第 53 卷 第 6 期 2004 年 6 月
1000-3290/2004/53(06)/1639-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.53, No.6, June, 2004

关于分离变量法的一个注记*

李德生[1)2)†] 张鸿庆[1)]

[1)](大连理工大学应用数学系,大连 116024)

[2)](沈阳工业大学理学院,沈阳 110023)

(2003 年 8 月 4 日收到;2003 年 9 月 24 日收到修改稿)

从 Bäcklund 变换出发,利用 Cole-Hopf 变换,一些有重要物理意义的(2+1)维非线性演化方程(组)被简化为具有两个分别关于(x,t),(y,t)的任意函数的单个线性偏微分方程.通过对该方程解的研究,获得了原方程一些新的精确解.其中,一些近年来被广泛研究的由分离变量法所获得的解也被重新得到.

关键词:Bäcklund 变换, Cole-Hopf 变换, 分离变量法, 精确解

PACC:0340K, 0290, 1190

1. 引 言

众所周知,非线性偏微分方程是描述非线性现象的重要工具之一,它广泛应用于自然科学各个领域.非线性演化方程,特别是对描述孤子的孤子方程的研究已成为 20 年来非线性科学研究的一个重要方面,近年来,自从 Boiti 等[1—3]提出 dromion 解以来,(2+1)维和(3+1)维非线性演化方程的研究十分活跃.一些有重要物理意义的(2+1)维和(3+1)维非线性演化方程的多种特解被人们利用不同的方法揭示出来[4—16].其中,一个非常成功的有效方法是 Lou[9—16]提出的"分离变量法".对于该方法,我们认为其重要性不仅能够有效的求解出一些高维非线性演化方程的多种特解,更重要的是由于该方法的使用使得非线性科学中的三个原本独立研究、甚至是相互对立的分支,混沌,孤子与分形发生了新奇的联系.正如 Lou 所多次指出的那样可积性的定义需要人们进一步研究.对于使用分离变量法和其他方法所揭示的新现象,是非常丰富和奇妙的,我们应该如何在现实生活中去寻找和利用它们呢?

正是分离变量法的这些重要的作用,激起了本文作者对该方法研究的兴趣.我们的研究发现,从 Bäcklund 变换出发,利用 Cole-Hopf 变换,一些有重要物理意义的(2+1)维的非线性演化方程(组)被简化为具有两个(或一个)分别关于(x,t),(y,t)的任意函数的单个的线性偏微分方程.通过对该方程的解的讨论,不仅可以得到形式上与已有的分离变量法所得的解相一致的解,还可以获得其他的新解.本文是 Lou 分离变量法的进一步补充和完善.

下面,以(2+1)维色散的长波方程为例进行说明.

2. (2+1)维色散的长波方程新精确解

(2+1)维色散的长波方程

$$u_{yt}+v_{xx}+\frac{1}{2}(u^2)_{xy}=0, \tag{1}$$

$$v_t+(uv+u+u_{xy})_x=0 \tag{2}$$

是由 Boiti 等人首先提出的[17],对该方程的研究已有丰富的结果.文献[17]证明方程(1)和(2)是 Lax 和 IST 可积的,但文献[18]却证明它不具有 Painlevé 可积性.文献[19,20]给出了它的具有任意函数的 Kac-Moody-Virasoro 型和一般的 ω_∞ 的对称代数.利用分离变量法,文献[13—16]详细讨论了该方程的多种精确解.对于该方程精确解的其他研究方法可见文献[21—23].

我们知道,方程(1)和(2)具有如下的 Bäcklund 变换:

$$u=2(\ln f)_x+u_0(x,t), v=\pm 2(\ln f)_{xy}-1, \tag{3}$$

* 国家"973"项目(批准号:G1998030600)和国家自然科学基金(批准号:10072013,10072189)资助的课题.

† E-mail:deshengli-868@yahoo.com.cn

这里 $u_0(x,t)$ 为 (x,t) 的任意函数.

