

# 多波长系统孤子耦合方程的可积性

李齐良<sup>1,2)</sup> 朱海东<sup>1)</sup> 唐向宏<sup>1)</sup> 李承家<sup>3)</sup> 王小军<sup>1)</sup> 林理彬<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> 杭州电子工业学院通信工程学院, 杭州 310037)

<sup>2)</sup> 四川大学物理科学与技术学院, 成都 610064)

<sup>3)</sup> 杭州电子工业学院理学院, 杭州 310037)

(2003 年 5 月 20 日收到, 2003 年 7 月 22 日收到修改稿)

多波长系统孤子耦合方程存在 Lax 对, 具有可积性. 利用 Hirota 双线性方法求出了孤子耦合方程的单孤子解和双孤子解.

关键词: Lax 对, Hirota 双线性变换, 可积性

PACC: 0340K, 0220

## 1. 引言

光纤中存在着由光强度诱导的非线性和群速度色散. 对单色波而言, 当非线性诱导的自相位调制与色散引起的相移平衡时, 色散效应得到补偿, 产生具有自陷 (self-trapped) 效应的光孤子. 它在传输的过程中, 在不计损耗的情况下, 形状和能量保持不变. 光孤子的存在在实验上和理论上都已得到验证, 这方面已有许多报道. 在单色波系统, 孤子传输满足非线性薛定谔方程 (NLSE)

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma |u|^2 u = 0, \quad (1)$$

式中  $\beta_2$  是二阶色散系数,  $\gamma = \omega_0 n_2 / (c A_{\text{eff}})$  为非线性系数,  $n_2$  是非线性折射率,  $A_{\text{eff}}$  是光纤的有效面积,  $\omega_0$  是光波的中心频率,  $c$  为光速.

光纤具有巨大的带宽, 为了充分利用光纤的带宽, 在光纤通信系统中, 普遍采用波分复用技术. 这种多波长系统孤子耦合相互作用, 引起了人们浓厚的兴趣, 近来对它们进行了大量而深入地研究. 波分复用系统中, 孤子之间的耦合理论包括: 在双折射光纤中, 两正交方向孤子之间的耦合, 称为 Manakov 系统, 用 Manakov 耦合方程描述<sup>[1, 2]</sup>; Bragg 光纤光栅中, Bragg 孤子之间的耦合<sup>[3]</sup>; 多波长系统孤子之间的耦合等. 波分复用技术能充分利用光纤的带宽, 但危害之一是, 孤子之间的耦合相互作用, 或者说是孤

子之间的相干性. 这种相互作用中, 除了非线性诱导的自相位调制以外, 还存在非线性引起的交叉相位调制和四波混频效应, 受激拉曼散射等. 这样将会引起多余的频率移动和定时抖动以及信道的串扰和信号信噪比下降. 如果光纤的色散系数很大, 四波混频相位匹配条件很难满足, 光纤的色散能抑制四波混频效应. 在这些多孤子耦合模型中, 孤子的解大都采用单信道孤子解, sech 双曲型<sup>[4]</sup> 或高斯型<sup>[5, 6]</sup>, 然后由微扰理论对其分析, 而且耦合方程形式也各不相同.

本文根据光纤的非线性和 Maxwell 方程, 得出多信道系统孤子的耦合方程, 找出 Lax 对, 说明方程的可积性, 再由 Hirota 双线性方法, 求出方程的精确解.

