第 53 卷 第 6 期 2004 年 6 月
1000-3290/2004/53(06)/1629-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.53,No.6,June,2004

Zakharov 方程的显式行波解*

赵长海[1)2)] 盛正卯[1)†]

[1)] (浙江大学物理系,杭州 310027)

[2)] (江苏南通师范学院物理系,南通 226007)

(2003 年 7 月 24 日收到;2003 年 9 月 24 日收到修改稿)

借助 Mathematica 软件,采用双函数法和吴文俊消元法,获得了等离子体物理中的重要方程组 Zakharov 方程的十组行波解,其中包括包络孤波解,孤子解.

关键词:Zakharov 方程, 孤子解

PACC:0340K, 0290

1. 引 言

Zakharov 方程[1]被认为是描述非线性系统中低频波与高频波耦合的最完善的模型之一.它是等离子体物理中的重要方程组[2—4],其中的高频模与低频模分别描述电子声波和离子声波,并且已经知道它具有孤子解.近年来已发展了许多求解非线性发展方程孤子解的方法,例如反散射方法,齐次平衡法等[5—8].文献[9]用三角函数法得到了非线性发展方程的一批解,文献[10—12]用双函数法找到了非线性发展方程的广泛的孤波解.本文借助 Mathematica 软件,采用双函数法和吴文俊消元法,求解 Zakharov 方程组的行波解.

2. Zakharov 方程的行波解

Zakharov 方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 n}{\partial t^2}-c_s^2\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}=\beta\frac{\partial^2|E|^2}{\partial x^2}\\&\mathrm{i}\frac{\partial E}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}-\delta nE=0\end{aligned}\right\}(\alpha,\beta>0), \tag{1}$$

在等离子体物理中,E 代表电场强度的快变振幅,我们设它为包络波解.而粒子数密度扰动 n 取为一般行波解.即令

$$n=n(\xi),E=\phi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\xi=x-c_g t. \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式得到

$$\begin{aligned}&(c_g^2-c_s^2)\frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}\xi^2}=\beta\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2},\\&\alpha\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}+\mathrm{i}(2\alpha k-c_g)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}+(\omega-\alpha k^2)\phi-\delta n\phi=0.\end{aligned} \tag{3}$$

(3)式的第一个方程直接积分,取积分常量为零,得

$$(c_g^2-c_s^2)n=\beta\phi^2, \tag{4}$$

对于实函数 ϕ 上式成立,要求 $c_g<c_s$(亚声速)时,n 取负号,$c_g>c_s$(超声速)时,n 取正号.

(4)式代入(3)式第二方程有

$$\begin{aligned}&\alpha\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}+\mathrm{i}(2\alpha k-c_g)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\\&+(\omega-\alpha k^2)\phi+\frac{\beta\delta}{c_g^2-c_s^2}\phi^3=0.\end{aligned} \tag{5}$$

令

$$k=\frac{c_g}{2\alpha},\omega-\alpha k^2=-\gamma,(\gamma>0), \tag{6}$$

则方程(5)化为

$$-\alpha\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}+\gamma\phi-\frac{\beta\delta}{c_g^2-c_s^2}\phi^3=0. \tag{7}$$

方程(7)与文献[7]中 S^3 方程和 φ^4 方程在行波方法下得到的方程(14—15)具有相同的形式.

方法 1

由双函数法设方程(7)有如下形式的行波解

$$\phi(\xi)=\sum_{i=1}^{m}\sinh^{i-1}\omega(B_i\sinh\omega+A_i\cosh\omega)+A_0. \tag{8}$$

* 国家自然科学基金(批准号:10147103),国家'973'非线性科学项目(批准号:G2000077305)资助的课题.

† Email:zmsheng@css.zju.edu.cn;电话:0571-88273276.

