

# 推广的 Jaynes-Cummings 模型中原子纠缠的时间演化和热纠缠态<sup>\*</sup>

向少华 杨 雄 宋克慧

(怀化学院物理与电子信息科学系, 怀化 418008)

(2003 年 5 月 20 日收到, 2003 年 7 月 24 日收到修改稿)

利用共生纠缠度研究了一个推广 Jaynes-Cummings 模型中两原子纠缠的时间演化和有限温度下系统热纠缠态. 结果表明, 腔场中两原子展现出周期性的纠缠演化过程, 演化周期随原子偶极-偶极相互作用强度的增大而减小; 在有限温度下, 系统的共生纠缠度随温度的升高而降低, 当趋近临界温度时, 系统纠缠现象消失, 这一临界温度值与原子偶极-偶极相互作用强度成正比. 对于典型的实验数据, 临界温度约在  $10^{-5}$  K 数量级. 此外, 在这种 Jaynes-Cummings 模型中存在量子相位转变.

关键词: Jaynes-Cummings 模型, 原子纠缠态, 热纠缠态, 共生纠缠度, 偶极-偶极相互作用

PACC: 0365, 0370, 4250

## 1. 引 言

纠缠是量子世界奇特的现象之一. 由于它在量子信息处理<sup>[1-4]</sup>和量子光刻<sup>[5]</sup>中扮演着极为重要的角色, 近年来, 人们提出了许多两粒子和多粒子纠缠的制备方案, 涉及光学系统<sup>[6]</sup>、核磁共振<sup>[7]</sup>、腔场量子动力学<sup>[8,9]</sup>和玻色-爱因斯坦凝聚体<sup>[10]</sup>等领域, 特别是腔场量子动力学方法因技术成熟备受青睐. 利用 Jaynes-Cummings 模型制备原子的纠缠<sup>[8,9]</sup>是将原子依次注入到腔场中, 通过控制实验参数实现的. 但这种方法因制备时间过长而对产生多原子的纠缠不利. 最近, 郑等人<sup>[11,12]</sup>提出了一种新颖的制备原子态纠缠方案, 即同时将几个原子注入到腔场中, 控制作用时间就能产生原子的 GHZ 态和 W 态. 另一方面, 量子纠缠态量度也是人们研究的课题之一. 最近几年提出了一些描述纠缠态纠缠的物理量, 例如 Von Neumann 熵、纠缠相对熵<sup>[13]</sup>、密度算符之间的距离<sup>[14]</sup>、Rényi 纠缠度<sup>[15]</sup>和共生纠缠度<sup>[16]</sup>(Concurrence)等.

本文将利用共生纠缠度来研究两个原子同时注入腔场中, 在原子偶极-偶极相互作用下它们的纠缠

时间演化过程和有限温度下系统的热纠缠态现象.

## 2. 理论模型与量子腔场中原子纠缠的时间演化

最近, 郑等人<sup>[11,12]</sup>提出了一个 Hamiltonian 模型, 即考虑初始腔场处于真空态和原子跃迁频率与腔场频率的失谐量远远大于原子与腔场的耦合强度条件下两原子-腔场系统的相互作用. 在此基础上我们对该模型作推广, 考虑在相互作用绘景和偶极-偶极相互作用下, 两个相同的二能级原子同时飞越单模腔场的模型, 该系统的有效哈密顿量为

$$\hat{H} = \lambda \sum_{j=1,2} |e_{jj}\rangle \langle e| + \Omega (\hat{S}_1^+ \hat{S}_2^- + \hat{S}_1^- \hat{S}_2^+), \quad (1)$$

式中  $\hat{S}^+ \equiv |e\rangle \langle g|$  和  $\hat{S}^- \equiv |g\rangle \langle e|$  分别描述本征跃迁频率为  $\omega_0$  的二能级原子行为的升、降算符,  $|e\rangle$  和  $|g\rangle$  为原子的激发态和基态;  $a$  ( $a^+$ ) 是频率为  $\omega$  的单模腔场的湮没(产生)算符; 拉比频率  $\lambda = g^2/\Delta$ ,  $g$  代表原子-腔场的耦合系数, 它描述原子与腔场的耦合强度, 失谐量  $\Delta = \omega_0 - \omega$ ,  $\Omega$  为原子之间偶极-偶极相互作用强度. 为方便起见, 取  $\hbar = 1$ .