## 2. 非线性光纤中孤子的耦合方程

光波在非线性介质中传播的 Maxwell 方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{\text{NL}}}{\partial t^2}, \quad (2)$$

式中  $\mathbf{E}$  是电场强度,  $n^2 = 1 + \chi^{(1)}$  是介质折射率的线性部分,  $\mathbf{P}_{\text{NL}}$  是非线性极化强度, 与电场强度的关系

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{NL}} = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \chi^{(3)}(t_1 - t, t_2 - t, t_3 - t) \\ \mathbf{E}(x, y, z, t_1) \mathbf{E}(x, y, z, t_2) \\ \times \mathbf{E}(x, y, z, t_3) dt_1 dt_2 dt_3. \end{aligned} \quad (3)$$

考虑光纤中有两个不同频率的光波,中心频率分别为  $\omega_1$  和  $\omega_2$  即

$$E = e_x [ E_1 \exp(i\omega_1 t) + E_2 \exp(i\omega_2 t) ], \quad (4)$$

忽略四波混频效应,非线性极化强度为

$$P_{NL}(\omega_1) = 2\epsilon_0 n_2 ( |E_1|^2 + 2|E_2|^2 ) E_1,$$

$$P_{NL}(\omega_2) = 2\epsilon_0 n_2 ( |E_2|^2 + 2|E_1|^2 ) E_2,$$

式中  $n_2 = \frac{3}{8n} \chi_{xxxx}^{(3)}$  将两光波的场函数写为

$$E_j = \Psi_j(x, y) A_j(z, t) \exp(i\omega_j t - i\beta_{0j} z) \quad j = 1, 2,$$

式中  $\Psi_j(x, y)$  横向场的模,利用 Maxwell 方程(2)得到两波长系统孤子的耦合方程为

$$i \frac{\partial A_1}{\partial z} + i \frac{1}{v_{g1}} \frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \beta_{21} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} + \gamma_1 ( |A_1|^2 + 2|A_2|^2 ) A_1 = 0, \quad (5a)$$

$$i \frac{\partial A_2}{\partial z} + i \frac{1}{v_{g2}} \frac{\partial A_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \beta_{22} \frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} + \gamma_2 ( |A_2|^2 + 2|A_1|^2 ) A_2 = 0. \quad (5b)$$

这里  $v_{g1}$  和  $v_{g2}$  分别是两信道中波包传播的群速度,  $\beta_{21}$  和  $\beta_{22}$  两孤子的群速度色散系数,  $\gamma_j = \omega_j n_2 (c A_{eff})$  为非线性系数,由于邻近信道的间隔很小,认为  $\beta_{21} = \beta_{22} = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ .

引入变换  $T = t - \frac{z}{2} \left( \frac{1}{v_{g1}} + \frac{1}{v_{g2}} \right), Z = z$ , 方程

(5a) 和 (5b) 变为

$$i \frac{\partial A_1}{\partial Z} + \frac{i}{2} \bar{\rho} \frac{\partial A_1}{\partial T} + \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial T^2} + \gamma ( |A_1|^2 + 2|A_2|^2 ) A_1 = 0, \quad (5c)$$

$$i \frac{\partial A_2}{\partial Z} - \frac{i}{2} \bar{\rho} \frac{\partial A_2}{\partial T} + \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial T^2} + \gamma ( |A_2|^2 + 2|A_1|^2 ) A_2 = 0, \quad (5d)$$

式中  $\bar{\rho} = \left( \frac{1}{v_{g1}} - \frac{1}{v_{g2}} \right)$ , 引入  $\rho = T_0 \bar{\rho} ( 2 | \beta_2 | )$ ,  $\tau = T/T_0, \xi = Z/L_D, L_D = T_0^2 / | \beta_2 |$  是光纤的色散长度,  $L_{NL} = 1 / ( \gamma P_0 )$  是光纤的非线性长度,  $T_0$  是脉冲的宽度,  $P_0$  是孤子的功率,假定  $N^2 = L_D / L_{NL}$ , 再对孤子的包络作如下的变换

$$A_1 = 1/N \sqrt{P_0} u_1 \exp[ i ( \rho^2 \xi / 2 - \rho \tau ) ], \quad (5e)$$

$$A_2 = 1/N \sqrt{P_0} u_2 \exp[ i ( \rho^2 \xi / 2 + \rho \tau ) ], \quad (5f)$$

