第 53 卷 第 6 期 2004 年 6 月
1000-3290/2004/53(06)/1647-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.6, June, 2004

量子条件振幅算子性质的研究*

张德兴†

(贵州大学物理系，贵阳 550025)

(2003 年 6 月 17 日收到；2003 年 9 月 24 日收到修改稿)

分析量子条件振幅算子的性质，该算子起一个类似于在经典信息理论中的条件概率的作用.论证表示一个量子双组元系统的条件算子的频谱在局域幺正变换下是不变的，并且表明它的不可分性.证明一个可分态的条件振幅算子不能有一个超过 1 的本征值.得出一个在 von Neumann 条件熵的非负性基础上的相关的可分性条件.

关键词：条件概率，条件振幅算子，von Neumann 条件熵，可分性条件

PACC：0365，0530

1. 量子不可分性

自从爱因基斯，Podolsky 和 Rosen 提出量子不可分性以来，量子不可分性是量子力学的最使人感兴趣的具有重要意义的课题.它的最重要的结果之一是 Bell 方程，而此方程实验上显示出量子非局域性.近来，随着量子计算和通讯领域的出现，它所表示的量子牵连和不可分性已经作为信息传递和产生的一个源被研究[1,2].例如，已经表明，在两个系统之间的牵连能够被用来得到量子的超密的编码或传递机理.两个没有经典的对应部分的量子交换系统.在这里，信息的 Shannon 的经典理论对于表示这些量子信息的过程是不够的.因此，必须构成一个精确考虑量子位相的推广的理论，以恰当地把量子牵连并入一个信息理论的体系之中.

在文献[3]中，已经定义了这样一个量子信息理论的体系，此体系依赖于 von Neumann 条件熵的概念.在 Cerf 和 Adami[4] 的工作中，研究了量子不可分性与条件振幅算子之间的联系.条件振幅算子与条件概率起同样的作用.条件振幅算子的数学性质有支集，谱，与 von Neumann 熵的联系等.我们可以在 von Neumann 条件熵和基础的条件振幅算子的基础上导出一个可分性的必要条件.也就是，如果双组元态是可分的，则条件振幅算子的本征值不能超过 1.这个条件对于推广的 Bell 态混合中的一个 2 × 2 系统也是充分的.然而，一般地它不是充分的，如由牵连的一个淡化的可能性所反映的那样.因为仅当条件振幅算子容许比 1 大的本征值的时候，von Neumann 条件熵能够是负的，所以一个有关的而较弱的可分性条件是条件熵为非负的[3—5].

2. 条件振幅算子和 von Neumann 条件熵

为了建立符号表示体系，我们首先简单描述由两个随机变量 A 和 B 表示的一个两粒子的经典系统的信息理论的处理.如果 A 和 B 由联合概率分布 $\rho(a,b)$ 表示，那末能够定义联合 Shannon 熵

$$H(A,B) = -\sum_{a,b} p(a,b)\log_2 p(a,b), \tag{1}$$

它反映出组合 AB 的随机性，应用在 b 上的 a 的条件概率

$$p(a|b) = \frac{p(a,b)}{p(b)}, \tag{2}$$

于是，定义在 b 上的 A 的条件熵

$$\begin{aligned} H(A|B) &= \sum_b p(b) H(A|B=b) \\ &= -\sum_b p(b)\sum_a p(a|b)\log_2 p(a|b) \\ &= -\sum_{a,b} p(a,b)\log_2 p(a|b), \end{aligned} \tag{3}$$

此熵表示当 B 已知时 A 的平均的剩余的不确定性.用(2)式容易证明，条件熵可表示为

$$H(A|B) = H(AB) - H(B).$$

为了计算量子牵连以及经典的相关性，可以推广对于由密度算子表示量子变量的结构.密度算子

* 贵州省科学基金(批准号：003066)资助的课题.

† 电话：0851-4899843.