通过平衡方程(7)的线性最高阶导数项和非线性的次数易知 m 为 1,所以

$$\phi(\xi) = B_1\sinh\omega + A_1\cosh\omega + A_0, \tag{9}$$

其中 A_0, A_1, B_1 为待定常数,而 $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\xi}$ 可以有多种选择.若选择

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{d\xi} = \sinh\omega, \tag{10}$$

并将(9),(10)式代入(7)式中,且令其中的常数项以及各次项的系数为零,则得到代数方程组

$$\gamma A_0 - \frac{\beta\delta A_0^3}{-c_g^2+c_s^2} - \frac{3\beta\delta A_0A_1^2}{-c_g^2+c_s^2} = 0,$$

$$-\alpha B_1 + \gamma B_1 - \frac{3\beta\delta A_0^2B_1}{-c_g^2+c_s^2} - \frac{3\beta\delta A_1^2B_1}{-c_g^2+c_s^2} = 0,$$

$$-\frac{3\beta\delta A_0A_1^2}{-c_g^2+c_s^2} - \frac{3\beta\delta A_0B_1^2}{-c_g^2+c_s^2} = 0,$$

$$-2\alpha B_1 - \frac{3\beta\delta A_1^2B_1}{-c_g^2+c_s^2} - \frac{\beta\delta B_1^3}{-c_g^2+c_s^2} = 0,$$

$$\gamma A_1 - \frac{3\beta\delta A_0^2A_1}{-c_g^2+c_s^2} - \frac{\beta\delta A_1^3}{-c_g^2+c_s^2} = 0,$$

$$\frac{6\beta\delta A_0A_1B_1}{-c_g^2+c_s^2} = 0,$$

$$-2\alpha A_1 - \frac{\beta\delta A_1^3}{-c_g^2+c_s^2} - \frac{3\beta\delta A_1B_1^2}{-c_g^2+c_s^2} = 0.$$

利用吴文俊消元法[13]解上述关于 A_0, A_1, B_1 的超待定代数方程组得

$$A_0 = 0, A_1 = 0, B_1 = \pm\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}, \alpha = \gamma;$$

$$A_0 = 0, B_1 = 0, A_1 = \pm\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}, \alpha = -\frac{1}{2}\gamma;$$

$$A_0 = 0, A_1 = B_1 = \pm\frac{\sqrt{\alpha}\sqrt{c_g^2-c_s^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}, \alpha = -2\gamma.$$

对(10)式进行分离变量并且两边积分,积分常数取为零得

$$\sinh\omega = -\operatorname{csch}\xi, \cosh\omega = -\coth\xi,$$

于是方程(7)有解

1) $\phi(\xi) = \mp\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\operatorname{csch}\xi,$

2) $\phi(\xi) = \mp\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\coth\xi,$

3) $\phi(\xi) = \mp\frac{\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\coth\xi \mp \frac{\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\operatorname{csch}\xi,$

其中解 1)和 2)在文献[7]中已经给出,但解 3)是新解.进一步由(4)式及(2)式得 n 和 E 的解为

1) $n = \frac{2\gamma}{\delta}\operatorname{csch}^2(x-c_gt),$

$$E = \mp\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\operatorname{csch}(x-c_gt)\cdot e^{i(kx-\omega t)},$$

2) $n = \frac{2\alpha}{\delta}\coth^2(x-c_gt),$

$$E = \mp\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\coth(x-c_gt)\cdot e^{i(kx-\omega t)},$$

3) $n = \frac{-\gamma}{\delta}\coth^2\frac{(x-c_gt)}{2},$

$$E = \left(\mp\frac{\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\coth(x-c_gt) \mp \frac{\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\operatorname{csch}(x-c_gt)\right)\cdot e^{i(kx-\omega t)}.$$

这三组解在 $\xi=0$ 处发散,表明此时密度 n 和电场 E 由于不稳定引起畸变.