将  $\xi \rightarrow 2\xi$  这样,方程(5c)和方程(5d)化为

$$i \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \mathcal{X} |u_1|^2 + B |u_2|^2 u_1 = 0, \quad (5g)$$

$$i \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + \mathcal{X} |u_2|^2 + B |u_1|^2 u_2 = 0, \quad (5h)$$

式中  $B = 2, B = 1$  时方程的可积性,已经得到研究<sup>[7]</sup>,  $B \neq 1$  和  $B \neq 2$  的情况,不能得出该系统的 Lax 对,这种情况下是不可积的.对具有  $m$  个波长的系统,光纤中第  $j$  个信道孤子耦合的方程为

$$i \frac{\partial u_j}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial \tau^2} + \mathcal{X} |u_j|^2 + \sum_{i \neq j}^m 2 |u_i|^2 u_j = 0. \quad (6)$$

### 3. 方程的可积性

根据 Ablowitz 等人发展的非线性方程理论<sup>[8]</sup>, 非线性微分方程组有解的条件是存在 Lax 对,根据文献[8]介绍的方法,得到 AKNS 系统耦合方程(5g)和(5h)的 Lax 对

$$L = \begin{pmatrix} -ik & u_1 & u_2 \\ -u_1^* & ik & 0 \\ -u_2^* & 0 & ik \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} -2ik^2 + i ( |u_1|^2 + |u_2|^2 ) & 2ku_1 + iu_{1\tau} & 2ku_2 + iu_{2\tau} \\ -2ku_1^* + iu_{1\tau}^* & 2ik^2 - i ( |u_1|^2 ) & -3iu_1^* u_2 \\ -2ku_2^* + iu_{2\tau}^* & -3iu_1 u_2^* & 2ik^2 - i ( |u_2|^2 ) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

这里  $k$  是谱参数,由关系式

$$L_\xi - X_\tau + [ L, X ] = 0 \quad (8)$$

可以推出方程(5g)和(5h).我们知道,非线性方程组(5g)(5h)可解的条件不仅仅是存在 Lax 对,还必须

满足 Galilei 变换的不变性,作变换

$$u_1(\xi, \tau) = \Phi_1(\xi, \tau - V\xi) \exp[ i ( -K\xi + \Omega\tau ) ], \quad (9a)$$

$$u_2(\xi, \tau) = \Phi_2(\xi, \tau - V\xi) \exp[ i ( -K\xi + \Omega\tau ) ]. \quad (9b)$$

这样变换到具有运动速度为  $V$  的新的坐标系 取定

$$\Omega = \frac{1}{2} V, K = \Omega^2, \quad (10)$$

新坐标系是

$$X = \xi, T_1 = \tau - V\xi. \quad (11)$$

将(9a)(9b)代入方程(5g)(5h)得到

$$i \frac{\partial \Phi_1}{\partial X} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial T_1^2} + \chi |\Phi_1|^2 + 2 |\Phi_2|^2 \Phi_1 = 0, \quad (12a)$$

$$i \frac{\partial \Phi_2}{\partial X} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial T_1^2} + \chi |\Phi_2|^2 + 2 |\Phi_1|^2 \Phi_2 = 0. \quad (12b)$$

方程(12a)(12b)与方程(5g)(5h)具有相同的形式,说明了方程(5g)(5h)具有 Galilei 变化的不变性,因此微分方程组(5g)(5h)是可解的.

## 4. 方程的解

求解非线性偏微分方程,比较成熟的方法有逆散射方法<sup>[8]</sup>、Darboux 变换<sup>[9,10]</sup>、Hirota<sup>[11]</sup>方法,Backlund 变换法<sup>[12]</sup>等.近年来,人们用这些方法对各类孤子方程进行精确求解<sup>[13-15]</sup>,本文采用 Hirota 双线性变换法.