ρ 是非负单元迹的厄米算子.让我们考虑在直积希尔伯特空间 $\mathscr{H}_{AB}=\mathscr{H}_A\otimes\mathscr{H}_B$ 中由一个密度算子 ρ_{AB} 表示的一个双组元量子系统 AB.每一个子系统 A 或 B 分别由约化的密度算子 $\rho_A=\mathrm{Tr}_B[\rho_{AB}]$ 或 $\rho_B=\mathrm{Tr}_A[\rho_{AB}]$ 表示,其中 Tr_A 和 Tr_B 表示部分迹.

定义 1 定义在 B 上的 A 的条件概率的条件振幅算子为[3,4]

$$\rho_{A|B}\equiv\exp_2[\log_2\rho_{AB}-\log_2(1_A\otimes\rho_B)]$$
$$=\lim_{n\to\infty}[\rho_{AB}^{1/n}(1_A\otimes\rho_B)^{-1/n}]^n, \qquad (4)$$

此式是在联合的希尔伯特空间 $\mathscr{H}_{AB}$ 中在 ρ_{AB} 的支集上定义的一个正半定的厄米算子(参见下述引理 1).

我们称满足性质 $p=p^{\dagger}$ 的算子为"厄米的",而严格来说,这个性质在数学文献中被称为"自伴性".然而,它们对于在这里所考虑的被束缚的算子是相同的.一般地,一个线性算子 ρ 的支集是 ρ 的区域的所有 $|\psi\rangle$ 的集合的封闭,对于所有的 $|\psi\rangle$,$\rho|\psi\rangle\neq0$.对于被束缚的厄米算子,ρ 的支集简单地是 ρ 的核的分量,也就是,由对应于非零的本征值的本征矢量所张的 ρ 的领域的子空间.

(4)式的第二个表达式依赖于 Trotter 的积的公式,$\exp(x+y)=\lim_{n\to\infty}[\exp(X/n)\exp(Y/n)]^n$.Trotter 公式有时被称为对于无限维矩阵的 Lie 积公式,但是它对于非束缚的自伴的算子也成立.[6]

需要着重指出,条件振幅算子是条件概率(2)式的自然的量子类似.因为 ρ_{AB} 和 $(1_A\otimes\rho_B)^{-1}$ 不必对换,所以 Trotter 对称化保证 $\rho_{A|B}$ 是一个正常的算子(它与它的厄米共轭对易),因而它的对数是很好被定义的.的确,ρ_{AB} 的指数的特征直接意味着它的厄米性和非负性.

引理 1 $\mathrm{Ker}(1_A\otimes\rho_B)\subseteq\mathrm{Ker}(\rho_{AB})$,式中 $\mathrm{Ker}(\rho)$ 是 ρ 的核(满足 $\rho|\psi\rangle=0$ 的 ρ 的领域所有的 $|\psi\rangle$ 的集合).因而,条件振幅算子 $\rho_{A|B}$ 在 ρ_{AB} 的支集上很好地被定义.

我们必须证明,任何具有零本征值的 $(1_A\otimes\rho_B)$ 的本征矢量 $|\psi\rangle$ 必须满足 $\rho_{AB}|\psi\rangle=0$.首先说明,任何这样的本征矢量 $|\psi\rangle$ 能够写为态 $|\phi\rangle$ 的一个线性组合.态 $|\phi\rangle$ 为

$$|\phi\rangle=|a\rangle\otimes|b\rangle, \qquad (5)$$

式中 $|a\rangle$ 是在 $\mathscr{H}_A$ 中的一个任意的态矢量,而 $|b\rangle$ 是 ρ_B 的具有零本征值的本征矢量,也就是,$\rho_B|b\rangle=0$.很容易检测,它在 A 上的部分迹为零,也就是

$$\mathrm{Tr}_A[\tilde{\rho}]=P_b\rho_BP_b=0. \qquad (6)$$

这由普遍的关系式

$$\mathrm{Tr}_A[(1_A\otimes\lambda_B)\mu_{AB}]=\lambda_B\mathrm{Tr}_A[\mu_{AB}] \qquad (7)$$