由(3)式容易看出 $v=\pm u_y-1$,将此式代入方程(1)和(2),得到一个相同的方程

$$u_{yt}\pm u_{xxy}+u_xu_y+uu_{xy}=0, \tag{4}$$

(4)式可写为

$$\partial_y(u_t\pm u_{xx}+uu_x)=0, \tag{5}$$

将(3)式中的 $u=2(\ln f)_x+u_0(x,t)$ 代入(5)式中(这相当于对 u 使用了一次 Cole-Hopf 变换),有

$$\partial_y\left\{\partial_x\left(\frac{2f_t\pm 2f_{xx}+2u_0f_x}{f}\right)+u_{0t}\pm u_{0xx}+u_0u_{ox}\right\}=0, \tag{6}$$

(6)式等价于如下的线性偏微分方程:

$$f_t\pm f_{xx}+u_0f_x=(h_1(x,t)+h_2(y,t))f. \tag{7}$$

这里 $h_1(x,t)$ 和 $h_2(y,t)$ 分别为 (x,t) 和 (y,t) 的任意函数.下文仅考虑 $v=u_y-1$ 的情形,$v=-u_y-1$ 的讨论是类似的.

虽然方程(7)是一个线性偏微分方程,但目前还没有直接而简单的求解方法.受 Lou 的分离变量法的启发,可以考虑如下形式的解的存在性:

$$f=a_0+a_1p(x,t)+a_2q(y,t)+a_3p(x,t)q(y,t). \tag{8}$$

事实上,我们有

命题 1 对任意的常数 a_0,a_1,a_2,a_3,设函数 $p(x,t)$ 与 $q(y,t)$ 为满足

1) $a_0+a_1p(x,t)+a_2q(y,t)+a_3p(x,t)q(y,t)\neq 0$;

2) 对任意的函数 $c(t)$,$q(y,t)$ 还要求为满足 Riccati 方程

$$q_t=c(t)q(a_0+a_2q)$$

的任意函数.则当

$$u_0(x,t)=-\frac{\{p_t+p_{xx}+c(t)p(a_0+a_1p)\}}{p_x}$$

时,由函数

$$f=a_0+a_1p(x,t)+a_2q(y,t)+a_3p(x,t)q(y,t)$$

所确定的 $u=2(\ln f)_x+u_0(x,t)$ 和 $v=u_y-1$ 均为方程(1)和(2)的解.

证明 根据上面的讨论,只需证明对任意的满足条件 1)与 2)的函数 $p(x,t)$ 与 $q(y,t)$,存在函数 $h_1(x,t)$ 和 $h_2(y,t)$ 使得(7)式成立即可.实际上,将 $f=a_0+a_1p(x,t)+a_2q(y,t)+a_3p(x,t)q(y,t)$ 代入(7)式,并利用 u_0 及条件 2),即可求得对任意的函数 $c(t)$ 有

$$h_1(x,t)=-c(t)(a_0+a_1p), \tag{9}$$

$$h_2(y,t)=c(t)(a_0+a_2q). \tag{10}$$

此时,对如上选取得函数 $h_1(x,t)$,$h_2(y,t)$ 及

$$u_0(x,t)=-\frac{\{p_t+p_{xx}+c(t)p(a_0+a_1p)\}}{p_x}$$

和

$$f=a_0+a_1p(x,t)+a_2q(y,t)+a_3p(x,t)q(y,t)$$

就满足(7)式.因此,由函数 $f=a_0+a_1p(x,t)+a_2q(y,t)+a_3p(x,t)q(y,t)$ 所确定的 $u=2(\ln f)_x+u_0(x,t)$ 和 $v=u_y-1$ 均为方程(1)和(2)的解.

注 从数学角度来看,文中出现的函数须对其光滑性作一定的要求,但为了表述上的方便,全文中出现的函数均假定具有所处理问题要求的光滑性,而不再加以说明.