假定  $u_1 = g_1/f, u_2 = g_2/f$ ,代入方程组(5g), (5h)得到

$$i \frac{g_1 f_\tau - g_1 f_\xi}{f^2} + \frac{g_1 f_\tau^2 - 2g_1 f_\tau f_\xi + g_1 f_{\tau\xi}}{f^3} + \frac{2g_1 f_\tau^2 - 2g_1 f_\tau f_\xi}{f^3} + 2 \frac{(g_1 g_1^* + 2g_2 g_2^*)g_1}{f^3} = 0, \quad (13a)$$

$$i \frac{g_2 f_\tau - g_2 f_\xi}{f^2} + \frac{g_2 f_\tau^2 - 2g_2 f_\tau f_\xi + g_2 f_{\tau\xi}}{f^3} + \frac{2g_2 f_\tau^2 - 2g_2 f_\tau f_\xi}{f^3} + 2 \frac{(2g_1 g_1^* + g_2 g_2^*)g_2}{f^3} = 0. \quad (13b)$$

引入算符  $D_\xi, D_\tau$  满足

$$D_\xi^n D_\tau^m g \cdot f = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi'} \right)^n \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau'} \right)^m \times g(\xi, \tau)(\xi', \tau') \Big|_{\xi=\xi', \tau=\tau'}. \quad (14)$$

这样方程(13a)和(13b)化为

$$(iD_\xi + D_\tau^2)g_1 \cdot f = 0, \quad (15a)$$

$$(iD_\xi + D_\tau^2)g_2 \cdot f = 0, \quad (15b)$$

$$D_\tau^2 f \cdot f = \chi (g_1 g_1^* + 2g_2 g_2^*), \quad (15c)$$

取一小量  $\epsilon$ ,假定

$$g_1 = \epsilon g_1^{(1)} + \epsilon^3 g_1^{(3)} + \dots \quad (15d)$$

$$g_2 = \epsilon g_2^{(1)} + \epsilon^3 g_2^{(3)} + \dots \quad (15e)$$

$$f = 1 + \epsilon^2 f^{(2)} + \epsilon^4 f^{(4)} + \dots \quad (15f)$$

### 4.1. 单孤子解

对单孤子解,取

$$f = 1 + \epsilon^2 f^{(2)}, g_1 = \epsilon g_1^{(1)}, g_2 = \epsilon g_2^{(1)}, \quad (16)$$

把它们代入(15a)(15b)(15c),再比较  $\epsilon$  的同次幂,有

$$\epsilon (iD_\xi + D_\tau^2) \chi (g_1^{(1)} \cdot 1) = 0,$$

$$(iD_\xi + D_\tau^2) \chi (g_2^{(1)} \cdot 1) = 0, \quad (17)$$

$$\epsilon^2 :D_\tau^2(1 \cdot f^{(2)} + f^{(2)} \cdot 1) = \chi (g_1 g_1^* + 2g_2 g_2^*), \quad (18)$$

$$\epsilon^3 (iD_\xi + D_\tau^2) \chi (g_1^{(1)} \cdot f^{(2)}) = 0, \quad (19)$$

$$(iD_\xi + D_\tau^2) \chi (g_2^{(1)} \cdot f^{(2)}) = 0, \quad (20)$$

$$\epsilon^4 :D_\tau^2(f^{(2)} \cdot f^{(2)}) = 0. \quad (21)$$

由方程(16)–(19)得到

$$g_1 = \exp(\eta + i\theta_1),$$

$$g_2 = \exp(\eta + i\theta_2),$$

$$f^{(2)} = \frac{3}{4A^2} \exp(\eta + \eta^*). \quad (22)$$

这里  $\eta = p(\text{ip}\xi + \tau) = \eta_R + i\eta_I, \eta_R, \eta_I$  分别为  $\eta$  的实部和虚部,  $p$  为复数,假定  $p = A + iV, \text{ip}^2 = B + iK, A, V, B$  和  $K$  为实数,显然有  $B = -2AV, K = A^2 - V^2$ ,那么  $\eta + \eta^* = 2\eta_R = 2B\xi + 2A\tau$ ,这样  $f^{(2)}$  为

