

物质纯重力场部分的能量-动量张量研究*

娄太平

(东北大学材料与冶金学院, 沈阳 110004)

(2003 年 10 月 8 日收到, 2003 年 11 月 13 日收到修改稿)

认为物质的质量(能量)存在形式可分为两部分,一部分是以纯物质形式存在的,另一部分是以纯重力场形式存在的.物质质量(能量)这两种形式各自对应着相应的能量-动量张量.物质总的能量-动量张量可表示为 $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(I)} + T_{\mu\nu}^{(II)}$, 这里 $T_{\mu\nu}^{(I)}$, $T_{\mu\nu}^{(II)}$ 分别代表物质纯物质部分和纯重力场部分的能量-动量张量.通过类比电磁理论,定义 $\omega_{\mu} \equiv -c^2 g_{\mu 0} / \sqrt{g_{00}}$, 并引入一个反对称张量 $D_{\mu\nu} = \partial\omega_{\mu} / \partial x^{\nu} - \partial\omega_{\nu} / \partial x^{\mu}$, 则物质纯重力场部分的能量-动量张量为 $T_{\mu\nu}^{(II)} = (D_{\mu\alpha} D_{\nu}^{\alpha} - g_{\mu\nu} D_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta}) / 4 \cdot 4\pi G$. 则包含重力场贡献的重力场方程为 $R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R / 2 = 8\pi G (T_{\mu\nu}^{(I)} + T_{\mu\nu}^{(II)}) / c^4$. 将包含重力场贡献的重力方程应用到一个与时间无关质量为 M 孤立球对称物质体系, 可得到其纯物质球体之外的线素为 $ds^2 = -(1 - m/r)^2 dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + (1 - m/r)^2 c^2 dt^2$, 这里 $m = GM/c^2$.

关键词: 能量-动量张量, 纯重力场, 重力场方程, 标量重力势, 矢量重力势

PACC: 0400, 0470, 0490

1. 引言

我们知道,在麦克斯韦的电磁理论中,物质的一部分能量存留在电磁场之内,存留在带电和带磁物体周围的空间中,其能量密度可表述为^[1]

$$\rho_e = \frac{1}{8\pi} (E_e^2 + H_e^2), \quad (1)$$

式中 E_e 和 H_e 分别为电场强度和磁场强度.其相应的能量-动量张量也与存留在电磁场之内的能量相关,即可表述为

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (2)$$

这里 $F_{\mu\nu}$ 为电磁张量,其形式可由电磁矢势 A_{μ} 对坐标微商表述,

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}. \quad (3)$$

与电磁理论类似,在重力场中物质的一部分能量也应存留在重力场之内,以场的形式存在于重力场中的能量密度应该是重力场强度的函数,其相应的能量-动量张量也与存留在重力场之内的能量相关.当达到牛顿近似时,其形式应类似于电磁场中的能量-动量张量.关于重力场中具有能量-动量这一

点,虽然有不少学者对这个问题进行了深入的探讨和研究,并提出了许多理论,像 Einstein^[2,3] 和 Tolman^[4], Landau 和 Lifshitz^[5], Müller 表述^[6-8] 及段一士表述^[9,10] 等,但所给出的重力场的能量-动量张量均不属于物质本身的一部分,而是由于物质的存在导致了周围时空畸变,使重力场体现出了能量和动量的特征并对广义协变微分守恒律有贡献.关于重力场的能量-动量张量仍存在着许多内在的矛盾,仍是一个没有完全解决的问题^[11]. 同时也没有明确给出物质本身的能量在其周围时空中存在的形式.本文尝试给出一个解释.

2. 物质纯重力场部分的能量-动量张量假设

Einstein 在他的广义相对论中给出了重力场方程的形式为^[11]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (4)$$

式中 $R_{\mu\nu}$ 为时空的曲率张量, $T_{\mu\nu}$ 物质的能量-动量张量.其中 $T_{\mu\nu}$ 为不包含重力场贡献在内的纯物质的能量-动量张量. Einstein 的重力场方程是作为一个对牛顿重力场中泊松方程形式的自然推广而假设

* 国家自然科学基金(批准号 50274030)和教育部留学回国人员科研启动基金资助的课题.