从(5)式出发,取 $u=u_1(x,y,t)+u_0(y,t)$ 则有

$$\partial_y(u_{1t}+u_{1xx}+u_1u_{1x}+u_0u_{1x})+u_{0yt}=0, \tag{11}$$

再令 $u_1=2(\ln f)_x$,有

$$\partial_y\partial_x\left(\frac{2f_t+2f_{xx}+2u_0f_x}{f}\right)+u_{0yt}=0, \tag{12}$$

此时,有

命题 2 对任意的函数 $u_0(y,t)=u_0(y)$,和任意的函数 $c_1(y)$,$c_2(y)$,$c_3(y)$,由函数

$$f=c_1(y)e^{2u_0^2(y)t}+c_2(y)e^{-2u_0(y)x}+c_3(y)e^{u_0(y)x}$$

所确定的 $u=2(\ln f)_x+u_0(y)$ 和 $v=\pm u_y-1$ 均为方程(1)和(2)的解.

证明 取 $u_0(y,t)=u_0(y)$,则(12)式变成

$$\partial_y\partial_x\left(\frac{2f_t+2f_{xx}+2u_0f_x}{f}\right)=0, \tag{13}$$

(13)式等价于

$$2f_t+2f_{xx}+2u_0f_x=(h_1(x,t)+h_2(y,t)f, \tag{14}$$

$h_1(x,t)$,$h_2(y,t)$ 为任意函数.取 $h_1(x,t)=0$,$h_2(y,t)=4u_0^2(y)$,我们考虑求方程(14)的如下形式的解:

$$f(x,y,t)=p(x,y)+q(y,t), \tag{15}$$

将(15)式代入(14)式中,得

$$2q_t+2p_{xx}+2u_0p_x=4u_0^2q+4u_0^2p, \tag{16}$$

由(16)式有

$$2q_t=4u_0^2q, \tag{17}$$

$$2p_{xx}+2u_0p_x=4u_0^2p, \tag{18}$$

由(17),(18)式有

$$q(y,t) = c_1(y)\mathrm{e}^{2u_0^2(y)t}, \tag{19}$$

$$p(x,y) = c_2(y)\mathrm{e}^{-2u_0(y)x} + c_3(y)\mathrm{e}^{u_0(y)x}, \tag{20}$$

因此

$$f(x,y,t) = c_1(y)\mathrm{e}^{2u_0^2(y)t} + c_2(y)\mathrm{e}^{-2u_0(y)x} + c_3(y)\mathrm{e}^{u_0(y)x}.$$

这就完成了命题 2 的证明.

显然,我们这里命题 1 所确定的解形式上与文献[13—15]中利用分离变量法所获得的解是一致的,命题 2 所确定的解在形式上可以看成是由

$$f = a_0 + a_1 p(x,y) + a_2 q(y,t) + a_3 p(x,y) q(y,t)$$

所确定的解,但此类解中函数 $p(x,y)$ 与 $q(y,t)$ 所需满足的条件目前还未找到,需进一步的研究. 文献[16]对分离变量法也给出了一些研究,得到了一类新的分离变量解. 从解的结构上可以看到,本文的结果和文献[16]的结果进一步丰富了分离变量法在求解高维非线性演化方程时所给出的解的类型.

我们知道,对于微分方程,特别是非线性微分方程,尚无统一的求解方法,而孤子方程却都有无穷多解,这自然促使我们提出这样的问题:对于方程(1)和(2),它还有什么形式的解?又该如何论证呢?

对于前者,我们利用 tanh 函数法在文献[23]中得到了一类由三个关于 y 的任意函数 F_2,F_3,F_4 和一个关于 t 的任意函数 F_1 所确定的精确解. 在文献[24]中,通过进一步的改进 tanh 函数法的使用过程,我们更简捷的获得了高阶(2+1)维 Broer-Kaup 方程和(2+1)维 Broer-Kaup 方程的同类精确解. 而这些解目前还不能用分离变量法和本文的方法得到. 这说明 tanh 函数法仍是精确求解中的一个有着独立意义的方法.