$$f^{(2)} = \frac{3}{4A^2} \exp(2B\xi + 2A\tau), \quad (23)$$

代入方程(16)取  $\epsilon = 1$ ,得到两单孤子解为

$$u_1 = 2A \sqrt{\frac{1}{3}} \exp[\chi(A^2 - V^2)\xi + iV\tau + i\theta_1] \times \text{sech}[A(\tau - 2V\xi) + \eta_0], \quad (24a)$$

$$u_2 = 2A \sqrt{\frac{1}{3}} \exp[\chi(A^2 - V^2)\xi + iV\tau + i\theta_2] \times \text{sech}[A(\tau - 2V\xi) + \eta_0], \quad (24b)$$

将方程(24a)(24b)代入(5e)(5f)得到孤子慢变的包络场.

### 4.2. 两孤子解

对两孤子解,假定孤子解关于  $\epsilon$  的级数为

$$g_1 = \epsilon g_1^{(1)} + \epsilon^3 g_1^{(3)},$$

$$g_2 = \epsilon g_2^{(1)} + \epsilon^3 g_2^{(3)},$$

$$f = 1 + \epsilon^2 f^{(2)} + \epsilon^4 f^{(4)}, \quad (25)$$

比较  $\epsilon$  的同次幂, 得到

$$\begin{aligned} \epsilon (iD_\xi + D_\tau^2 \chi g_1^{(1)} \cdot 1) &= 0, \\ (iD_\xi + D_\tau^2 \chi g_2^{(1)} \cdot 1) &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 :D_\tau^2(1 \cdot f^{(2)} + f^{(2)} \cdot 1) \\ = \chi (g_1^{(1)} g_1^{(1)*} + 2g_2^{(1)} g_2^{(1)*}), \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} D_\tau^2(1 \cdot f^{(2)} + f^{(2)} \cdot 1) \\ = \chi (2g_1^{(1)} g_1^{(1)*} + g_2^{(1)} g_2^{(1)*}), \end{aligned} \quad (27b)$$

$$\epsilon^3 (iD_\xi + D_\tau^2 \chi g_1^{(1)} \cdot f^{(2)} + g_1^{(3)} \cdot 1) = 0 \quad (28a)$$

$$(iD_\xi + D_\tau^2 \chi g_2^{(1)} \cdot f^{(2)} + g_2^{(3)} \cdot 1) = 0, \quad (28b)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^4 :D_\tau^2(1 \cdot f^{(4)} + f^{(2)} \cdot f^{(2)} + f^{(4)} \cdot 1) \\ = \chi (g_1^{(1)} g_1^{(3)*} + g_1^{(3)} g_1^{(1)*} \\ + 2g_2^{(1)} g_2^{(3)*} + 2g_2^{(3)} g_2^{(1)*}), \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} D_\tau^2 \tau(1 \cdot f^{(4)} + f^{(2)} \cdot f^{(2)} + f^{(4)} \cdot 1) \\ = \chi (2g_1^{(1)} g_1^{(3)*} + 2g_1^{(3)} g_1^{(1)*} \\ + g_2^{(1)} g_2^{(3)*} + g_2^{(3)} g_2^{(1)*}). \end{aligned} \quad (29b)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^5 (iD_\xi + D_\tau^2 \chi g_1^{(1)} \cdot f^{(4)} + g_1^{(3)} \cdot f^{(2)}) &= 0, \\ (iD_\xi + D_\tau^2 \chi g_2^{(1)} \cdot f^{(4)} + g_2^{(3)} \cdot f^{(2)}) &= 0, \end{aligned} \quad (30a)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^6 :D_\tau^2(f^{(4)} \cdot f^{(2)} + f^{(2)} \cdot f^{(4)}) \\ = \chi (g_1^{(3)} g_1^{(3)*} + 2g_2^{(3)} g_2^{(3)*}), \end{aligned} \quad (31a)$$