的.本文作者认为,牛顿重力场中物质的质量作为“重力荷”应类似于电荷在其周围形成的重力场中留存一部分能量,这部分能量应属于重力荷本身的一部分.当然,这与带电荷的粒子不同的是电场中存留了电荷粒子的能量,但却不存留电荷粒子本身的一部分电荷.在牛顿重力场中,对重力荷质量而言,其留存在重力场中的能量被忽略了,所以泊松方程没有包含重力场的贡献.本文认为,物质的质量(能量)存在形式可分为两部分,其中一部分是以纯物质形式存在的,另一部分则是与带电物质类似是以场形式存在的.物质能量的这两种分布形式各自对应着相应的能量-动量张量,则包含重力场贡献在内的物质总的能量-动量张量可表述为

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(I)} + T_{\mu\nu}^{(II)}, \quad (5)$$

式中 $T_{\mu\nu}^{(I)}$, $T_{\mu\nu}^{(II)}$ 分别代表物质纯物质部分和纯重力场部分的能量-动量张量.根据 Einstein 的重力场方程(4)的假设和方程(5)的假设,给出包含重力场贡献的重力场方程形式为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu}^{(I)} + T_{\mu\nu}^{(II)}). \quad (6)$$

上述方程表明,由于物质的存在,使时空结构弯曲.弯曲的结构中又包含了物质的一部分能量,这部分能量反过来又作用于时空结构.物质存在的形式决定了时空结构的特征,时空结构的特征又改变了物质存在的形式.下面给出物质纯重力场部分的能量-动量张量.

重力场理论给出了重力场强的表述为^[11]

$$a_i = -\frac{\partial\chi}{\partial x^i} - c\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}\frac{\partial\gamma_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (7)$$

式中 χ 为标量重力势, γ_i 为矢量重力势, 分别定义为

$$\begin{aligned} \chi &= -\frac{c^2}{2}(1 - g_{00}), \\ \gamma_i &= -\frac{g_{i0}}{\sqrt{g_{00}}} \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (8)$$

若定义

$$\begin{aligned} \omega_i &= c^2\gamma_i \quad (i = 1, 2, 3), \\ \omega_0 &= -\frac{c^2g_{00}}{\sqrt{g_{00}}}, \\ dx^0 &= cdt, \end{aligned} \quad (9)$$

则方程(7)可改写为

$$a_i = \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial x^i} - \frac{\partial\omega_i}{\partial x^0}\right) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (10)$$

即

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial x^1} - \frac{\partial\omega_1}{\partial x^0}\right), \\ a_2 &= \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial x^2} - \frac{\partial\omega_2}{\partial x^0}\right), \\ a_3 &= \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial x^3} - \frac{\partial\omega_3}{\partial x^0}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

仿照方程(3)电磁张量的定义,在重力场中引入一个反对称张量 $D_{\mu\nu}$, 其定义为

$$D_{\mu\nu} = \frac{\partial\omega_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\omega_\nu}{\partial x^\mu}, \quad (12)$$

若定义

$$\begin{aligned} b_1 &= \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x^3} - \frac{\partial\omega_3}{\partial x^2}\right), \\ b_2 &= \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x^1} - \frac{\partial\omega_1}{\partial x^3}\right), \\ b_3 &= \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x^2} - \frac{\partial\omega_2}{\partial x^1}\right), \end{aligned} \quad (13)$$

则(12)式可表示为

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}}\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & 0 & b_3 & -b_2 \\ -a_2 & -b_3 & 0 & b_1 \\ -a_3 & b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

其逆变张量定义为

$$D^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}D_{\alpha\beta}.$$

仿照方程(2)的形式,给出物质纯重力场部分的能量-动量张量 $T_{\mu\nu}^{(II)}$ 为

$$T_{\mu\nu}^{(II)} = \frac{1}{4\pi G}\left(D_{\mu\alpha}D_\nu^\alpha - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}D_{\alpha\beta}D^{\alpha\beta}\right). \quad (15)$$

由上述方程可看到,物质纯重力场部分的能量-动量张量是由其度规张量和与度规张量相关的重力矢势所决定的.即时空结构特征决定了物质纯重力场部分的能量分布.物质两种存在形式可以相互转化,这与物质的分布形式及其周围的时空结构有关.

3. 一个与时间无关球对称的纯物质球外部空间的重力场

对于一个与时间无关具有球对称的纯物质球而言,其球坐标表示的线素可写为^[12]

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 \\ &\quad - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + e^\eta c^2 dt^2. \end{aligned} \quad (16)$$

这里 λ 和 η 仅是 r 的函数. 有

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (17)$$

其逆变张量为

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

由方程 (11) (13) 和 (17) 可得

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{c^2}{2} e^\eta \frac{d\eta}{dr}, \\ a_2 &= a_3 = 0, \\ b_1 &= b_2 = b_3 = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

则方程 (14) 为

$$D_{\mu\nu} = e^{-\frac{\eta}{2}} \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

其逆变张量 $D^{\mu\nu}$ 可表示为

$$D^{\mu\nu} = e^{-(\frac{3\eta}{2} + \lambda)} \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

相应的 $T_{\mu\nu}^{(II)}$ 表示为

$$T_{\mu\nu}^{(II)} = -\frac{c^4}{32\pi G} e^{-\lambda} \left(\frac{d\eta}{dr}\right)^2 \begin{pmatrix} e^\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (22)$$