随着时间的演化,  $t$  时刻系统的态矢为

\* 湖南省教育厅青年科研项目(批准号 99B27)资助的课题.

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle = \exp(-i\hat{H}t)|\psi(0)\rangle, \quad (2)$$

因此,向腔场注入初态为 \$|ge\_{12}\rangle\$ 的两个原子,经过作用时间 \$t\$ 后,原子-腔场耦合系统的态矢演化为

$$|ge_{12}\rangle \xrightarrow{\hat{U}(t)} \exp(-i\lambda t) [\cos(\Omega t)|ge_{12}\rangle - i\sin(\Omega t)|eg_{12}\rangle]. \quad (3)$$

利用共生纠缠度来研究(3)式两原子在腔场中纠缠的演化过程.共生纠缠度定义为<sup>[16]</sup>

$$C = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\}, \quad (4)$$

其中参量 \$\lambda\_1 \geq \lambda\_2 \geq \lambda\_3 \geq \lambda\_4\$ 是算符 \$\mathcal{R}\$ 本征值的平方根.算符 \$\mathcal{R}\$ 为

$$\mathcal{R} = \rho_{12}(\hat{\sigma}_1^x \otimes \hat{\sigma}_2^x)\rho_{12}^*(\hat{\sigma}_1^x \otimes \hat{\sigma}_2^x), \quad (5)$$

这里 \$\rho\_{12}\$ 为粒子 1 和 2 的密度矩阵,\* 号表示 \$\rho\_{12}\$ 在标准基矢 \$\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}\$ 下共轭矩阵, \$\hat{\sigma}^x\$ 为泡利矩阵.此外,对于原子子系统,选原子基矢为

$$|g\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |e\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

与其他纠缠量度物理量一样,共生纠缠度有以下特点:

- 1) \$C = 0\$, 则两粒子之间不存在量子纠缠;
- 2) \$C = 1\$, 两粒子处于最大纠缠态;
- 3) \$0 < C < 1\$, 两粒子为部分纠缠态.

由(3)和(5)式,不难求得两原子的共生纠缠度为

$$\rho(T) = \frac{1}{2\left(\cosh\left(\frac{\hbar\lambda}{kT}\right) + \cosh\left(\frac{\hbar\Omega}{kT}\right)\right)} \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{\hbar\lambda}{kT}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\left(\frac{\hbar\Omega}{kT}\right) & -\sinh\left(\frac{\hbar\Omega}{kT}\right) & 0 \\ 0 & -\sinh\left(\frac{\hbar\Omega}{kT}\right) & \cosh\left(\frac{\hbar\Omega}{kT}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp\left(-\frac{\hbar\lambda}{kT}\right) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

根据(4)(5)和(9)式,可得原子子系统的共生纠缠度为

$$C = \max\left\{\frac{\sinh\left(\frac{\hbar\Omega}{kT}\right) - 1}{\cosh\left(\frac{\hbar\Omega}{kT}\right) + \cosh\left(\frac{\hbar\lambda}{kT}\right)}, 0\right\}. \quad (10)$$

由(10)式可知,存在一个影响两原子纠缠的上限温度 \$T\_0\$,即

$$T_0 = \frac{\hbar\Omega}{k \operatorname{arcsinh}(1)}. \quad (11)$$

若环境温度 \$T \geq T\_0\$, 则系统中两原子纠缠消失.图 1

$$C(t) = |\sin(2\Omega t)|. \quad (7)$$

容易看出,在这种 Jaynes-Cummings 模型中两个原子之间关联形式随作用时间呈现为消纠缠 \$\rightarrow\$ 部分纠缠 \$\rightarrow\$ 最大纠缠循环过程;两原子的纠缠形式只与原子偶极-偶极相互作用强度 (\$\Omega\$) 有关,而与拉比频率 \$\lambda\$ 无关,并且随着 \$\Omega\$ 的增大,纠缠演化周期缩短.因此,选择适当的偶极-偶极作用强度和两原子飞越时间,就能制备出任意形式的两原子纠缠态.这些结果对于利用腔场 QED 方法制备、控制和操纵原子的纠缠态具有一定参考意义.