$$\begin{aligned} D_\tau^2(f^{(4)} \cdot f^{(2)} + f^{(2)} \cdot f^{(4)}) \\ = \chi (2g_1^{(3)} g_1^{(3)*} + g_2^{(3)} g_2^{(3)*}), \end{aligned} \quad (31b)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^7 (iD_\xi + D_\tau^2 \chi g_1^{(3)} \cdot f^{(4)}) &= 0, \\ (iD_\xi + D_\tau^2 \chi g_2^{(3)} \cdot f^{(4)}) &= 0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\epsilon^8 :D_\tau^2(f^{(4)} \cdot f^{(4)}) = 0. \quad (33)$$

利用算符  $D$  (见文献[11])的性质, 对方程 (26)–(33) 进行计算, 得到

$$\begin{aligned} g_1^{(1)} &= \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2), \\ g_2^{(1)} &= i\exp(\eta_1) + i\exp(\eta_2), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} g_1^{(3)} &= \frac{\chi (p_2 - p_1)^2}{(p_1^* + p_2)(p_1^* + p_1)^2} \exp(\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2) \\ &+ \frac{\chi (p_2 - p_1)^2}{(p_2^* + p_2)(p_2^* + p_1)^2} \\ &\times \exp(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2^*), \end{aligned} \quad (35a)$$

$$g_2^{(3)} = ig_1^{(3)}, \quad (35b)$$

$$\begin{aligned} f^{(2)} &= 3 \left[ \frac{\exp(\eta_1 + \eta_1^*)}{(p_1 + p_1^*)^2} + \frac{\exp(\eta_1 + \eta_2^*)}{(p_1 + p_2^*)^2} \right. \\ &\left. + \frac{\exp(\eta_1^* + \eta_2)}{(p_1^* + p_2)^2} + \frac{\exp(\eta_2 + \eta_2^*)}{(p_2 + p_2^*)^2} \right], \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} f^{(4)} &= \frac{\chi (p_2 - p_1)(\chi p_1^* - p_2^*)}{(p_1^* + p_1)(\chi p_1^* + p_2)(\chi p_2 + p_2^*)(\chi p_2^* + p_1)} \\ &\times \exp(\eta_1 + \eta_2 + \eta_1^* + \eta_2^*), \end{aligned} \quad (37)$$

式中  $\eta_j = ip_j^2 \xi + p_j \tau$ ,  $j = 1, 2$ ,  $p_j$  为复数, 将 (34)–(37) 式代入 (25) 式, 取  $\epsilon = 1$ , 得到两孤子解

$$\begin{aligned} u_1 &= (g_1^{(1)} + g_1^{(3)}) \chi (1 + f^{(2)} + f^{(4)}), \\ u_2 &= (g_2^{(1)} + g_2^{(3)}) \chi (1 + f^{(2)} + f^{(4)}). \end{aligned} \quad (38)$$

采用同样的方法, 还可以得到  $N$  孤子的精确解.