得到,上式中 λ_B 和 μ_{AB} 分别是在 $\mathscr{H}_B$ 和 $\mathscr{H}_{AB}$ 中的任意算子.因为 $\tilde{\rho}$ 是正半定的和无迹的,所以有 $\tilde{\rho}=0$.因此,特别是,在态 $|\phi\rangle$ 中的 $\tilde{\rho}$ 的期待值为零,即

$$\langle\phi|\tilde{\rho}|\phi\rangle=\langle\phi|\rho_{AB}|\phi\rangle=0, \qquad (8)$$

该式反过来意味着 $\rho_{AB}|\phi\rangle=0$,因为 ρ_{AB} 是正半定的.而对于在叠加 $|\psi\rangle$ 中的每一项 $|\phi\rangle$,都满足 $\rho_{AB}|\phi\rangle=0$ 的话,则得到 $\rho_{AB}|\psi\rangle=0$.

定义 2 von Neumann 条件熵通过用联合密度算子 ρ_{AB} 和条件振幅算子 $\rho_{A|B}$ 被定义为[3,4]

$$S(A|B)=-\mathrm{Tr}'[\rho_{AB}\log_2\rho_{A|B}], \qquad (9)$$

此式与经典的定义(3)式非常类似.因此,$S(A|B)$ 对应于在 B 上的 A 的条件量子熵,并且数学上作为引理 1 的一个结果被很好地定义.在(9)式中的迹被限于 ρ_{AB} 的支集,也就是,ρ_{AB} 和 $1_A\otimes\rho_B$ 的具有零本征值的共同的本征矢量 $|\psi\rangle$ 在 Tr' 中被忽略.这个论述也被用在经典信息理论中以定义条件熵.

定理 1 $\rho_{A|B}$ 的定义和 von Neumann 条件熵的定义意味着,$S(A|B)=S(AB)-S(B)$,如对于 Shannon 熵那样.

首先,用(4)和(9)式,有

$$S(A|B)=-\mathrm{Tr}[\rho_{AB}\log_2\rho_{AB}]$$
$$+\mathrm{Tr}[\rho_{AB}\log_2(1_A\otimes\rho_B)], \qquad (10)$$

式中等号右边第一项显然等同于 $S(AB)$.为了计算(10)式的右边第二项,写

$$\mathrm{Tr}_A[\rho_{AB}\log_2(1_A\otimes\rho_B)]=\mathrm{Tr}_A[\rho_{AB}(1_A\otimes\log_2\rho_B)]$$
$$=\mathrm{Tr}_A[\rho_{AB}]\log_2\rho_B$$
$$=\rho_B\log_2\rho_B, \qquad (11)$$

式中已利用(7)式.由此,(10)式右边的第二项为

$$\mathrm{Tr}_B[\rho_B\log_2\rho_B]=-S(B). \qquad (12)$$

因此,从(10)式,得到了

$$S(A|B)=S(AB)-S(B).$$

引理 2 条件振幅算子 $\rho_{A|B}$ 的谱在直积形式 $U_A\otimes U_B$ 在 ρ_{AB} 上的幺正变换下是不变的.

让我们考虑同构

$$\rho_{AB}\to\rho'_{AB}=(U_A\otimes U_B)\rho_{AB}(U_A^{\dagger}\otimes U_B^{\dagger}). \qquad (13)$$

首先依照这个变换计算联合密度算子在 A 上的部分迹,也就是,

$$\rho'_B=\mathrm{Tr}_A[\rho'_{AB}]=\mathrm{Tr}_A[(U_A\otimes U_B)\rho_{AB}(U_A^{\dagger}\otimes U_B^{\dagger})$$

$$= \mathrm{Tr}_A[1_A \otimes U_B)(U_A \otimes 1_B)\rho_{AB}(U_A^\dagger \otimes 1_B)(1_A \otimes U_B^\dagger)$$
$$= U_B \mathrm{Tr}_A[(U_A \otimes 1_B)\rho_{AB}(U_A^\dagger \otimes 1_B)]U_B^\dagger$$
$$= U_B \rho_B U_B^\dagger, \quad (14)$$

式中已经用了(7)式和迹的基本不变性.由此得到,条件振幅算子按照

$$\rho_{A|B} \to \rho'_{A|B} = (U_A \otimes U_B)\rho_{A|B}(U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger) \quad (15)$$

变换,因而它的谱在 $U_A \otimes U_B$ 下在 ρ_{AB} 上保持不变.

