第 53 卷 第 6 期 2004 年 6 月
1000-3290/2004/53(06)/1643-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.6, June, 2004

关于 Lewis-Riesenfeld 相位和量子几何相位

李华钟[†]

(中山大学高等学术研究中心及物理系,广州 510275)

(2003 年 5 月 20 日收到;2003 年 11 月 5 日收到修改稿)

评注了《大学物理》21 23 一文关于量子几何相位与 Lewis 相位论述与《物理学报》48 2018 一文的结论有极大不同.指出前者对 Lewis 导出的相位与量子几何相位关系的错误陈述,而后者的结论是正确的.

关键词:量子几何相位,不变量方法,Lewis-Riesenfeld 相位

PACC:0365

1.引 言

关于 Lewis-Riesenfeld(L-R)文章中讲述的量子力学波函数[1]和量子几何相位[2]的关系,在文献[3]中就得出明确的结论.然而在最近出版的文献[5]的结论与文献[3]极不相同.文献[3]指出 L-R 相位一般没有物理意义,不可视为量子(几何)相位.需要使量子不变量 $I(t)$ 满足一定的条件,循环量子系统,L-R 相位才能是几何相位与动力相位之和.而文献[5]把 L-R 导出的相位直接对比认为就是包括了几何相位和动力学相位而不必再加物理条件.这就提出一个对研究和教学都有意义的问题.这两种讲法,孰是孰非?本文就是讨论这两种相位的关系,从与文献[3]不同角度出发论证,得到与文献[3]相同的结论,而指出文献[5]中论述的一些错误[7]1).

2.L-R 相位

Lewis 不变量方法是一种求解具有显含时间(但不含时间导数)哈密顿的 Schröedinger 方程的一种方法[1].但是该方法受有很强的限制,就是物理系统的哈密顿要容许存在一个依赖时间的厄米不变量 $I(t)$.它满足下列条件

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial I(t)}{\partial t} + [I,H] = 0, \tag{1}$$

$$I^{+} = I.$$

$H(t)$ 显含时间,$I(t)$ 不与 $H(t)$ 对易.$I(t)$ 是一组完全堆集力学量中的一员.$I(t)$ 和其他成员有共同正交归一本征函数 $|\lambda,k\rangle$,λ 标记 $I(t)$ 的本征值量子数,k 是其他量子数集合.

$$I|\lambda,k\rangle = \lambda|\lambda,k\rangle. \tag{2}$$

Lewis 证明,λ 为实数,不依赖时间,把 $|\lambda,k\rangle$ 乘以一相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(t)}$,

$$|\lambda,k\rangle_{\alpha} = e^{i\alpha_{\lambda k}(t)}|\lambda,k\rangle, \tag{3}$$

适当选择 $\alpha_{\lambda k}(t)$,$|\lambda,k\rangle_{\alpha}$ 是满足 Schröedinger 方程的一个特解.Schröedinger 方程的通解是

$$|t\rangle = \sum_{\lambda,k} c_{\lambda k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_{\lambda k}(t)}|\lambda,k;t\rangle, \tag{4}$$

其中 $c_{\lambda k}$ 是不依赖时间的系数.相位 $\alpha_{\lambda k}(t)$ 可求出一般形式为

$$\alpha_{\lambda k}(t) = \frac{1}{\hbar}\int_0^t \langle\lambda,k,t'\left|\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t'} - H\right)\right|\lambda,k,t'\rangle\mathrm{d}t'. \tag{5}$$

以上是不变量方法解 Schröedinger 方程的要点.Lewis 当时只把它用于求解含时谐振子系统和带电粒子在依赖时间变化的某些电磁场中的运动等少数例子.本来这种方法仅仅是一种解 Schröedinger 方程的特殊方法.Lewis-Riesenfeld 解出了一些具体哈密顿系统,文献[5]有关 Lewis 相位与 Berry 相位,AA 相位关系上的讲述中,却把 L-R 相位认为是动力学相位和量子几何相位两项之和.

---

1)本文只讨论 L-R 相位.文献[7]是全面评注文献[4]和文献[5]中的许多问题.文献[4,5]中关于 L-R 相位论述的错误同样出现在 Zeng J Y and Lei Y A 1996 *Phys*. *Lett*. A **215** 239.早在 1988 年 Morales D A1988 *J*. *Phys*. *A*:*math*. *Gen*. **21** L889 对一个特定的哈密顿量导出 L-R 相位与 Berry 相位的关系,文献[3]是普遍论证这一关系.

† E-mail:puaarc@zsu.edu.cn;电话:020-84113245.

