第 53 卷 第 6 期 2004 年 6 月
1000-3290/2004/53(06)/1635-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53,No.6,June,2004

一类高维耦合的非线性演化方程的简单求解*

李德生[1)2)] 张鸿庆[1)]

1)(大连理工大学应用数学系,大连 116024)

2)(沈阳工业大学理学院,沈阳 110023)

(2003 年 6 月 30 日收到;2003 年 7 月 29 日收到修改稿)

利用一个简单的变换,一类高维耦合的非线性演化方程可以被约化为一低维的简单方程,将已有的求解法应用于简单方程,十分简捷的获得了原方程大量的精确解.

关键词:非线性耦合方程,精确解,tanh 函数方法

PACC:0340K,0290,1190

1.引 言

多年来,在非线性演化方程的求解方面提出了很多有效方法,如反散射方法,Bäcklund 变换、Hirota 变换、Darboux 变换法[1—3],tanh 函数方法[4],齐次平衡法[5,6],Painlevé 分析法[7]和分离变量法[8—11]等.利用这些方法,人们求解了大量的具有重要物理意义的非线性演化方程(组),一些新的可以反映更为复杂的物理现象的精确解,如 dromion 解、lump 解、振荡型 dromion 解、环孤子解、运动和静止呼吸子解、似瞬子解等正在不断的被国内外的学者所揭示[12—24].最近,楼森跃等对高维非线性演化方程的具有自相似结构和多值性的折叠孤波及具有弹性性质的 Foldons 分别进行了广泛研究[25—28],向人们展示了更为复杂的波动现象.他们的工作同时也说明非线性演化方程(组)这一能够揭示丰富多彩的自然现象的重要手段的研究仍是人们关注的焦点之一.

由于高维非线性演化方程的解能够更多的反映复杂的自然现象,其求解问题、特别是如何更简便的求解问题则一直是物理学和数学研究的重要课题.本文通过对已有求解方法的观察,特别是齐次平衡法和 Painlevé 分析法,发现一类耦合的非线性演化方程可以通过一个简单的变换,约化为低维的简单方程,通过对简单方程求解,不仅能够获得原方法所能得到的解,而且还能得到一些新的解并大大简化求解的过程.实际上,这样的思想在文献[29],[30]中已经用于(1+1)维问题的处理.下面,以高阶(2+1)维 Broer-Kaup 方程为例来进行说明.

2.高阶(2+1)维 Broer-Kaup 方程的简化及其新的精确解

高阶(2+1)维 Broer-Kaup 方程[31]

$$
\begin{aligned}
H_t = & -4[H_{xx} + H^3 - 3HH_x + 3H\partial_y^{-1}G_x \\
& + 3\partial_y^{-1}(GH)_x]_x ,
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
G_t = -4[G_{xx} + 3G_xH + 3H^2G + 3G\partial_y^{-1}G_x]_x \tag{2}
$$

可用对称约束从 KP 方程中约化得到[31],文献[23]利用推广的齐次平衡法研究了它的局域相干结构.

利用变换

$$
G = H_y , \tag{3}
$$

通过简单的计算,可知方程(1),(2)被约化为(1+1)维的方程

$$
H_t + 4H_{xxx} + 12(HH_x)_x + 4(H^3)_x = 0, \tag{4}
$$

该方程不显含变量 y,这说明高阶(2+1)维 Broer-Kaup 方程的解对变量 y 是有着相当大的自由度的,从而也为构造解的形式带来了方便.下面,使用文献[32]中推广的 tanh 函数方法求解方程(4).设方程具有如下形式的解

$$
H(x,y,t) = f(y) + g(y)\phi[p(y)x + q(y,t)], \tag{5}
$$

这里 f,g,p,q 为待定函数.ϕ 满足方程

---

* 国家"973"项目(批准号:G1998030600)和国家自然科学基金(批准号:10072013)资助的课题.

† E-mail:deshengli-868@yahoo.com.cn

$$\phi' = \delta + \phi^2, \tag{6}$$

这里'′'表示对 $\omega = p(y)x + q(y,t)$ 求导,δ 为任一常数.