如令

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\xi} = \cosh\omega, \tag{11}$$

将(9),(11)式代入(7)式中,并令其中的常数项及各次项的系数为零,同样可以得到一组代数方程组,并利用吴文俊消元法解关于 A_0, A_1, B_1 的超待定代数方程组得

$$A_0 = 0, A_1 = 0, B_1 = \pm\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}, \alpha = \gamma/2;$$

$$A_0 = 0, B_1 = 0, A_1 = \pm\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}, \gamma = -\alpha;$$

$$A_0 = 0, A_1 = B_1 = \pm\frac{\sqrt{\alpha}\sqrt{c_g^2-c_s^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}, \alpha = 2\gamma.$$

对(11)式进行分离变量并且两边积分,积分常数取为零得

$$\sinh\omega = -\cot\xi, \cosh\omega = -\csc\xi,$$

于是方程(7)有周期解

4) $\phi(\xi) = \mp\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\cot\xi,$

5) $\phi(\xi) = \mp\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\csc\xi,$

6) $\phi(\xi) = \mp\frac{\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\cot\xi \mp \frac{\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\csc\xi.$

进一步由(4)式及(2)式得 n 和 E 的解为

4) $n=\frac{2\alpha}{\delta}\cot^2(x-c_g t)$,

$$E=\mp\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\cot(x-c_g t)\cdot e^{i(kx-\omega t)};$$

5) $n=\frac{2\alpha}{\delta}\csc^2(x-c_g t)$,

$$E=\mp\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\csc(x-c_g t)\cdot e^{i(kx-\omega t)};$$

6) $n=\frac{\alpha}{2\delta}(-\cot(x-c_g t)-\csc(x-c_g t))^2$,

$$E=\Big(\mp\frac{\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\cot(x-c_g t)\mp\frac{\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\csc(x-c_g t)\Big)\cdot e^{i(kx-\omega t)}.$$

这组解粒子数密度 n 和电场 E 具有周期性的不稳定畸变，其密度均匀的背景上叠加一个周期的梳状分布.那么是否可以利用双函数法求解稳定的孤子解呢？答案是肯定的.

方法 2

由双函数法，设方程(7)有如下形式的行波解

$$\varphi(\xi)=B_1\sin\omega+A_1\cos\omega+A_0,\tag{12}$$

并令

$$\frac{d\omega}{d\xi}=\sin\omega,\tag{13}$$

将(12)，(13)式代入(7)式中，并令其中的常数项以及各次项的系数为零，得到如下代数方程组：

$$\gamma A_0-\frac{\beta\delta A_0^3}{-c_g^2+c_s^2}-\frac{3\beta\delta A_0A_1^2}{-c_g^2+c_s^2}=0,$$

$$-\alpha B_1+\gamma B_1-\frac{3\beta\delta A_0^2B_1}{-c_g^2+c_s^2}-\frac{3\beta\delta A_1^2B_1}{-c_g^2+c_s^2}=0,$$

$$\frac{3\beta\delta A_0A_1^2}{-c_g^2+c_s^2}-\frac{3\beta\delta A_0B_1^2}{-c_g^2+c_s^2}=0,$$

$$2\alpha B_1+\frac{3\beta\delta A_1^2B_1}{-c_g^2+c_s^2}-\frac{\beta\delta B_1^3}{-c_g^2+c_s^2}=0,$$

$$\gamma A_1-\frac{3\beta\delta A_0^2A_1}{-c_g^2+c_s^2}-\frac{\beta\delta A_1^3}{-c_g^2+c_s^2}=0,$$

$$\frac{6\beta\delta A_0A_1B_1}{-c_g^2+c_s^2}=0,$$

$$2\alpha A_1+\frac{\beta\delta A_1^3}{-c_g^2+c_s^2}-\frac{3\beta\delta A_1B_1^2}{-c_g^2+c_s^2}=0.$$

解上述关于 A_0，A_1，B_1 的超待定代数方程组得

$$A_0=0,B_1=0,$$

$$A_1=\pm\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}},\alpha=-\gamma/2;$$

$$A_0=0,A_1=0,$$

$$B_1=\pm\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}},\alpha=\gamma.$$