引理 1 显然意味着,$\mathrm{Sup}(\rho_{AB}) \subseteq \mathrm{Sup}(1_A \otimes \rho_B)$.也就是,$\rho_{AB}$ 的支集被包括在 $1_A \otimes \rho_B$ 的支集中.等同地,$\mathrm{Ker}(1_A \otimes \rho_B) \cap \mathrm{Sup}(\rho_{AB}) = \varnothing$,因而由具有 $1_A \otimes \rho_B$ 的零本征值的本征矢量所张的子空间从 ρ_{AB} 的支集中脱离,并且因而 $\rho_{A|B}$ 在 ρ_{AB} 的支集中不包含奇点.当然,存在一个对于概率分布的经典类似,此经典类似保证 $\rho(a|b) = \rho(a,b)/\rho(b)$ 很好地被定义,如果 a,b 使 $\rho(a,b) \neq 0$.的确,如果 b 满足 $\rho(b) = 0$,那末 $\rho(a,b) = 0, \forall a$.这是显然的,因为 $\rho(b) = \sum_a \rho(a,b)$ 和 $\rho(a,b) \geqslant 0$.

综上所述,可以得出如下性质:von Neumann 条件熵 $S(A|B)$ 在积形式 $U_A \otimes U_B$ 的一个幺正变换下是不变的.这个性质可由 $S(A|B)$ 的定义,(9)式,并结合(15)式而得到,并可以按照定理 1 明显地被验证.

3. 可分性条件

定理 2 算子 $\sigma_{AB} = -\log_2 \rho_{A|B} = \log_2(1_A \otimes \rho_B) - \log_2 \rho_{AB}$ 是正半定的,如果由 ρ_{AB} 表示的量子双组元系统是可分的.

让我们考虑一个可分的(或经典相关的)双组元系统,此系统由密度算子 ρ_{AB} 表示,也就是,直积的态的一个凸面的组[7]

$$\rho_{AB} = \sum_i w_i (\rho_A^{(i)} \otimes \rho_B^{(i)}),$$

$$\text{具有} \sum_i w_i = 1 \text{ 和 } 0 \leqslant w_i \leqslant 1, \quad (16)$$

式中 $\rho_A^{(i)}$ 和 $\rho_B^{(i)}$ 分别是在 $\mathscr{H}_A$ 和 $\mathscr{H}_B$ 中的态.权重 w_i 能够一个随机变量的概率分布测量,而此随机变量通过两个方面被用来制备它们的子系统 A 和 B.也就是,如果子系统 A(或 B)在态 $\rho_i^{(A)}$(或 $\rho_i^{(B)}$)中被制备,那末当随机变量取值 i 时,联合系统的态由(16)式给出.让我们定义算子

$$\lambda_{AB} \equiv 1_A \otimes \rho_B - \rho_{AB}. \quad (17)$$

容易检验,λ_{AB} 是正半定的,如果 ρ_{AB} 是可分的.于是,我们有

$$\lambda_{AB} = \sum_i w_i[(1_A - \rho_A^{(i)}) \otimes \rho_B^{(i)}] \geqslant 0, \quad (18)$$

这是因为正算子的一个和是一个正的算子.对于上式方括号中的两项,每项均 $\geqslant 0$.现在,能够得到如下的一般性的表述,即如果 X 和 Y 是两个厄米算子,而且 $X \geqslant Y > 0$(式子 $X \geqslant Y$ 意味着 $X - Y$ 是一个正的半定算子),那么 $\ln X \geqslant \ln Y$,如由 Löwner 定理[8] 所表示的那样.需要说明,此表述的逆不存在.作为以上表述的一个实例,设 $X = 1_A \otimes \rho_B$ 和 $Y = \rho_{AB}$,可由 $\lambda_{AB} \geqslant 0$ 得到 $\sigma_{AB} \geqslant 0$.