方程(6)具有如下形式的通解

$$\phi = -\sqrt{-\delta}\tanh\sqrt{-\delta}\omega, \delta < 0, \tag{7}$$

$$\phi = -\sqrt{-\delta}\coth\sqrt{-\delta}\omega, \delta < 0, \tag{8}$$

$$\phi = -\frac{1}{\omega}, \delta = 0, \tag{9}$$

$$\phi = \sqrt{\delta}\tan\sqrt{\delta}\omega, \delta > 0, \tag{10}$$

$$\phi = -\sqrt{\delta}\cot\sqrt{\delta}\omega, \delta > 0. \tag{11}$$

将(5),(6)式代入(4)式,并令 $\phi^i, i = 0,1,2,3,4$ 的系数为零,可得一微分方程组

$$\delta g q_t + 12\delta^2 g^2 p^2 + 12\delta f^2 g p + 8\delta^2 g p^3 = 0, \tag{12}$$

$$24\delta f g p^2 + 24\delta f g^2 p = 0, \tag{13}$$

$$g q_t + 48\delta g^2 p^2 + 12(\delta g^3 p + f^2 g p) + 32\delta g p^3 = 0, \tag{14}$$

$$24 f g p^2 + 24 f g^2 p = 0, \tag{15}$$

$$36 g^2 p^2 + 12 g^3 p + 24 g p^3 = 0, \tag{16}$$

显然,此方程组有一组解为

$$g = -p, \tag{17}$$

$$q = (4\delta p^3 - 12 f^2 p)t + c(y), \tag{18}$$

这里 f, p, c 为任意的关于 y 的函数.

这样,由(3),(5),(7)—(11)式可得方程(1),(2)的如下新的精确解.

孤子解

$$\begin{aligned} H(x,y,t) &= f(y) - \sqrt{-\delta}p(y) \\ &\times \tanh\sqrt{-\delta}[p(y)x + (4\delta p^3(y) \\ &- 12 f^2(y)p(y))t + c(y)], \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} G(x,y,t) &= f_y(y) - \sqrt{-\delta}p_y(y)\tanh\sqrt{-\delta}[p(y)x \\ &+ (4\delta p^3(y) - 12 f^2(y)p(y))t + c(y)] \\ &+ \delta p(y)[p_y(y)x + (12\delta p_y(y)p^2(y) \\ &- 24 f_y(y)f(y)p(y) - 12 f^2(y)p_y(y))t \\ &+ c_y(y)]\mathrm{sech}^2\sqrt{-\delta}[p(y)x \\ &+ (4\delta p^3(y) - 12 f^2(y)p(y)t + c(y)]. \end{aligned} \tag{20}$$

奇性孤子解

$$\begin{aligned} H(x,y,t) &= f(y) - \sqrt{-\delta}p(y)\coth\sqrt{-\delta}[p(y)x \\ &+ (4\delta p^3(y) - 12 f^2(y)p(y)t + c(y)], \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} G(x,y,t) &= f_y(y) - \sqrt{-\delta}p_y(y)\coth\sqrt{-\delta}[p(y)x \\ &+ (4\delta p^3(y) - 12 f^2(y)p(y))t + c(y)] \\ &- \delta p(y)[p_y(y)x + (12\delta p_y(y)p^2(y) \\ &- 24 f_y(y)f(y)p(y) - 12 f^2(y)p_y(y))t \\ &+ c_y(y)]\mathrm{csch}^2\sqrt{-\delta}[p(y)x \\ &+ (4\delta p^3(y) - 12 f^2(y)p(y))t + c(y)]. \end{aligned} \tag{22}$$

有理形式解

$$H(x,y,t) = f(y) - \frac{p(y)}{p(y)x - 12 f^2(y)p(y)t + c(y)}, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} G(x,y,t) &= f_y(y) - \frac{p_y(y)(p(y)x - 12 f^2(y)p(y)t + c(y))}{[p(y)x - 12 f^2(y)p(y)t + c(y)]^2} \\ &- \frac{p(y)(p_y(y)x - 24 f_y(y)p(y)t - 12 f^2(y)p_y(y)t) + c_y(y)}{[p(y)x - 12 f^2(y)p(y)t + c(y)]^2}. \end{aligned} \tag{24}$$

三角函数解

$$\begin{aligned} H(x,y,t) &= f(y) - \sqrt{\delta}p(y)\tan\sqrt{\delta} \\ &\times [p(y)x + (4\delta p^3(y) \\ &- 12 f^2(y)p(y))t + c(y)], \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} G(x,y,t) &= f_y(y) - \sqrt{\delta}p_y(y)\tan\sqrt{\delta}[p(y)x \\ &+ (4\delta p^3(y) - 12 f^2(y)p(y))t + c(y)] \\ &+ \delta p(y)[p_y(y)x + (12\delta p_y(y)p^2(y) \\ &- 24 f_y(y)f(y)p(y) - 12 f^2(y)p_y(y))t \\ &+ c_y(y)]\sec^2\sqrt{\delta}[p(y)x + (4\delta p^3(y) \\ &- 12 f^2(y)p(y))t + c(y)]. \end{aligned} \tag{26}$$