对(13)式进行分离变量并且两边积分，积分常数取为零得

$$\sin\omega=\mathrm{sech}\xi,\cos\omega=\pm\tanh\xi,$$

于是方程(7)有如下解：

7) $$\phi(\xi)=\mp\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\tanh\xi,$$

8) $$\phi(\xi)=\mp\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\mathrm{sech}\xi.$$

上述二解即是文献[7]中的解(26)和(27).进一步由(4)式及(2)式得到 n 和 E 的孤子解为

7) $n=\frac{2\alpha}{\delta}\tanh^2(x-c_g t)$,

$$E=\mp\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\tanh(x-c_g t)\cdot e^{i(kx-\omega t)};$$

8) $n=-\frac{2\alpha}{\delta}\mathrm{sech}^2(x-c_g t)$,

$$E=\mp\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha c_g^2-\alpha c_s^2}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\delta}}\mathrm{sech}(x-c_g t)\cdot e^{i(kx-\omega t)}.$$

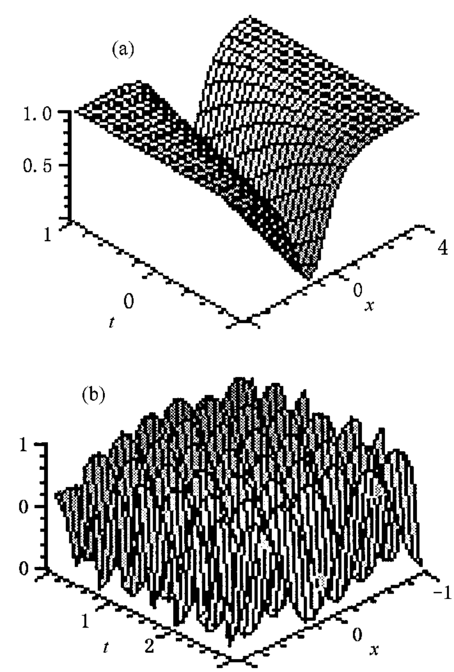

图 1　(a)结果 7)中系数为 1 时孤波解 n；(b)结果 7)中系数取 1 时包络波解 E

其中密度解 7)是‘暗’孤子，即整体密度有提高的同时，有凹陷.解 8)是通常的孤子解，已用其他方法得

到[14].

方法 3

由双函数法,设方程(7)有如下形式的行波解

$$\varphi(\xi) = B_1 f(\xi) + A_1 g(\xi) + A_0, \qquad (14)$$

并取 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 为修正的双曲函数如下:

情况 1

$$f(\xi) = \frac{1}{r+\sinh\xi}, g(\xi) = \frac{\cosh\xi}{r+\sinh\xi},$$

其中 ξ 为行波变量, r 为参数,可以调整波形的变化. 则易知

$$g^2(\xi) = f^2(\xi) + (1 - rf(\xi))^2,$$

而且

$$f'(\xi) = -f(\xi)g(\xi),$$

$$g'(\xi) = -f^2(\xi) + rf(\xi) - r^2 f^2(\xi). \qquad (15)$$

将(14),(15)式代入(7)式中,并令其中的常数以及各次项的系数为零,得到代数方程组

$$\gamma A_0 - \frac{\beta\delta A_0^3}{-c_g^2+c_s^2} - \frac{3\beta\delta A_0 A_1^2}{-c_g^2+c_s^2} = 0,$$

$$\gamma A_1 - \frac{3\beta\delta A_0^2 A_1}{-c_g^2+c_s^2} - \frac{\beta\delta A_1^3}{-c_g^2+c_s^2} = 0,$$

$$r\alpha A_1 + \frac{2r\beta\delta A_1^3}{-c_g^2+c_s^2} - \frac{6\beta\delta A_0 A_1 B_1}{-c_g^2+c_g^2} = 0,$$