### 3. 热纠缠态现象

自 Nielsen 首次提出热纠缠态概念并运用到一维各向同性海森伯量子系统以来<sup>[17]</sup>,已有大量文献报道了它在诸多量子系统的存在和潜在的应用<sup>[18,19]</sup>.在此我们将热纠缠态概念运用到该 Jaynes-Cummings 模型,研究原子子系统在热环境下的纠缠现象.两原子-腔场系统的哈密顿量如(1)式所描述.在热平衡时,该系统的态矢为

$$\rho(T) = \frac{\exp(-H/kT)}{Z}, \quad (8)$$

式中 \$Z = \operatorname{Tr}[\exp(-H/kT)]\$ 是配分函数,\$k\$ 为波尔兹曼常数,选择原子子系统的标准基矢 \$\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}\$,考虑 \$\hbar\$, 不难得到

是(10)式的数值模拟结果,其中图 1(a)设定拉比频率 \$\lambda = g\$, 原子偶极-偶极相互作用强度 \$\Omega\$ 分别取 \$g, 10g\$ 和 \$20g\$ 所描绘的环境温度 \$T\$ 与共生纠缠度 \$C(T)\$ 的关系曲线.图 1(b)是设定拉比频率 \$\lambda = 10g\$, 原子偶极-偶极相互作用系数 \$\Omega\$ 分别取 \$10g, 15g\$ 和 \$20g\$ 所描绘的环境温度 \$T\$ 对共生纠缠度 \$C(T)\$ 的关系曲线.从图中可以看出,在绝对零度 \$T = 0\$, 系统处于基态.然而,当系统的温度升高时,原子子系统的共生纠缠度急剧的下降.直到环境温度趋近某一数值时,共生纠缠度 \$C(T) = 0\$ ebit, 即说明系统中

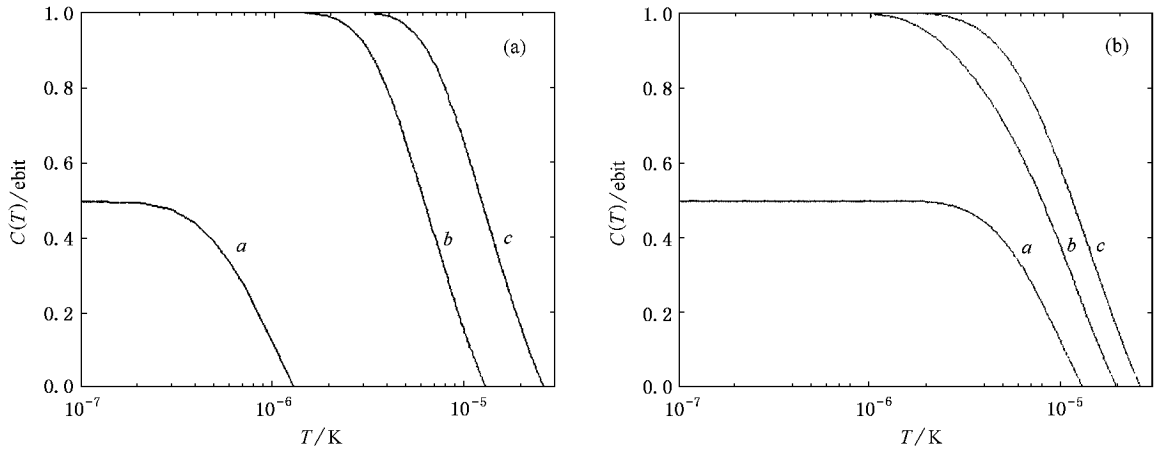


图 1 环境温度  $T$  对原子子系统共生纠缠度  $C(T)$  的影响 (a) 取拉比频率  $\lambda = g$ . 曲线  $a, b, c$  分别对应偶极作用系数为  $g, 10g$  和  $20g$ . (b) 拉比频率  $\lambda = 10g$ . 曲线  $a, b, c$  分别对应偶极-偶极作用系数为  $10g, 15g$  和  $20g$