纯物质球外部空间, 即包含重力场贡献的真空为

$$T_{\mu\nu}^{(I)} = 0. \quad (23)$$

因此在纯物质球外部空间的区域, 方程 (6) 可表示为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(II)}. \quad (24)$$

方程 (24) 的三个独立分量分别为

$$e^{(\eta-\lambda)} \left[-\frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{r^2} (e^\lambda - 1) \right] = -\frac{1}{4} e^{(\eta-\lambda)} \left(\frac{d\eta}{dr}\right)^2, \quad (25)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{d\eta}{dr} + \frac{1}{r^2} (e^\lambda - 1) = \frac{1}{4} \left(\frac{d\eta}{dr}\right)^2, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &-e^{-\lambda} r^2 \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 \eta}{dr^2} - \frac{1}{4} \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\eta}{dr} + \frac{1}{4} \left(\frac{d\eta}{dr}\right)^2 \right. \\ &\left. + \frac{1}{2r} \left(\frac{d\eta}{dr} - \frac{d\lambda}{dr}\right) \right] = -\frac{1}{4} r^2 e^{-\lambda} \left(\frac{d\eta}{dr}\right)^2. \end{aligned} \quad (27)$$

由方程 (25) 和 (26) 可得到如下关系:

$$\frac{d(\eta + \lambda)}{dr} = 0, \quad (28)$$

即

$$\eta(r) + \lambda(r) = \text{常数}.$$

考虑到 $r \rightarrow \infty$ 时, 渐近为牛顿理论, 因此有关系

$$\eta(r) + \lambda(r) = 0.$$

解方程 (25) - (27), 可得

$$e^\eta = e^{-\lambda} = \left(1 - \frac{m}{r}\right)^2, \quad (30)$$

式中 $m = GM/c^2$. 因此, 一个与时间无关质量为 M 的球对称纯物质球外部的线素可写为

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{1}{\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2} dr^2 - r^2 d\theta^2 \\ &- r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 c^2 dt^2. \end{aligned} \quad (31)$$

这与著名的 Schwarzschild 线素有所不同^[12]. 方程 (31) 也表明了“黑洞”存在的可能, 只是黑洞的半径不是已公认的 $2GM/c^2$, 而是 GM/c^2 . 另外, 也可以看到, 在整个时空域上, 不会出现所谓的“时间”坐标轴与“空间”坐标轴相互转换的现象^[11].

图 1 表明了标量重力势 χ 随距离 r 的变化特征. Schwarzschild 的结果 (见图中虚线部分) 表明, 标量重力势 χ 随距离 r 的变化始终是负的, 且当 $r \rightarrow 0$ 时, $\chi \rightarrow -\infty$, 物质将收缩到中心点, 即 $r = 0$ 处, 形

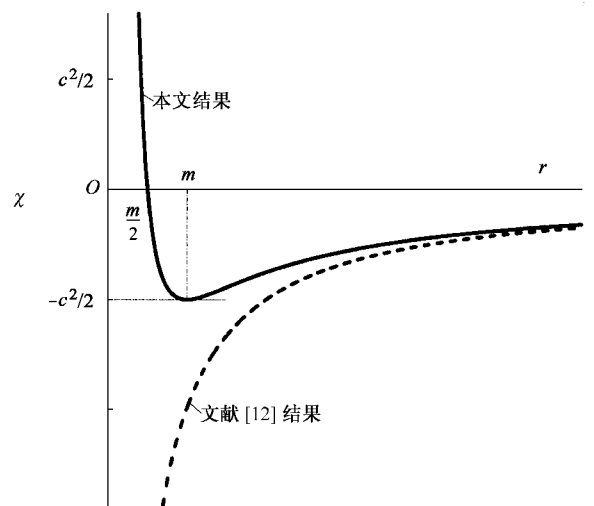


图 1 标量重力势 χ 随距离 r 的变化函数

成奇点的黑洞^[13-21]. 本文结果(见图中实线部分)则表明, 曲线在 $r = m$, χ 取最小值, $-c^2/2$; 当 $r = m/2$, $\chi = 0$; 当 $r < m/2$, $\chi > 0$, 即表现出排斥特征, 表明物质将不会收缩到中心点而形成奇点.

上述结果表明, 时空发生弯曲后, 会产生两个可能的效果, 一是熟知的处在此时空中的物质之间具有相互吸引的特征, 即万有引力. 另一则是物质一部分能量留存在弯曲的时空中导致了物质之间存在相

互排斥特征. 一般情况下, 物质之间的距离较大时, 主要表现出相互吸引的特征. 而当物质之间的距离很小时($r \sim m = GM/c^2$), 物质聚集在一个很小的区域内, 使物质之间的排斥作用就变得明显了. 当 $r < m/2$ 时, 物质之间排斥大于吸引而成为主要的相互作用. 物质之间这种排斥作用将阻止物质在引力作用下向中心坍缩时形成奇点. 引伸的一个结论是, 在黑洞中心处无奇点发生.