$$-\alpha B_1 + \gamma B_1 + \frac{6r\beta\delta A_0 A_1^2}{-c_g^2+c_s^2} - \frac{3\beta\delta A_0^2 B_1}{-c_g^2+c_s^2} - \frac{3\beta\delta A_1^2 B_1}{-c_g^2+c_s^2} = 0,$$

$$3r\alpha B_1 - \frac{3\beta\delta A_0 A_1^2}{-c_g^2+c_s^2} - \frac{3r^2\beta\delta A_0 A_1^2}{-c_g^2+c_s^2} + \frac{6r\beta\delta A_1^2 B_1}{-c_g^2+c_s^2} - \frac{3\beta\delta A_0 B_1^2}{-c_g^2+c_s^2} = 0,$$

$$-2\alpha A_1 - 2r^2\alpha A_1 - \frac{\beta\delta A_1^3}{-c_g^2+c_s^2} - \frac{r^2\beta\delta A_1^3}{-c_g^2+c_s^2} - \frac{3\beta\delta A_1 B_1^2}{-c_g^2+c_s^2} = 0,$$

$$-2\alpha B_1 - 2r^2\alpha B_1 - \frac{3\beta\delta A_1^2 B_1}{-c_g^2+c_s^2} - \frac{3r^2\beta\delta A_1^2 B_1}{-c_g^2+c_s^2} - \frac{\beta\delta BD_1^3}{-c_g^2+c_s^2} = 0.$$

利用吴文俊消元法解上述关于 A_0, A_1, B_1 的超待定代数方程组得

$$A_0 = 0, B_1 = 0, r = \pm \mathrm{i},$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{\gamma}\sqrt{-c_g^2+c_s^2}}{\sqrt{\beta\delta}}, \alpha = -2\gamma.$$

(已舍去和前面计算结果相似的答案)

将以上结果代入(14)式中,则方程(7)有如下孤波解:

9) $$\varphi(\xi) = \pm\sqrt{\gamma}\sqrt{-c_g^2+c_s^2}\frac{\cosh\xi}{\sqrt{\beta\delta}(\pm \mathrm{i} + \sinh\xi)}.$$

由(4)式及(2)式得到 n 和 E 的解为

9) $$n = -\gamma\frac{\cosh^2\xi}{\delta(\pm \mathrm{i}+\sinh\xi)^2};$$

$$E = \pm\sqrt{\gamma}\sqrt{-c_g^2+c_s^2}\frac{\cosh\xi}{\sqrt{\beta\delta}(\pm \mathrm{i}+\sinh\xi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}.$$

这是一个新的孤子解,其实部如图 2 所示, n 为单孤子解, E 为包络孤子.