在文献[4]中 Berry 相，AA 相与 Lewis 相的关系的一节中写道："事实上，任何一个力学量……的本征态都可以有一个含时间相位不定性. 根据这个观点，Berry 绝热相或 AA 相的出现，就更容易理解了."看来该作者以为量子几何相位之出现来自本征函数的不定相位. 事实上，Berry 的论文，Aharonov-Anandan 的论文以及 Wilczek 和 Shapere 的论文集[2]的主要论文都清楚，量子几何相位并非属于这种所谓'含时不定相位'之类别的相位. (5)式表达的相位 $\alpha_{\lambda k}(t)$ 看起来颇有点像 AA 论文中包含 AA 相位的式子. 但实质上 AA 相位是在循回过程(cyclic evolution)才出现的. 它的积分限是 t 从 0 到 τ，τ 是一周的时间. 除此之外更重要的是，除了表面有点相似之外，AA 相位本来就不是 Lewis-Riesenfeld 求出的 $\alpha_{\lambda k}(t)$. 量子几何相位与未加上其他条件时 L-R 相位2)两者的物理和数学意义都全不相同. (5)式 $\alpha_{\lambda k}(t)$ 的右端第一项

$$\alpha_1(t)=\frac{1}{\hbar}\int_0^t\langle\lambda k t'|\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t'}|\lambda k,t'\rangle\mathrm{d}t',\qquad(6)$$

这个相位式子在 Schiff 的量子力学教科书[6]里早已写入了，时间比 Lewis 等人发表两论文更早或至少是相近. 所以这个相位并不是什么重要发现，这个相位是物理学者都知道是一般的相位，不具备几何性，不是惟一的量值，不是可观察量. 一句话，物理上是完全不属于几何相位的类别，在数学意义上，$\alpha_1(t)$ 更不是态矢平行移动的总体改变，不具有几何意义. 文献[1]主要贡献是给出解出一种类型微分方程的所导出的相位是准确而不作近似的. 因此，后来由它在循回过程所不变量方法得的几何相位也就不需作近似2).

3. 不可类比的误用

文献[5]另一错误是引用 L-R 相位来类比量子几何相位. 文献[4]和[5]称在一般绝热过程

$$|\varphi_n(t)\rangle=\exp\Big[-\mathrm{i}\int_0^t\mathrm{d}tE_n(R(t))/\hbar\Big]|n(t)\rangle\qquad(7)$$

不满足 Schrödinger 方程，要补上 $\gamma_n(t)$，

$$|\varphi_n(t)\rangle=\exp[\mathrm{i}\gamma_n(t)]\times\exp\Big[-\mathrm{i}\int_0^t\mathrm{d}tE_n(R(t))/\hbar\Big]|n(t)\rangle\qquad(8)$$

才满足 Schröedinger 方程.

引用的类比是：按 Lewis 文 $I(t)$ 的本征函数(2)式不满足 Schröedinger 方程，乘上 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(t)}$ 后的(3)式才是满足 Schröedinger 方程，据此，文献[4,5]就说(7)式不满足 Schröedinger 方程，(8)式才是满足 Schröedinger 方程. 下面我们指出这是错误的.

按文献[4]推理，$\gamma_n(t)$ 是量子几何相位，L-R 相位 $\alpha(t)$，也就等同于量子几何相位. 事实上在 Lewis 推导中 $I(t)$ 不与 H 对易，没有共同本征函数. (2)式之 $|\lambda,k\rangle$ 不满足 Schröedinger 方程. (3)式中 $\alpha(t)$ 是任意的待定的量，可以从要求(3)式满足 Schröedinger 方程代入 Schröedinger 方程定出. 在(7)和(8)式的情况，是根本不引入与 H 不对易的 $I(t)$，和它的本征函数. 只有 H 和它的瞬时本征函数，没有与 H 不对易的 I 的本征函数. 两者不可以类比. 并没有给出用 L-R 相位能论证(7)式不满足 Schröedinger 方程的理由. 绝热解满足 Schröedinger 方程的意义是，作为冻结了的瞬时哈密顿的本征态，不存在连联不同瞬时的演化律. 但作为物理系统在绝热条件下的绝热态波函数，量子绝热定理就给出 Schröedinger 方程的绝热解(7)式，但这个绝热解在循回过程时，Berry 发现它不完全，还应有一个相位因子，但是不完全不等于它不是一个解，对于非循回的其他绝热过程. (7)式还是正确的绝热解，并且 $\gamma(t)$ 并非量子几何相位，只有在 t 从 t_0 到 t_0+T，$H(t)$ 完成一循回时 $\gamma(T)$ 才是量子几何相位. 文献[5]所引用的 Lewis 相位的类比说明对 Lewis 导出的相位缺乏正确的认识. 对量子几何相位和波函数一般的相位的区别不清楚，以致混淆两者的根本不同.