由以上论述可以得出:任何一个可分的双组元态满足条件 $\rho_{A|B} \leqslant 1$.因为有 $\rho_{A|B} = \exp_2(-\sigma_{AB})$,所以定理 2 的确表明没有一个条件振幅算子的本征值对于一个可分的态超过 1.这产生对于可分性的一个简单的必要的(但不是充分的)条件.这个性质的经典类似是 $-\log_2 p(a|b) \geqslant 0, \forall a, b$.此不等式的得出是依据下式:$p(a|b) = p(a,b)/p(b) \leqslant 1, \forall a, b$,因为 $p(b) = \sum_a p(a,b)$ 和 $p(a,b) \geqslant 0$.

另外,还可以得出:von Neumann 条件熵 $S(A|B)$ 对于一个可分的双组元态是非负的.因为有 $S(A|B) = \mathrm{Tr}[\rho_{AB}\sigma_{AB}]$,所以这个性质显然可从以下式子得出:$\mathrm{Tr}[XY] \geqslant 0$,如果 $X, Y \geqslant 0$.因此,条件熵的非负性是对于可分性的另一个(较弱的)必要条件[3].

定理 3 存在不可分的双组元态 ρ_{AB},而且算子 σ_{AB} 是正半定的;因此,$\sigma_{AB} \geqslant 0$(或 $\rho_{AB} \leqslant 0$)不是可分性的一个充分条件.

考虑一个由 ρ_{AB} 表示的双组元系统 AB,以另一个在态 $\rho_{A'B'}$ 中的系统 $A'B'$ 延展它.于是,联合的系统由下列直积形式的一个密度算子来表示:

$$\rho_{AA';BB'} = \rho_{AB} \otimes \rho_{A'B'}. \quad (19)$$

我们首先计算联合系统的条件振幅算子(在 BB' 上的 AA' 的条件概率)

$$\rho_{AA'|BB'} = \exp_2[\log_2 \rho_{AA';BB'} - \log_2(1_{AA'} \otimes \rho_{BB'})], \quad (20)$$

式中描述 BB' 的约化密度算子是

$$\rho_{BB'} = \mathrm{Tr}_{AA'}[\rho_{AA';BB'}] = \rho_B \otimes \rho_{B'}. \quad (21)$$

应用对于算子 $X, Y > 0$ 的等式 $\ln(X \otimes Y) = \ln X \otimes 1 + 1 \otimes \ln Y$ 以及它的指数式,也就是,$\exp X \otimes \exp Y = \exp(X \otimes 1 + 1 \otimes Y)$,得到

$$
\begin{aligned}
\rho_{AA'\,|\,BB'} &= \exp_2\left[\log_2\rho_{AB}\otimes 1_{A'B'} + 1_{AB}\otimes\log_2\rho_{A'B'}\right.\\
&\quad\left. - 1_A\otimes\log_2\rho_B\otimes 1_{A'B'} - 1_{AB}\otimes 1_{A'}\otimes\log_2\rho_{B'}\right]\\
&= \exp_2\left[(\log_2\rho_{AB} - 1_A\otimes\log_2\rho_B)\otimes 1_{A'B'}\right.\\
&\quad\left. + 1_{AB}\otimes(\log_2\rho_{A'B'} - 1_{A'}\otimes\log_2\rho_{B'})\right]\\
&= \exp_2\left[\log_2\rho_{AB} - 1_A\otimes\log_2\rho_B\right]\\
&\quad\otimes\exp_2\left[\log_2\rho_{A'B'} - 1_{A'}\otimes\log_2\rho_{B'}\right].
\end{aligned}\tag{22}
$$

因此,有

$$\rho_{AA'\,|\,BB'} = \rho_{A\,|\,B}\otimes\rho_{A'\,|\,B'},\tag{23}$$

此式平行于经典关系式

$$p(aa'\mid bb') = p(a\mid b)p(a'\mid b'),$$

如果 AB 和 $A'B'$ 是独立的双组元系统,也就是,如果 $p(a,a';b,b') = p(a,b)p(a',b')$.结果,有

$$\sum(\rho_{AA'\,|\,BB'}) = \sum(\rho_{A\,|\,B})\otimes\sum(\rho_{A'B'}),\tag{24}$$

式中 $\sum(\rho)$ 表示 ρ 的谱.