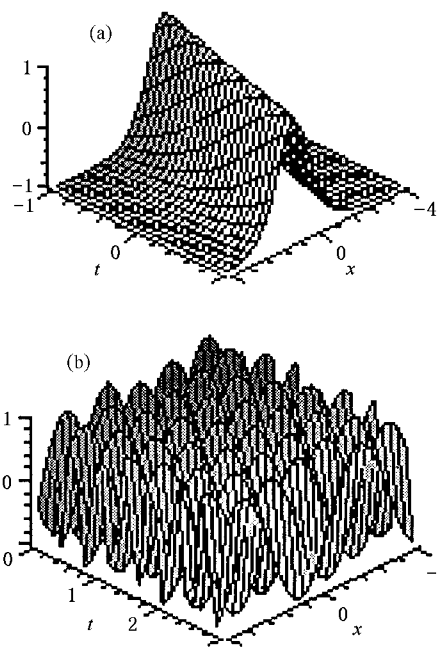

图 2 (a)结果 9)中系数取 1 时的孤立波解 n;(b)结果 9)中系数取 1 时的包络波解 E

情况 2

$$f(\xi) = \frac{1}{r+\sin\xi}, g(\xi) = \frac{\cos\xi}{r+\sin\xi},$$

其中 ξ 为行波变量, r 为参数,可以调整波形的变化.则易知

$$g^2(\xi) = f^2(\xi) - (1 - rf(\xi))^2,$$

并且

$$f'(\xi) = -f(\xi)g(\xi),$$

$$g'(\xi) = -f^2(\xi) - rf(\xi) + r^2 f^2(\xi). \qquad (16)$$

将(14),(16)式代入(7)式中,并令其中的常数以及各次项的系数为零,得到代数方程组

$$\gamma A_0 - \frac{\beta\delta A_0^3}{-c_g^2+c_s^2} + \frac{3\beta\delta A_0 A_1^2}{-c_g^2+c_s^2} = 0,$$

$$\gamma A_1-\frac{3\beta\delta A_0^2A_1}{-c_g^2+c_s^2}+\frac{\beta\delta A_1^3}{-c_g^2+c_s^2}=0,$$

$$-r\alpha A_1-\frac{2r\beta\delta A_1^3}{-c_g^2+c_s^2}-\frac{6\beta\delta A_0A_1B_1}{-c_g^2+c_g^2}=0,$$

$$\alpha B_1+\gamma B_1-\frac{6r\beta\delta A_0A_1^2}{-c_g^2+c_s^2}$$

$$-\frac{3\beta\delta A_0^2B_1}{-c_g^2+c_s^2}+\frac{3\beta\delta A_1^2B_1}{-c_g^2+c_s^2}=0,$$

$$-3r\alpha B_1-\frac{3\beta\delta A_0A_1^2}{-c_g^2+c_s^2}+\frac{3r^2\beta\delta A_0A_1^2}{-c_g^2+c_s^2}$$

$$-\frac{6r\beta\delta A_1^2B_1}{-c_g^2+c_s^2}-\frac{3\beta\delta A_0B_1^2}{-c_g^2+c_s^2}=0,$$

$$-2\alpha A_1+2r^2\alpha A_1-\frac{\beta\delta A_1^3}{-c_g^2+c_s^2}$$

$$+\frac{r^2\beta\delta A_1^3}{-c_g^2+c_s^2}-\frac{3\beta\delta A_1B_1^2}{-c_g^2+c_s^2}=0,$$

$$-2\alpha B_1+2r^2\alpha B_1-\frac{3\beta\delta A_1^2B_1}{-c_g^2+c_s^2}$$

$$+\frac{3r^2\beta\delta A_1^2B_1}{-c_g^2+c_s^2}-\frac{\beta\delta B_1^3}{-c_g^2+c_s^2}=0.$$

求解上述关于 A_0,A_1,B_1 的超待定代数方程组得

$$A_0=0,B_1=0,r=\pm 1,$$

$$A_1=\pm\frac{\sqrt{\gamma}\sqrt{-c_g^2+c_s^2}}{\sqrt{\beta\delta}},\alpha=2\gamma.$$

(已舍去和前面计算结果相似的答案)

将以上结果代入(14)式中,则方程(7)有如下解:

10) $$\varphi(\xi)=\pm\sqrt{\gamma}\sqrt{c_g^2-c_s^2}\frac{\cos\xi}{\sqrt{\beta\delta}(\pm 1+\sin\xi)}.$$

进一步由(4)式及(2)式得

10) $$n=\gamma\frac{\cos^2\xi}{\delta(\pm 1+\sin\xi)^2};$$

$$E=\pm\sqrt{\gamma}\sqrt{c_g^2-c_s^2}\frac{\cos\xi}{\sqrt{\beta\delta}(\pm 1+\sin\xi)}e^{i(kx-\omega t)}.$$

此解在 $\sin\xi=\mp 1$ 时有奇点,即密度会出现不稳定而畸变.