3. 结　论

总之,从 Bäcklund 变换出发,利用 Cole-Hopf 变换,一些有重要物理意义的(2+1)维的非线性演化方程(组)被简化为具有两个(或一个)分别关于(x,t),(y,t)的任意函数的单个的线性偏微分方程. 通过对该方程的解的研究,获得了原方程一些新的精确解. 其中,一些近年来被广泛研究的由分离变量法所获得的解也被重新得到. 另外,从本文的结果可知,方程(1)和(2)以及其他的(2+1)维的非线性演化方程(组)的反映新的波动现象的解可利用类似文献[13—16]的方式给出,同时,本文的处理方法也适用于许多的(2+1)维的非线性演化方程(组),有关结果将在另文中给出.

[1] Boiti M, Martiona L M and Pempinelli F 1988 *Phys. Lett.* A **132** 116

[2] Boiti M, Martiona L M and Pempinelli F 1995 *Chaos Solitons Fractals* **5** 2377

[3] Fokas A S and Santini P M 1989 *Phys. Rev. Lett.* **63** 1329
Fokas A S and Santini P M 1990 *Physica* D **44** 99

[4] Radha R and Lakshmanan M 1994 *J. Math. Phys.* **35** 4746

[5] Lou S Y 1995 *J. Phys.* A **28** 7227

[6] Ruan H Y and Lou S Y 1997 *J. Math. Phys.* **38** 3123

[7] Lou S Y, Yu J, Tang X Y 2000 *Z Naturforsch* **55**a 867

[8] Lou S Y, 1996 *J. Phys.* A **29** 5989

[9] Lou S Y 2000 *Phys. Lett.* A **277** 94

[10] Lou S Y, Ruan H Y 2001 *J. Phys.* A **35** 305

[11] Lou S Y, Lu J Z 1995 *J. Phys.* A **29** 305

[12] Ruan H Y and Chen Y X 2002 *Z Naturforsch* **57**a 948

[13] Tang X Y, Lou S Y 2002 *Chaos, Solitons and Fractals* **14** 1451

[14] Tang X Y, Chen C L and Lou S Y 2002 *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** L293

[15] Tang X Y, Lou S Y 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 62

[16] Chen C L, Li Y S 2002 *Commun. Theor. Phys.* **38** 129

[17] Boiti M, Leon J J P and Pempinelli F 1987 *Inverse Problems* **3** 1025

[18] Lou S Y 1993 *Phys. Lett.* A **176** 96

[19] Paquin G and Winternitz P 1990 *Physica* D **46** 122

[20] Lou S Y 1994 *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** 3235

[21] Tian B, Gao Y T 1996 *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** 2895

[22] Li D S and Zhang H Q 2004 *Appl. Math. Comput.* **147** 789

[23] Li D S and Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 143

[24] Li D S and Zhang H Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1635 (in Chinese) [李德生,张鸿庆 2004 物理学报 **53** 1635]

A notes on the variable separation approach*

Li De-Sheng[1)2)] Zhang Hong-Qing[1)]

[1)] (*Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian* 116024, *China*)

[2)] (*Science School of Shenyang University of Technology, Shenyang* 110023, *China*)

(Received 4 August 2003; revised manuscript received 24 September 2003)

Abstract

Starting from the Bäcklund transformation and using Cole-Hopf transformation, we reduce a class of nonlinear evolution equations in (2 + 1)-dimensional spaces to a simple nonlinear evolution equation with two arbitrary functions of $\{x, t\}$ and $\{y, t\}$. We can obtain some new exact solutions of the original equations by studying the simple nonlinear evolution equation which includes some solutions obtained by the variable separation approach.

Keywords: Bäcklund transformation, Cole-Hopf transformation, variable separation approach, exact solutions

PACC: 0340K, 0290, 1190

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. G1998030600) and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10072013, 10072189).