(24)式意味着,如果 AB 和 $A'B'$ 是具有 $\rho_{A\,|\,B}\nleq 1$ 和 $\rho_{A'\,|\,B'}\nleq 1$ 的不可分系统,那末联合系统的不可分性必然由 $\rho_{AA'\,|\,BB'}\leqslant 1$ 来表示.另外,$\lambda_{AB}\geqslant 0$ 是对于 2×2 和 2×3 系统的一个充分的可分性条件,而不能断言,$\sigma_{AB}\geqslant 0$ 或 $\rho_{A\,|\,B}\leqslant 1$ 在这些情形中也是充分的,因为 Löwner 定理的逆不成立.有意义的是,能够在数值上证明,仅仅很少的具有两个量子小块的不可分的态由于 $\rho_{A\,|\,B}\leqslant 1$ 而成立.这些"微弱地不可分的"态,有一个经典的条件振幅算子,它们可能有值得研究的性质.

现在,假定 AB 是具有 $\sigma_{AB}\ngeqslant 0$ 或 $\rho_{AB}\nleq 1$ 的一个不可分的系统.换言之,算子 $\rho_{A\,|\,B}$ 容许一个超过 1 的本征值.又假定,$A'B'$ 对应于在一个直积态 $\rho_{A'B'} = \rho_{A'}\otimes\rho_{B'}$ 中的两个独立的系统.对于 $A'B'$ 的条件振幅算子为 $\rho_{A'B'} = \rho_{A'}\otimes 1_{B'}$,正如它的经典对应式 $p(a\,|\,b) = p(a)$(假设 $p(a,b) = p(a)p(b)$)一样.显然,有 $\rho_{A'\,|\,B'}\leqslant 1$,因为 $A'B'$ 是可分的.按照(24)式,$\rho_{AA'\,|\,BB'}$ 的本征值是 $\rho_{A\,|\,B}$ 的本征值和 $\rho_{A'\,|\,B'}$ 的本征值的成对的积.因此,容易得到一个具有足够小的 $\rho_{A'\,|\,B'}$ 的本征值的系统 $A'B'$,其本征值的任一个与 $\rho_{A\,|\,B}$ 的一个非经典的(>1)本征值的积在 $\rho_{AA'\,|\,BB'}$ 的本征值中产生,而 $\rho_{AA'\,|\,BB'}$ 的所有本征值均 $\leqslant 1$.于是,扩展的系统由 $\sigma_{AA';BB'}\geqslant 0$ 或 $\rho_{AA'\,|\,BB'}\leqslant 1$ 表示,而它显然包含一个可分的分量 AB.不可分性的这样一个淡化总是能够达到的,由于一个系统 $A'B'$ 是足够大并极大地混乱的,也就是,$\rho_{A'B'}\sim 1_{A'}\otimes 1_{B'}$.显然,条件 $\sigma_{AB}\geqslant 0$ 或者 $\rho_{A\,|\,B}\leqslant 1$ 对于可分性不是充分的.