奇性三角函数解

$$\begin{aligned} H(x,y,t) &= f(y) - \sqrt{\delta}p(y)\cot\sqrt{\delta} \\ &\times [p(y)x + (4\delta p^3(y) \\ &- 12 f^2(y)p(y))t + c(y)], \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} G(x,y,t) &= f_y(y) - \sqrt{\delta}p_y(y)\cot\sqrt{\delta} \\ &\times [p(y)x + (4\delta p^3(y) - 12 f^2(y)p(y))t \end{aligned}$$

$$+ c(y)] - \delta p(y)[p_y(y)x + (12\delta p_y(y)p^2(y) - 24f_y(y)f(y)p(y) - 12f^2(y)p_y(y))t + c_y(y)] \times \csc^2\sqrt{\delta}[p(y)x + (4\delta p^3(y) - 12f^2(y)p(y))t + c(y)]. \tag{28}$$

将上述的求解过程与通常的 tanh 函数法的使用相比较不难发现这确实是大大减少了计算量，而且还避免了由于原方程中算子 ∂_y^{-1} 的出现所造成的该方法不可直接实施的困难．另外，由于函数 f，p，c 的任意性，也使得高阶$(2+1)$维 Broer-Kaup 方程的解具有相当丰富的结构．

利用类似(3)式的变换于$(2+1)$维色散长波方程和$(2+1)$维 Broer-Kaup 方程

$$u_{yt} + \eta_{xx} + u_x u_y + u u_{xy} = 0, \tag{29}$$

$$\eta_t + u_x + \eta u_x + u\eta_x + u_{xxy} = 0, \tag{30}$$

$$H_{yt} + 2G_{xx} + 2(HH_x)_y - H_{xxy} = 0, \tag{31}$$

$$G_t + 2(GH)_x + G_{xx} = 0. \tag{32}$$

即取 $\eta = \pm u_y - 1$，$G = H_y$ 则可将其约化为如下的带外力项的 Burgers 方程

$$u_t + uu_x \pm u_{xx} = \alpha(x,t), \tag{33}$$

$$H_t + 2HH_x + H_{xx} = \alpha(x,t), \tag{34}$$

这里 $\alpha(x,t)$为任意函数．特别的当取 α 为任意的 t 的函数 $\alpha(t)$时，则可同样得到与文献[33]，[34]相同的解，但求解过程更简单方便．例如，从(34)式出发，取

$$H(x,y,t) = f_1(y) + f_2(t) + g(y)\phi(p(y)x + q(y,t)), \tag{35}$$

代入(34)式中并令 ϕ^i，$i = 0,1,2,3$ 的系数为零，可得微分方程组

$$f_{2t} + \delta g q_t + 2\delta f_1 gp + 2\delta f_2 gp = \alpha(t), \tag{36}$$

$$2\delta g^2 p + 2\delta g p^2 = 0, \tag{37}$$

$$gq_t + 2(f_1 + f_2)gp = 0, \tag{38}$$

$$2g^2 p + 2gp^2 = 0, \tag{39}$$

由(36)，(38)式知

$$f_2 = \int \alpha(t)\mathrm{d}t + c = F_1(t), \tag{40}$$

由(39)式得 $g = -p$，p 为 y 的任一函数．取 $p = -\frac{1}{2}F_4(y)$，再由(38)式可得

$$q = F_3(y) + F_4(y)\int (F_2(y) + F_1(t))\mathrm{d}t. \tag{41}$$

这里取 $f_1(y) = F_2(y)$为 y 的任一函数．显然，此时所得的结果与文献[33]完全相同．

本文仅选取了推广的 tanh 函数法进行说明，实际上，近年来已出现了许多可以直接用来给出非线性演化方程的新的精确解的方法，如文献[35—38]等．利用这些方法结合本文的处理过程，也可以同样简便的获得新的有意义的精确解．由于本文的目的是希望探讨求解方法的简化，对于利用上述方法构造新解的工作这里就不在赘述了，有兴趣的读者可以自己进行尝试．

3．结　论

总之，通过对一类高维耦合的非线性演化方程使用一个简单的变换实现了将此类非线性演化方程转化为一简单的低维方程的这一关键步骤．这使得利用已有方法进行求解的过程大为简化，并有可能获得新的精确解．但寻找类似的变换使得高维耦合的非线性演化方程转化为一简单的单个的低维方程，并不是一个简单的工作．这种方法对其他高维耦合的非线性演化方程的推广值得进一步研究．

[1] Ablowitz M J, Clarkson P A 1991 *Solitons nonlinear evolution equations and inverse scattering*. In: London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 149 (Cambridge University Press)

[2] Miura M R 1978 *Backlund Transformation* (Springer-Verlag, Berlin)