原子纠缠态消失,或者说,此系统未能保持两原子的纠缠态.这是显然的,因为环境温度升高,原子子系统的量子相干性将衰减,从而导致原子子系统共生纠缠度  $C(T)$  下降.腔场 QED 是人们设计量子逻辑门、量子通讯和量子计算机等方法之一,实现它们的首要问题就是必须保持量子比特的相干性.目前,人们提出了三种克服量子消相干的方法:1)量子纠错编码<sup>[20]</sup>;2)动力学解耦机理<sup>[21]</sup>;3)量子比特植入消除相干子空间<sup>[22]</sup>.但这些没有涉及具体的物理模型.在这里我们利用所得到的结果,从另一个角度考虑保持量子比特纠缠态的策略.第一种策略是增加原子之间的偶极-偶极相互作用强度,提升原子子系统纠缠的上限温度,从而在较高的环境温度下保持原子子系统的相干性.由(11)式可知,原子子系统纠缠的上限温度随原子偶极-偶极相互作用强度  $\Omega$  增加而提高.据目前的实验资料,原子之间的偶极-偶极相互作用强度<sup>[11,12]</sup>  $\Omega = 10g, g = 2\pi \times 24\text{kHz}$ ,于是保持原子子系统纠缠的上限温度为  $T_0 = 1.3068 \times 10^{-5} \text{K}$ .策略之二采取目前冷却技术降低系统温度,保持量子比特的相干性.如两原子的偶极-偶极作用强度选为  $\Omega = 10g$ ,拉比频率  $\lambda = g$ .在系统温度  $T = 10^{-6} \text{K}$  时,该模型中原子子系统的纠缠度是  $0.9999 \text{ebit}$ ;在  $T = 10^{-7} \text{K}$  时,纠缠度是  $1 \text{ebit}$ ,从而很好地保持量子比特的相干性.对于这样的低温在实验上可用激光冷却技术实现<sup>[23]</sup>.因此,利用腔场 QED 方法来实现量子逻辑门、量子通讯和量子计算机等不存在原则上的困难.此外,从图 1 中可以发现,拉比频率  $\lambda$  也对共生纠缠度有影响.在绝对零度附近,有

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} C &= 1 & (\lambda < \Omega), \\ \lim_{T \rightarrow 0} C &= \frac{1}{2} & (\lambda = \Omega), \\ \lim_{T \rightarrow 0} C &= 0 & (\lambda > \Omega). \end{aligned} \quad (12)$$

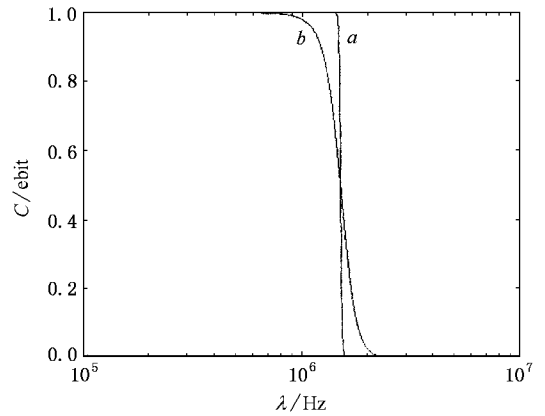


图 2 拉比频率  $\lambda$  对原子子系统共生纠缠度的影响,设定  $\Omega = 10g$ . 曲线  $a$  对应环境温度为  $10^{-7} \text{K}$ , 曲线  $b$  对应环境温度为  $10^{-6} \text{K}, g = 2\pi \times 24\text{kHz}$

在图 2 中,取  $g = 2\pi \times 24 \times 1000 \approx 1.5 \times 10^6 \text{Hz}$ .从图中可看出,若  $\lambda > \Omega$ ,该系统没有纠缠现象.而当  $\lambda = \Omega$  时,该 Jaynes-Cummings 模型中存在量子相位转变<sup>[18]</sup>.