4. 量子双组元系统的非经典特征

在量子信息理论中,对于由一个密度算子 ρ_{AB} 表示的一个双组元系统,我们定义一个条件振幅算子 $\rho_{A\,|\,B}$(在 ρ_{AB} 的支集上定义的一个正半定厄米算子),它起与条件概率同样的作用.特别是,这个算子能够用来定义一个 von Neumann 条件熵,$S(A\,|\,B) = -\mathrm{Tr}[\rho_{AB}\log_2\rho_{A\,|\,B}]$,它完全与 Shannon 条件熵相类似.许多经典性质的量子的对应性质也成立:1) $\rho_{A\,|\,B}$ 在 ρ_{AB} 的支集上被定义,因而 $S(A\,|\,B)$ 很好地被定义,2) $S(A\,|\,B) = S(AB) - S(B)$,3) $\rho_{A\,|\,B} = \rho_A\otimes 1_B$,如果 A 和 B 是独立的,4) $\rho_{AA'\,|\,BB'} = \rho_{A\,|\,B}\otimes\rho_{A'\,|\,B'}$,如果 $\rho_{AA'\,|\,BB'} = \rho_{AB}\otimes\rho_{A'B'}$,5) 当在 ρ_{AB} 上实施一个局域的幺正变换 $U_A\otimes U_B$ 时,$\rho_{A\,|\,B}$ 按照 $(U_A\otimes U_B)\rho_{A\,|\,B}(U_A^\dagger\otimes U_B^\dagger)$ 变换,因而它的谱和随之 $S(A\,|\,B)$ 在 ρ_{AB} 上的这样的变换之下是不变的.

在描述一个量子的双组元系统而不是一个经典的双组元系统时出现的主要的非经典的特征是 $\rho_{A\,|\,B}$ 可以有一个"非经典的"谱,也就是,ρ_{AB} 的本征值可能超过 1,此特征反过来意味着 $S(A\,|\,B)$ 可以是负的.更特别是,对于任一可分态,$\rho_{A\,|\,B}\leqslant 1$,这也直接地意味着 $S(A\,|\,B)\geqslant 0$.因此,对于可分性的一个必要条件是条件振幅算子有一个"经典的"谱,或者条件熵是非负的(后者是一个较弱的条件).这些条件一般来说不是充分的,因为以一个具有大维数的可分态展开一个不可分的态可能产生不可分性的一个淡化,也就是,它可能给出一个具有 $\rho_{A\,|\,B}\leqslant 1$ 的一个态.换句话说,一些不可分的态以 $\rho_{A\,|\,B}\leqslant 1$ 存在,并且显然,一些不可分的态以 $S(A\,|\,B)\geqslant 0$ 存在,即使 $\rho_{A\,|\,B}\nless 1$,这个淡化效应在 $2\times$ 系统的情形中也出现.这来,多部分的牵连的一个新奇的类型已被发现,它不以任一双组元分离被展现[9],并且给出所谓的"束缚的"牵连[10],分析对于这样的系统的条件振幅算子的谱可能从新的观点解释多部分的牵连.

[1] Divincenzo D P 1995 *Science* **270** 255

[2] Barenco A *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 4083

[3] Cerf N J and Adami C 1991 *Phys. Rev. Lett.* **79** 5194

[4] Cerf N J and Adami C 1999 *Phys. Rev.* A **60** 893

[5] Horodecki R and Horodecki M 1996 *Rhys. Rev.* A **54** 1838

[6] Peres A 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 1413

[7] Hill S and Wootters W K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 5022

[8] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Leet.* **80** 2245

[9] Bennett C H *et al* 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 5385

[10] Horodecki M *et al* 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5239

The research of properties of the quantum conditonal amplitude operator*

Zhang De-Xing

(*Department of Physics*, *Guizhou University*, *Guiyang* 550025, *China*)

(Received 17 June 2003; revised manuscript received 24 September 2003)

Abstract

This paper analyzes the properties of the quantum conditional amplitude operator. This operator plays a role similar to that of the conditional probability in classical information theory. One argues that the spectrum of the conditional operator that characterizes a quantum bipartite system is invariant under local unitary transformations, and shows its inseparability. It is proven that the conditional amplitude operator of a separable state cannot have an eigenvalue exceeding unity. A related separability condition based on the non-negativity of the von Neumann conditional entropy is obtained.

Keywords: conditional probability, conditional amplitude operator, von Neumann conditional entropy, condition for separability

PACC: 0365, 0530

* Project supported by the Guizhou Province Science Fundation, China (Grant No. 003066).