[3] Hirota R 1971 *Phys. Rev. Lett.* **27** 1192

[4] Malfliet W 1992 *Amer. J. Phys.* **60** 650

[5] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[6] Wang M L, Zhou Y B, Li Z B 1996 *Phys. Lett.* A **216** 67

[7] Weiss J, Tabor M and Carnevale G 1983 *J. Math. Phys.* **24** 522

[8] Lou S Y and Lu J Z 1996 *J. Phys.* A **29** 4209

[9] Zeng Y B 1991 *Phys. Lett.* A **169** 541

[10] Chen Y and Li Y S *Phys, Lett.* A **157** 22

[11] Chen L L, 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1201 (in Chinese) [陈黎丽 1999 物理学报 **48** 1201]

[12] Boiti M, Martiona L M and Pempinelli F 1988 *Phys. Lett.* A **132** 116

[13] Boiti M, Martiona L M and Pempinelli F 1995 *Chaos Solitons Frractals* **5** 2377

[14] Fokas A S and Santini P M 1989 *Phys. Rev. Lett.* **63** 1329
Fokas A S and Santini P M 1990 *Physica* D **44** 99

[15] Kadomtsov B B and Petviashvili V I 1974 *Sov. Phys. Dokl.* **15** 539
[16] Davey A and Stewartson K 1974 *Proc. R. Soc.* A **338** 17
Naoki Yoshida, Katsuhiro Nishinari, Junkichi Satsuma and Kanji Abe 1998 *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** 3325
Kiselev O M 2000 *J. Nonlinear Math. Phys.* **7** 411
[17] Radha R and Lakshmanan M 1994 *J. Math. Phys.* **35** 4746
[18] Novikov S P and Veslov A P 1986 *Physica* D **18** 267
Lou S Y 2000 *Chin. Phys. Lett.* A **17** 781
[19] Konopelchenko B G and Rogers C 1991 *Phys. Lett.* A **158** 391
Konopelchenko B G and Rogers C 1993 *J. Math. Phys.* **34** 214
[20] Li Y S and Zhang Y J 1993 *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** 7487
Lou S Y 1997 *Commun. Theor. Phys.* **41** 28
[21] Lou S Y 1996 *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** 5989
[22] Ruan H Y and Lou S Y 1997 *J. Math. Phys.* **38** 3123
[23] Zhang J F and Liu Y L 2002 *Appl. Math. Mech.* **23** 549
[24] Zhang J F et *al*. 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 706 (in Chinese) [张解放等 2002 物理学报 **51** 706]
[25] Lou S Y, Chen C L and Tang X Y 2002 *J. Math. Phys.* **43** 4078
[26] Tang X Y, Lou S Y and Zhang Y 2002 *Phys. Rev.* E **66** 046601
[27] Tang X Y and Lou S Y 2002 *Chaos, Solitons and Fractals* **14** 1451
[28] Tang X Y and Lou S Y 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 62
[29] Zhang H Q 2000 *Acta Math. Phys.* **22** 332 (in Chinese) [张辉群 2002 数学物理学报 **22** 332]
[30] Naranmandula 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1671 (in Chinese) [那仁满都拉 2002 物理学报 **51** 1671]
[31] Lou S Y and Wu X B 1998 *Commun. Theor. Phys.* **29** 145
[32] Fan E G 2000 *Phys. Lett.* A **277** 212
[33] Li D S and Zhang H Q 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **18** 193
[34] Li D S and Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 143
[35] Li Z B *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2062 (in Chinese) [李志斌等 2001 物理学报 **50** 2062]
[36] Zhang S Q and Li Z B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2197 (in Chinese) [张善卿、李志斌 2002 物理学报 **51** 2197]
[37] Fan E G 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **16** 819
[38] Sirendaoreji and Sun Jiong 2003 *Phys. Lett.* A **309** 387

A simple method for solving a class of nonlinearly coupled evolution equations in higher dimensional space*

Li De-Sheng[1)2)] Zhang Hong-Qing[1)]

[1)] (*Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian* 116024, *China*)

[2)] (*Science School of Shenyang University of Technology, Shenyang* 110023, *China*)

(Received 30 June 2003; revised manuscript received 29 July 2003)

Abstract

In this paper, a class of nonlingearly coupled evolution equations in higher dimensional spaces is reduced to a simple nonlinear evolution equation in lower dimensional spaces by using a simple transformation, and then we can easily obtain the solutions of the original equations by appling existing method to the simple nonlinear evolution equation.

Keywords: nonlinear coupled evolution equations, exact solutions, tanhfunction method

PACC: 0340K, 0290, 1190

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. G1998030600) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10072013).