## 4. 结 论

利用共生纠缠度研究了一个 Jaynes-Cummings 模型中两原子的纠缠时间演化.结果表明腔场中两个原子的纠缠展现周期性,其纠缠的演化过程是消

纠缠→部分纠缠态→最大纠缠态. 研究了环境温度对原子子系统的共生纠缠度的影响, 指出在有限的环境温度下, 共生纠缠度随着温度的升高而减小, 当环境温度趋近某一值时, 系统中无纠缠现象, 但这一温度值  $(T_0 = \frac{\hbar\Omega}{k \operatorname{arcsinh}(1)})$  随原子偶极-偶极相互作用

用强度的增大而升高, 根据这一结论我们提出了两个克服量子比特消相干的建议方案. 对于典型的实验数据这一临界温度  $T_0$  大约为  $10^{-5}$  K 数量级, 在目前的实验条件下可以实现. 另外, 我们也发现在所提出的 Jaynes-Cummings 模型存在量子相位转变.

- [ 1 ] Deutsch D and Jozsa R 1992 *Pro. R. Soc. (London A)* **439** 533
- [ 2 ] Ye L, Yao C M and Guo G C 2001 *Chin. Phys.* **10** 1001
- [ 3 ] Bennett C H and Wiesner S J 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 2881
- [ 4 ] Zhang Q *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1684 ( in Chinese ) [ 张权等 2002 物理学报 **51** 1684 ]
- [ 5 ] Boto A N *et al* 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2733
- [ 6 ] Weinfurter H and Zukowski M 2001 *Phys. Rev. A* **64** R010102
- [ 7 ] Turchette Q A 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 1525
- [ 8 ] Song K H and Guo G C 1999 *Chin. Phys. Lett.* **16** 160
- [ 9 ] Song K H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 441 ( in Chinese ) [ 宋克慧 2000 物理学报 **49** 441 ]
- [ 10 ] Sørensen A *et al* 2001 *Nature (London)* **63** 409
- [ 11 ] Zheng S B and Guo G C 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2392
- [ 12 ] Zheng S B 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 230404
- [ 13 ] Vedral V *et al* 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2275
- [ 14 ] Knöll L 1995 *Phys. Rev. A* **51** 1622
- [ 15 ] Horodecki R and Horodecki M 1996 *Phys. Rev. A* **54** 1838
- [ 16 ] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [ 17 ] Neilsen M A 1998 Ph. D. thesis University of New Mexico 153 e-print quant-ph/0011036
- [ 18 ] Wang X G 2001 *Phys. Rev. A* **64** 012313
- [ 19 ] Gunlycke D, Kendon V M and Vedral V 2001 *Phys. Rev. A* **64** 042302
- [ 20 ] Gottesman D 1996 *Phys. Rev. A* **54** 1862
- [ 21 ] Viola L, Knill E and Lloyd S 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2417
- [ 22 ] Duan L M and Guo G C 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 1953
- [ 23 ] Zhu S Q 2000 *The Dynamics of Quantum Transition in Laser* ( Hefei : Anhui education Press ) p200 ( in Chinese ) [ 朱时清 2000 激光场中的量子跃迁动力学 ( 合肥 : 安徽教育出版社 ) 第 200 页 ]

## Time evolution of two-atom entanglement and thermal entanglement in a generalized Jaynes-Cummings model<sup>\*</sup>

Xiang Shao-Hua Yang Xiong Song Ke-Hui

( Department of Physics and Electronic Information Science , Huaihua University , Huaihua 418008 , China )

( Received 20 May 2003 ; revised manuscript received 24 July 2003 )

### Abstract

In this paper , we investigate two-atom entanglement in time evolution and the thermal entanglement in a generalized Jaynes-Cummings model by means of concurrence. The result shows that the two-atom entangled state appears with periodicity , which decreases with increasing dipole-dipole coupling between the two atoms. In a finite temperature , the concurrence decreases with increasing temperature , and the thermal entanglement vanishes in this Jaynes-Cummings model when the system temperature reaches the critical temperature , which is proportional to the dipole-dipole coupling strength of the two atoms. For typical experimental data , the critical temperature is on the order of  $10^{-5}$  K. In addition , there exists the quantum phase transition in this Jaynes-Cummings model.

**Keywords :** Jaynes-Cummings model , atomic entanglement , thermal entanglement , concurrence , dipole-dipole interaction

**PACC :** 0365 , 0370 , 4250

<sup>\*</sup> Project supported by the Young Scientific Research Foundation of Hunan Provincial Education Department ( Grand No. 99B27 ).