同时使能量 E 增加 $1-\frac{1}{2}[G(l+1)-G(l)]$,即径向量子数 n_r 增加 1 ;$B_{+}(l-1)$的作用是使角动量 l 增加 1,同时使能量 E 增加 $1+\frac{1}{2}[G(l)-G(l-1)]$,即径向量子数 n_r 不变 ;$B_{-}(l+1)$的作用是使角动量 l 减小 1,同时使能量 E 减小 $1+\frac{1}{2}[G(l+1)-G(l)]$,即径向量子数 n_r 不变.

为了表示出算子 A 和 B 对 l 和 n_r 的这种性质,可以把它们记为

$$\begin{aligned}
&A_{+}(l)\to A(l\uparrow,n_r\downarrow)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-\frac{l+1}{r}+r,\\
&A_{-}(l)\to A(l\downarrow,n_r\uparrow)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\frac{l}{r}-r,\\
&B_{+}(l)\to B(l\uparrow,n_r)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-\frac{l+1}{r}-r,\\
&B_{-}(l)\to B(l\downarrow,n_r)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\frac{l}{r}+r.
\end{aligned} \tag{10}$$

再由此构造出另外两类算子 C 和 D.可以证明

$$\begin{aligned}
&A((l+1)\downarrow,n_r\uparrow)B(l\uparrow,n_r)|l,n_r\rangle\\
&=\left[D(l)-2r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+2r^2-1+G(l)\right]|l,n_r\rangle\\
&=-2\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-r^2+l+2n_r+2\right)|l,n_r\rangle,\\
&B((l+1)\downarrow,n_r)A(l\uparrow,n_r\downarrow)|l,n_r\rangle\\
&=\left[D(l)+2r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+2r^2+1+G(l)\right]|l,n_r\rangle\\
&=2\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+r^2-l-2n_r-1\right)|l,n_r\rangle.
\end{aligned}$$

可以令

$$\begin{aligned}
&C(l,n_r\uparrow)=r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-r^2+l+2n_r+2,\\
&C(l,n_r\downarrow)=r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+r^2-l-2n_r-1.
\end{aligned} \tag{11}$$

它们的作用分别是使 n_r 增加 1 或减小 1,而保持 l 不变,能量 E 增加 2 或减小 2. 类似地可以证明

$$\begin{aligned}
&A((l-1)\downarrow,n_r\uparrow)B(l\downarrow,n_r)|l,n_r\rangle\\
&=\left[D(l)+\frac{2l-1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\frac{l(2l-1)}{r^2}+G(l)\right]|l,n_r\rangle\\
&=(2l-1)\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\frac{l}{r^2}-\frac{2l+4n_r+3}{2l-1}\right)|l,n_r\rangle,\\
&A((l+1)\uparrow,n_r\downarrow)B(l\uparrow,n_r)|l,n_r\rangle\\
&=\left[D(l)-\frac{2l+3}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\frac{(l+1)(2l+3)}{r^2}+G(l)\right]|l,n_r\rangle\\
&=-(2l+3)\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-\frac{l+1}{r^2}+\frac{2l+4n_r+3}{2l+3}\right)|l,n_r\rangle.
\end{aligned}$$

可以令

$$\begin{aligned}
&D(l\downarrow\downarrow,n_r\uparrow)=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\frac{l}{r^2}-\frac{2l+4n_r+3}{2l-1},\\
&D(l\uparrow\uparrow,n_r\downarrow)=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-\frac{l+1}{r^2}+\frac{2l+4n_r+3}{2l+3}.
\end{aligned} \tag{12}$$

$D(l\downarrow\downarrow,n_r\uparrow)$的作用是使 l 减小 2,n_r 增加 1,能量减小$\frac{1}{2}[G(l)-G(l-2)]$;$D(l\uparrow\uparrow,n_r\downarrow)$的作用是使 l 增加 2,n_r 减小 1,能量增加$\frac{1}{2}[G(l+2)-G(l)]$. 这样就找到了三维各向同性谐振子在自旋-轨道耦合时的四类升降算子 A,B,C,D. 它们相应的选择定则和守恒量子数列于表 1.

考虑到(4)式中 $G(l)$在 $l\neq0$ 时有两个值,所以我们就发现能级出现了分裂,如图 1 所示的就是这时的能级图.

表 1

升降算子	l	n_r	E	守恒量子数
$A(l\uparrow, n_r\downarrow)$	$l\to l+1$	$n_r\to n_r-1$	$E\to E-1+\frac{1}{2}[G(l+1)-G(l)]$	$l+n_r$
$A(l\downarrow, n_r\uparrow)$	$l\to l-1$	$n_r\to n_r+1$	$E\to E+1-\frac{1}{2}[G(l)-G(l-1)]$	$l+n_r$
$B(l\uparrow, n_r)$	$l\to l+1$	$n_r\to n_r$	$E\to E+1+\frac{1}{2}[G(l+1)-G(l)]$	n_r
$B(l\downarrow, n_r)$	$l\to l-1$	$n_r\to n_r$	$E\to E-1-\frac{1}{2}[G(l)-G(l-1)]$	n_r
$C(l, n_r\uparrow)$	$l\to l$	$n_r\to n_r+1$	$E\to E+2$	l
$C(l, n_r\downarrow)$	$l\to l$	$n_r\to n_r-1$	$E\to E-2$	l
$D(l\uparrow\uparrow, n_r\downarrow)$	$l\to l+2$	$n_r\to n_r-1$	$E\to E+\frac{1}{2}[G(l+2)-G(l)]$	$l+2n_r$
$D(l\downarrow\downarrow, n_r\uparrow)$	$l\to l-2$	$n_r\to n_r+1$	$E\to E-\frac{1}{2}[G(l)-G(l-2)]$	$l+2n_r$