我们可以举出 Bohm，Quantum Theory 2nd ed. 将第 497 页一段论述转录如下："One may now expect that if H is a slowly varying function of Q，a good approximate solution is

$$\psi_n=u_n(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_0^t E_n(\theta)\mathrm{d}\theta/\hbar}$$

……

To prove that the above is a good approximate solution

2）在本文中所讨论的 L-R 相位是指在文献[4,5]中称为 Lewis 相位，即用 Lewis-Riesenfeld 不变量方法，没有加入循回条件解出的量子力学波函数相位. 国外出版物中有人认为如果用动力不变量理论来讨论一般求出 Schröedinger 方程的通解，加上一些广泛的条件(初条件及边界条件)和另一些特定的条件. 这时也可能得出具备几何性的量子相位，但这不是本文讨论的问题，这种用不变量的方法可以成为引入量子几何相法的方法之一. 不过，无论如何，避开用矢量平行移动方法引入量子几何相位，虽然方便于对大学生的教学但不利于研究者对量子几何相位的本质深入认识.

when $\partial H/\partial t$ is small, we note that……"

又可再举出 A. Messiah, Quantum Mechanics Vol. II, p.744, "The adiabatic theorem states that $U_T(s)$ has the asymptotic property

$$\lim_{T\to\infty} U_T(s) P_j(0) = P_j(s) \lim_{T\to\infty} U_T(s) \quad \text{(XV11.18)}$$

……

In addition, equation

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} U_T(s) = TH(s) U_T(s)$$

is exactly integrable in this particular case and gives

$$U_T(s) = \exp\left(-\mathrm{i}T\int_0^s H(\sigma)\mathrm{d}\sigma/\hbar\right) = \sum_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}T\varphi_i(s)/\hbar} P_j$$

We therefore have the result that if at time t_0 the state vector of the system is an eigenvector of H_0 belonging to the eigenvalue $\varepsilon_j(0)$, at time t_1 it differs from this only by the phase factor $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T\varphi_j(1)/\hbar}$."

这两段引文说明

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t E_n(t')\mathrm{d}t'\right]|\psi_n(t)\rangle$$

是在绝热近似下满足 Schröedinger 方程的绝热态解.

4. 特定条件下的解,才出现量子几何相位

由线性厄米哈密顿 H 给出 Schrödinger 方程,如果有两个特解 $|\psi_1(t)\rangle$, $|\psi_2(t)\rangle$ 则 $\psi = c_1|\psi_1(t)\rangle + c_2|\psi_2(t)\rangle$ 也是这方程的解, c_1 和 c_2 为任意复数. 既然如此, ψ 的相位自然可以因不同 c_1 和 c_2 而有无穷多个不同相位的解,挑取合乎物理过程的解就要加上边界条件. 不是凡满足 Schröedinger 方程的波函数的相位都是量子几何相位,只有在特定条件的波函数才会出现 Berry 相位,只有在循回过程不可积相位才可能是 Berry 相位. 必须按一定条件下才出现几何性质的相位. 并且 $\gamma(c)$ 是一常数相位(差),不是什么含时不定相位, c 是循回过程哈密顿量运行一周的时序路径,或参数化了哈密顿量的闭合路径. 文献[4]和[5]对量子几何相位的基本概念给出不正确的定义[7],说 $\beta(t)$ 是 Berry 相位'具有参数空间中的几何特征'(量子力学卷 II 第三版第 224 页). 事实上 $\beta(t)$ 没有物理意义不是可观察量,不存在几何性质,只有 $\gamma(c)$ 才是 Berry 相位,即绝热的量子几何相位. 两个名称是指同一物理量,所谓 L-R 相位不加入其他物理条件时与 Berry 相位没有物理或几何相关.

从上列分析,我们认为文献[3]的结论正确,而文献[5]的概念,推理和结论都是错误的.

[1] Lewis H R 1968 *J. Math. Phys.* **9** 1976
Lewis H R and Riesenfeld W B 1969 *J. Math. Phys.* **10** 1458

[2] Shapere A, Wilezek F (ed) 1989 *Quantum Geometrical Phase in Physics* (World Scientific)

[3] Li B Z, Zhang L Y and Zhang X D 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2081 (in Chinese)[李伯臧、张凌云、张向东 1997 物理学报 **48** 2081]

[4] Zeng J Y *Quantum Mechanics* vol. II 3rd ed p.240 § 4.4.4 (Science Press) (in Chinese)[曾谨言 量子力学 第 II 卷,第三版,第 240 页,§ 4.4.4 (科学出版社)]

[5] Zeng JY 2002 *College Physics* **21** 23 (in Chinese)[曾谨言 2002 大学物理 **21** 23]

[6] Schiff L I 1963 *Quantum Mechanics* 3rd ed

[7] Li H Z 2002 *College Physics* **21** 18 (in Chinese)[李华钟 2002 大学物理 **21** 18]

Remarks on "Lewis-Riesenfeld phase" and quantum geometric phase

Li Hua-Zhong

(*Advanced Research Center and Department of Physics*, *Zhongshan University*, *Guangzhou* 510275, *China*)

(Received 20 May 2003; revised manuscript received 5 November 2003)

Abstract

Some misconceptions in an article on the so called "Lewis phase" and quantum geometric phase in Chinese are critically reviewed. We point out the wrong statements given in the paper published in *College Physics* **21** 23, written in Chinese.

Keywords: quantum geometric phase, invariant method, Lewis-Riesenfeld phase

PACC: 0365