3. 讨　　论

以上结果表明双函数方法,不仅可以用于求解一元非线性可积方程,而且可以用来求解非线性方程组的各种解.我们获得了 Zakharov 方程组的多组新的行波解,包括孤波解和周期性解,其中双函数可以选择双曲函数,也可以选择三角函数等.从所得解可以发现,由 Zakharov 方程组描述的等离子体密度和电场不仅具有通常的孤波解,而且密度函数存在解 7)所示的在非线性光学中存在的'暗'孤子解,即密度整体有提高而局部下降,而且这样的局域解是以行波的形式运动着的.除了孤子解以外,我们还得到了周期性的密度畸变(梳状)解,由于密度的畸变造成离子和电子分布的不均匀,从而出现电场的畸变,而且这个畸变是周期性的,匀速运动着的.当然等离子体密度和电场以那一种解的形式出现决定于体系的初始状态,我们的解只能给问题的解决提供启示.

另一方面 Zakharov 方程的行波 Ansatz(7)与文献[7]中 S^3 方程和 φ^4 方程在行波方法下得到的方程(14—15)具有相同的形式,表明它们之间存在着紧密的联系,文献[7]中所得到的解可以用来构造 Zakharov 方程的解,反过来本文得到的 6 组新解也可以构造出 S^3 方程和 φ^4 方程的行波解.

感谢审稿人提供了文献[7]并指出了两者间的联系.

[1] Zakharov V E 1972 *Sov. Phys. JETP* **35** 908

[2] Thornhill S G *et al* 1978 *Phys. Rep.* **43** 43

[3] He X T and Zheng C Y 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 78

[4] He X T, Zheng C Y and Zhu S P, 2002 *Phys. Rev.* E **66** 037201

[5] Fan E G and Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[6] Zhang J F 2000 *Acta Phys. Sin.* **50** 1648 (in Chinese) [张解放 2000 物理学报 **50** 1648]

[7] Wang M H and Wang K L 1985 *Phys. Lett.* **108**A 43
Wu Z Y and Wang K L 1986 *KexueTongbo* **31** 894 (in Chinese) [吴自玉、汪克林 1986 科学通报 **31** 894]

[8] Zhang J L, Wang Y M, Wang M L and Fang Z D 2003 *Chin. Phys.* **12** 245

[9] Yan Z Y, Zhang H Q and Fan E G, 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1 (in Chinese) [阎振亚、张鸿庆、范恩贵 1999 物理学报 **48** 1]

[10] Zheng Y and Zhang H Q 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 389 (in Chinese) [郑　、张鸿庆 2000 物理学报 **49** 389]

[11] Guan W and Zhang H Q 2001 *Appl. Math. J Chinese Univ* A **16** 163 (in Chinese) [关伟、张鸿庆 2001 高校应用数学学报 A 辑 **16** 163]

[12] Huang W H, Zhang J F and Sheng Z M 2003 *J. Zhejiang Univ.* **30**

145 (in Chinese) [黄文华、张解放、盛正卯 2003 浙江大学学报理学版 **30** 145]

[13] Guan A W 1994 Lecture on Wu Wenjun-Elimination Method (Beijing : Publisher of Beijing University of Science and Technology) (in Chinese) [关蔼云 1994 吴消元法讲义(北京理工大学出版社)]

[14] Wang D Y, Wu D J and Huang G L 2000 *Solitary Waves in Space Plasma* (Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [王德 、吴德金、黄光力 2000 空间等离子体中的孤立波(上海 :上海科技教育出版社)]

Explicit travelling wave solutions for Zakharov equations *

Zhao Chang-Hai[1)2)] Sheng Zheng-Mao[1)]

[1)] (*Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou* 310027, *China*)

[2)] (*Department of Physics, Nantong Teachers University, Nantong* 226007, *China*)

(Received 24 July 2003 ; revised manuscript received 24 September 2003)

Abstract

In this paper, several new traveling wave solutions for Zakharov equations are obtained by using bi-function method and Wu-elimination method, which include periodic traveling wave solutions and solitary wave solutions. Their physical meaning is also discussed.

Keywords : Zakharov equations, soliton solutions

PACC : 0340K, 0290

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10147103) and Chinese National Basic Research Project (Grant No. G2000077305).