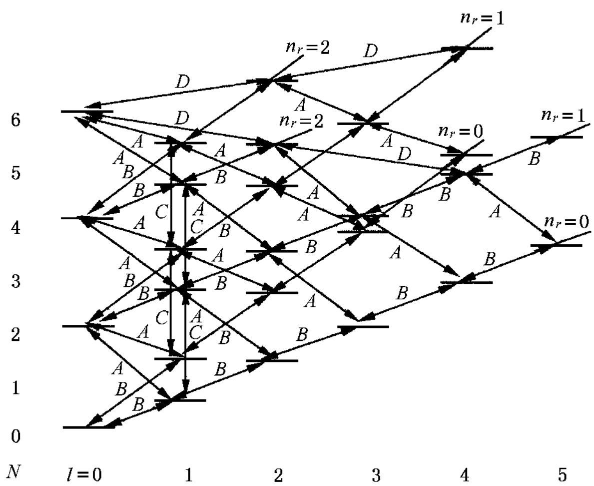

图 1 能级图

3. 一般解法

具有自旋-轨道耦合的三维各向同性谐振子的径向方程为

$$R_l'' + \frac{2}{r}R_l' + \left[2E - r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - G(l)\right]R_l = 0, \tag{13}$$

可将其化为合流超几何方程并解得径向波函数为[8]

$$R_l(r) = r^l \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) F\left(\frac{1}{2}\left(l + \frac{3}{2} - E + \frac{1}{2}G(l)\right), l + \frac{3}{2}, \xi\right), \tag{14}$$

式中

$$\xi = r^2, F\left(\frac{1}{2}\left(l + \frac{3}{2} - E + \frac{1}{2}G(l)\right), l + \frac{3}{2}, \xi\right)$$

为合流超几何函数,而

$$F(\alpha,\gamma,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}\xi^k. \tag{15}$$

上面的无穷级数必须中断为一个多项式,否则所得径向波函数在 $\xi\to\infty$ 时趋于 ∞,不满足束缚态的边条件.这就要求 $\alpha=0$ 或负整数,即

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(l + \frac{3}{2} - E + \frac{1}{2}G(l)\right) = -n_r,$$

$$n_r = 0,1,2,\cdots$$

所以能量本征值为(类似的解法也可参见文献[9,10])

$$E = 2n_r + l + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}G(l), \tag{16}$$

与升、降算子方法相比有同样的结果.

[1] Liu Y F and Zeng J Y 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 417(in Chinese)[刘宇峰、曾谨言 1997 物理学报 **46** 417]

[2] Liu Y F, Lei Y A and Zeng J Y 1997 *Phys. Lett.* A **231** 9

[3] Zha X W 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 723(in Chinese)[查新未 2002

物理学报 **51** 723]

[4] Zeng J Y 2000 *Quantum Mechanics*(Beijing：Science Press) 609(in Chinese)[曾谨言 2000 量子力学(卷Ⅱ)(北京：科学出版社)第 609 页]

[5] Cai Z Y 2002 *Journal of Guangxi Teachers College*(*Natural Science Edition*) **19** 57(in Chinese)[蔡昭蕴 2002 广西师范学院学报(自然科学版) **19** 57]

[6] Schrödinger E 1940 *Proc*. *Roy*. *Irish Acad*. A **46** 9，183

[7] Infeld L and Hull T E 1951 *Rev*. *Mod*. *Phys*. **23** 21

[8] Zeng J Y 2000 *Quantum Mechanics*(Beijing：Science Press) 315 (in Chinese)[曾谨言 2000 量子力学(卷Ⅱ)(北京：科学出版社)第 315 页]

[9] Di Y M 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 786(in Chinese)[狄尧民 2003 物理学报 **52** 786]

[10] Hou C F，Sun X D，Zhou Z X and Li Y 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 385(in Chinese)[侯春风、孙秀冬、周忠祥、李　焱 1999 物理学报 **48** 385]

Four kinds of raising and lowering operators of three-dimensional isotropic harmonic oscillators with spin-orbit coupling

Fu Mei-Huan[1)2)]　Ren Zhong-Zhou[1)]

[1)](*Department of Physics*，*Nanjing University*，*Nanjing*　210008，*China*)

[2)](*Nanjing Institute of Industry Technology*，*Nanjing*　210007，*China*)

(Received 20 May 2003；revised manuscript received 29 July 2003)

Abstract

The method of raising and lowering operator is used to solve the problem of three-dimensional isotropic harmonic oscillator with Spin-orbit coupling. The energy level splitting of the harmonic oscillator is analyzed and discussed.

Keywords：spin-orbit coupling，harmonic oscillator，raising and lowering operator

PACC：0365