- [1] Landau L D, Lifshitz E M 1959 *Field Theory* (Beijing : People Education Press) chap 4 (in Chinese) [朗道 L D, 栗弗席兹 E M 1959 场论(中译本)(北京:人民教育出版社)第4章]
- [2] Einstein A 1915 *Berl. Ber.* **778** 178
- [3] Einstein A 1918 *Berl. Ber.* **781** 448
- [4] Tolman R 1930 *Phys. Rev.* **33** 875
- [5] Landau L D, Lifshitz E M 1975 *The Classical Theory of Field* (Pergamon Press) § 96
- [6] Møller C 1958 *Annls of Physics* **4** 347
- [7] Møller C 1961 *Annls of Physics* **12** 118
- [8] Møller C 1964 *Nucl. Phys.* **57** 330
- [9] Duan Y S, Zhang J Y 1963 *Acta Phys. Sin.* **19** 11 (in Chinese) [段一士、张敬业 1963 物理学报 **19** 11]
- [10] Duan Y S, Feng S X 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 1373 (in Chinese) [段一士、冯世祥 1995 物理学报 **44** 1373]
- [11] Liao L 1987 *General Theory of Relativity* (Beijing : Higher Education Press) pp32—34, 131—153 (in Chinese) [刘 辽 1987 广义相对论(北京:高等教育出版社)第32—34页,第131—153页]
- [12] Wu D Y 1983 *The Theory of Relativity* (Beijing : Science Press) p206—210 (in Chinese) [吴大猷 1983 相对论(北京:科学出版社)第206—210页]
- [13] Landau L D 1932 *Phys. Z. Sowjeunion.* **1** 285
- [14] Oppenheimer J R, Volkoff G M 1939 *Phys. Rev.* **55** 374
- [15] Kruskal M D 1960 *Phys. Rev.* **119** 1743
- [16] Penrose R 1965 *Phys. Rev. Lett.* **14** 57
- [17] Hawking S W 1966 *Phys. Rev. Lett.* **17** 144
- [18] Gao C J, Shen Y G 2002 *Chin. Phys.* **11** 890
- [19] Gao C J, Shen Y G 2003 *Chin. Phys.* **12** 371
- [20] Ding T R 2004 *Chin. Phys.* **13** 268
- [21] Jing J L, Zhou S Q, Huang Y B 2001 *Chin. Phys.* **10** 698

A study about the energy-momentum tensor of pure gravitational field part of matter *

Lou Tai-Ping

(School of Materials and Metallurgy , Northeastern University ,Shenyang 110004 ,China)

(Received 8 October 2003 ; revised manuscript received 13 November 2003)

Abstract

In this paper the existing forms of matter is supposed to be divided into two parts , one is the pure matter part and another is the pure gravitational field part . The two parts of existing forms of matter are corresponding to their energy-momentum tensors , respectively . So the total energy-momentum tensor of matter can be expressed as $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(I)} + T_{\mu\nu}^{(II)}$, where $T_{\mu\nu}^{(I)}$ and $T_{\mu\nu}^{(II)}$ are energy-momentum tensors of pure matter part and pure gravitational field part , respectively . By analogy with the electromagnetic theory a vector is defined as $\omega_{\mu} \equiv -c^2 g_{\mu 0} / \sqrt{g_{00}}$, and an antisymmetric tensor is defined as $D_{\mu\nu} = \partial\omega_{\mu} / \partial x^{\nu} - \partial\omega_{\nu} / \partial x^{\mu}$, so the energy-momentum tensor of the pure gravitational field part of the matter is supposed to be $T_{\mu\nu}^{(II)} = (D_{\mu\phi} D_{\nu}^{\phi} - g_{\mu\nu} D_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta} / 4) 4\pi G$. The gravitational field equation which contains pure gravitational field part of matter can be expressed by $R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R/2 = 8\pi G (T_{\mu\nu}^{(I)} + T_{\mu\nu}^{(II)}) c^4$. The theory of the gravitational field which contains the energy-momentum tensor of pure gravitational field part of matter can be used in an isolated globular symmetry for pure matter with mass M , which is time-independent and the line-element of time-space for the out side of globular symmetry of pure matter can be obtained by $ds^2 = -(1 - m/r)^2 dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + (1 - m/r)^2 c^2 dt^2$, where $m = GM/c^2$.

Keywords : energy-momentum tensor , pure gravitational field , gravitational field equation , scalar gravitational potential , vector gravitational potential

PACC : 0400 , 0470 , 0490

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50274030) , and the Scientific Research Foundation for Returned Overseas Chinese Scholars from the Ministry of Education of China .