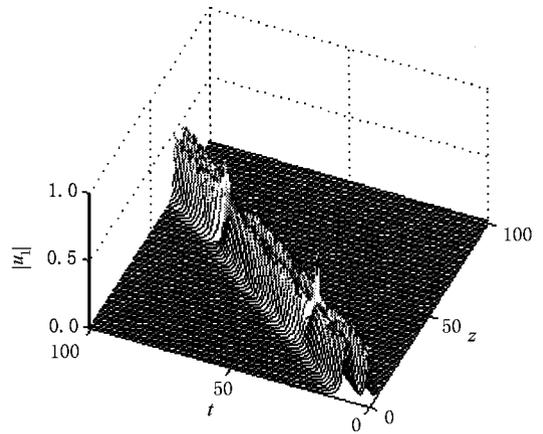


图 1 两孤子解  $u_1$  对归一化时间和距离的演化关系图

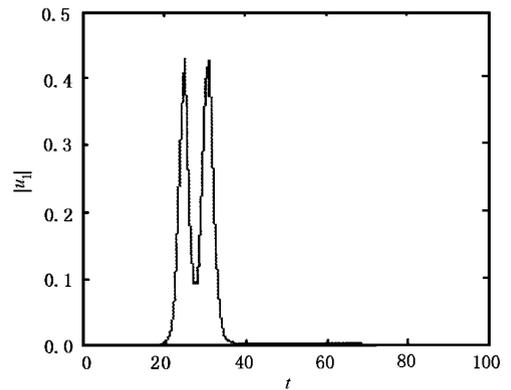


图 2 某点两孤子解  $u_1$  对归一化时间的变化关系

### 4.3. 两孤子解的波形演化

公式中  $\eta_j = ip_j^2 \xi + p_j \tau$ ,  $j = 1, 2$ , 假定  $ip_j^2 = B_j + iK_j$ ,  $p_j = A_j + iV_j$ , 这里  $B_j, K_j, A_j$  和  $V_j$  均为归一化无量纲的量, 它们之间的关系是  $B_j = -2A_j V_j$ ,  $K_j = A_j^2 - V_j^2$ . 图 1 是  $A_1 = 0.825, V_1 = 0.6$  时两孤子解  $u_1$  随归一化距离和归一化时间的三维演化图, 图 2 表示光纤中某点波包随时间的演化图; 图 3 是  $A_2 = 0.786, V_2 = 0.61$  时两孤子解  $u_2$  随归一化距离和归一化时

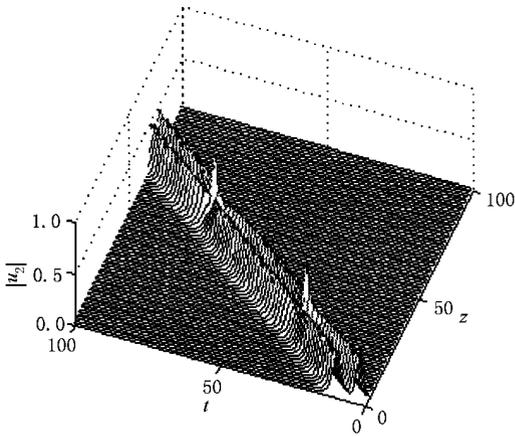


图3 两孤子解  $u_2$  对归一化时间和距离的演化关系图

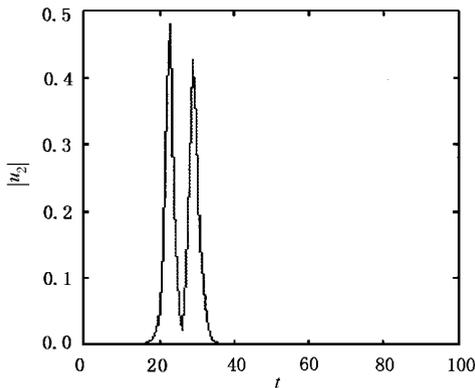


图4 某点两孤子解  $u_2$  对归一化时间的变化关系

间的三维演化图,图4表示光纤中某点波包随时间的演化图;从两孤子解的演化图,可以看出,两孤子解的波形是由两个波组成,之间的距离开始变小,相互吸

引,直至发生碰撞,形成一尖的脉冲后分开,距离再一次变小,碰撞,周而复始,波形周期变化。

## 5. 讨 论

我们对多波长系统孤子耦合方程的可积性进行了分析,并精确计算了单孤子和两孤子解以及两孤子解的演化图.分析表明,多波长系统中,不计高阶色散和非线性 Kerr 色散的情况下(即自变陡效应),耦合方程存在  $L_{ax}$  对,具有可积性,两孤子解的波形由两个波组成,相互吸引,碰撞后再分开,波形变化具有周期性。

我们的分析计算中,忽略了光纤的双折射效应,根据 Maxwell 方程推导了具有非线性效应光纤中多波长系统孤子耦合方程,由文献[8]的方法,得出了耦合方程的  $L_{ax}$  对;且该方程具有 Galilei 不变性,从而说明了该耦合方程具有可积性;再根据 Hirota 双线性变换方法,得出了单孤子和双孤子的精确解.与文献[7,16]进行比较,文献[7,16]研究的是双折射光纤中的矢量孤子的可积性,而本文忽略光纤的双折射,研究多波长或者多信道系统,孤子耦合方程的可积性,比较双折射光纤中矢量孤子耦合方程的形式与本文多波长系统耦合方程及解,其方程形式不一样, $L_{ax}$  对和精确解的形式也不相同.由于波分复用多波长或者多信道系统中,光纤的双折射具有随机性,一般来说,在比特率太高的情况下,双折射效应可以忽略,但孤子之间的相互作用,是危害系统的一个重要因素,因此分析多波长系统中孤子脉冲的波形演化,非常必要。

[1] Manakov S V and Eksp Z 1973 *Teor. Fiz.* **65** 1392  
 [2] Baker S M, Elgin J N and Gibbons 2000 *Phys. Rev. E* **62** 4325  
 [3] Atai Javid, Malomed Boris A 2000 *Phys. Rev. E* **62** 8713  
 [4] Yang J K 2002 *Phys. Rev. E* **65** 036606  
 [5] Abdullaev F K et al 2000 *J. Opt. Am. B* **17** 1117  
 [6] Li Q L and Chen X D 2004 *Chin. J. Laser A* **31** 199  
 [7] Lakshmanan M and Kanna 2001 *J. Phys.* **57** 885  
 [8] Ablowitz M J and Clarkson 1992 *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (Cambridge University Press) p35  
 [9] Wu J and Rudnick I 1985 *Phys. Rev. Lett. A* **55** 204  
 [10] Zhou Z J and Li Z B 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 262 (in Chinese)

[周振江、李志斌 2003 物理学报 **52** 262]  
 [11] Larraz A and Putterman S 1984 *Phys. Rev. Lett. A* **103** 15  
 [12] Hammack J and Segur H 1978 *J. Fluid. Mech.* **84** 337  
 [13] Li Z B and Pan S Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 402 (in Chinese)  
 [李志斌、潘素起 2001 物理学报 **50** 402]  
 [14] Xu B Z, Li Y K and Yan X L 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1942 (in Chinese)[徐炳振、李悦科、阎循领 1998 物理学报 **47** 1942]  
 [15] Li H M 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 465 (in Chinese)[李画眉 2002 物理学报 **51** 465]  
 [16] Vinoj M N, Kuriakose 2000 *Phys. Rev. E* **62** 8719

# Integrability aspects of solitons ' coupled equation in multi-wavelength system

Li Qi-Liang<sup>1)2)</sup> Zhu Hai-Dong<sup>1)</sup> Tang Xiang-Hong<sup>1)</sup> Li Cheng-Jia<sup>3)</sup> Wang Xiao-Jun<sup>1)</sup> Lin Li-Bin<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>( *The Communication College of Hangzhou Institute of Electronics Engineering , Hangzhou 310037 ,China* )

<sup>2)</sup>( *Institute of Physics Science and Technology ,Sichuan University , Chengdu 610065 ,China* )

<sup>3)</sup>( *Science College of Hangzhou Institute of Electronics Engineering , Hangzhou 310037 ,China* )

( Received 20 May 2002 ; revised manuscript received 22 July 2003 )

## Abstract

We have studied the integrability aspects of solitons ' coupled equation in a multi-wavelength system with Lax pair , by using Hirota bilinearization , we obtain one-soliton and two-solitons solutions .

**Keywords** : Lax pair , Hirota bilinearization , integrability aspects

**PACC** : 0340K , 0220