第 53 卷 第 6 期 2004 年 6 月
1000-3290/2004/53(06)/1662-03
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.53, No.6, June, 2004
©2004 Chin. Phys. Soc.

一类类光测地线的加速度*

田贵花[1)2)†] 赵 峥[2)]

1) (北京邮电大学理学院, 北京 100876)

2) (北京师范大学物理系, 北京 100875)

(2003 年 8 月 21 日收到; 2003 年 9 月 25 日收到修改稿)

类光测地线 $\gamma_0(\lambda)$ 与二维类空超曲面 φ 正交, λ 为其仿射参量. 假如在类光测地线 $\gamma_0(\lambda)$ 上存在一点 $r(r=\gamma_0(\lambda_r))$ 共轭于类空超曲面 φ, 则对于 $\gamma_0(\lambda)$ 上任一点 $q(q=\gamma_0(\lambda_q))$ 满足 $\lambda_q>\lambda_r$, 一定能把 γ_0 连续变形成一条从 φ 到 q 的类时曲线. 当产生类时曲线的变分矢量场不是类光测地线上的广义 Jacobi 场时, 这些类时曲线在趋于类光测地线时, 它们的固有加速度趋于无穷大.

关键词: 类光测地线, 共轭点, 变分

PACC: 0420

众所周知, 在广义相对论中, 不仅连接固定点 p, q 的类光测地线 $\gamma(\lambda)$, 在有共轭点时会经过微小变形成为连接 p, q 的类时曲线, 而且把 p 换成二维类空超曲面, 类似的结论也成立. 即, 如果存在一条连接固定点 q 和二维类空超曲面 φ 的类光测地线 $\gamma_0(\lambda)$, 它与超曲面 φ 正交, 而且沿该类光测地线存在一点 $r\in(\varphi, q)$ 共轭于超曲面 φ, 则存在一个对类光测地线 $\gamma_0(\lambda)$ 的变分, 由此得到的是连接超曲面 φ 和固定点 q 的类时曲线[1,2]. 当产生类时曲线的变分矢量场不是类光测地线上的广义 Jacobi 场时, 这些类时曲线在趋于类光测地线时, 它们的固有加速度趋于无穷大.

我们首先给出类光测地线 $\gamma_0(\lambda)$ 的变分的准确含义 类光测地线 γ_0 与超曲面 φ 正交, 它的变分是 C^1 映射[1] σ: $(-\varepsilon, \varepsilon)\times[0, \lambda_q]\to M$, 满足

1) $\sigma(0, \lambda)=\gamma_0(\lambda)$;

2) 存在 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 把区间 $0=\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n=\lambda_q$ of $[0, \lambda_q]$ 分成 $n-1$ 个分区间, σ 在每个分区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)\times[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ 上是 C^3 的;

3) 对于每个常数 u, $u\in(-\varepsilon, \varepsilon)$ 且 $u\neq 0$, $\sigma(u, \lambda)$ 是类时曲线, 记为 $\gamma_u(\lambda)$;

4) $\sigma(u, 0)$ 在二维超曲面 φ 上, $\sigma(u, \lambda_q)=q$.

记 $\gamma_u(\lambda)$ 的切矢为 $\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_u^a\equiv v_u^a$, 其中, v_0^a 满足类光测地线方程

$$v_0^b\nabla_b v_0^a=0. \tag{1}$$

设曲线 $\sigma(u, \lambda)$ 且 $\lambda=\mathrm{const}$ 的切矢为 $\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^a\equiv Z^a(u, \lambda)$, 定义类光测地线 $\gamma_0(\lambda)$ 上的变分矢量场 $Z^a(\lambda)$ 为 $Z^a(0, \lambda)$, 则 $Z^a(u, \lambda)$ 对 v_u^a 的李导数为零[1], 即

$$v_u^b\nabla_b Z^a(u, \lambda)=Z^b(u, \lambda)\nabla_b v_u^a, \tag{2}$$

记 $g_{ab}v_u^a v_u^b$ 为 $-\alpha_u^2$, 则

$$-\alpha_u^2=g_{ab}v_u^a v_u^b. \tag{3}$$

用泰勒级数把 $-\alpha_u^2$ 展开, 得

$$-\alpha_u^2=-\alpha_0^2+\beta_1 u+\beta_2 u^2+0(u^3), \tag{4}$$

其中

$$\alpha_0^2=g_{ab}v_0^a v_0^b=0. \tag{5}$$

$-\alpha_u^2$ 对 u 的一阶导数必须是零[1], 即

$$\beta_1=\frac{\partial(-\alpha^2)}{\partial u}\Big|_{u=0}=2\frac{\partial}{\partial\lambda}[g_{ab}v_0^a Z^b]=0, \tag{6}$$

也就是[1]

$$g_{ab}v_0^a Z^b=0, \tag{7}$$

即得

$$-\alpha_u^2=\beta_2 u^2+0(u^3), \tag{8}$$

其中 $\beta_2=\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}(-\alpha_u^2)\right]_{u=0}$ 是[1]

* 国家自然科学基金(批准号: 10073002, 10373003, 10347151, 10375008)资助的课题.

† E-mail: tgh-2000@263.net

$$\beta_2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial u}(g_{ab}v_u^a Z^b(u,\lambda))\right]_{u=0} - [Z^a(\lambda)v_0^d\nabla_d(v_0^c\nabla_c Z_a(\lambda)) + R_{dcae}v_0^c v_0^e Z^d(\lambda)Z^a(\lambda)].\qquad(9)$$

类时曲线 $\gamma_u(\lambda)$ 上的参数 λ 一般不是该曲线上的固有时 τ，参数 λ 和 τ 之间的关系由下面几个公式决定：

$$g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)_u^a\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)_u^b = -1,\qquad(10)$$

$$v_u^a = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_u^a = \left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a.\qquad(11)$$

由(3)式，可得

$$\left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2 = \alpha_u^2.\qquad(12)$$

同样，矢量 $\tilde{A}_{ua}$ 定义为

$$\tilde{A}_{ua} = v_u^c\nabla_c v_{ua},\qquad(13)$$

它与类时曲线 $\gamma_u(\lambda)$ 上的固有加速度 A_a 不同：A_a 的定义为

$$A^a = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^b\nabla_b\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a,\qquad(14)$$

这两个矢量的关系为[3]

$$\tilde{A}_u^a = \alpha_u^2 A^a + \frac{1}{2\alpha_u^2}v_u^a v_u^b\nabla_b\alpha_u^2,\qquad(15)$$

由(15)和(8)式，计算得

$$g_{ab}\tilde{A}_u^a\tilde{A}_u^b = \alpha_u^4 A^a A_a - \frac{1}{4}\alpha_u^2\left[\frac{1}{\alpha_u^2}\frac{\partial\alpha_u^2}{\partial\lambda}\right]^2 = \beta_2^2 A^a A_a u^4 + \frac{1}{4\beta_2}\left[\frac{d\beta_2}{d\lambda}\right]^2 u^2 + 0(u^3).\qquad(16)$$

这是一个非常重要的公式.

我们有另一个重要的公式[1]

$$Z^d(u,\lambda)\nabla_d\tilde{A}_{ua} = Z^d(u,\lambda)\nabla_d(v_u^c\nabla_c v_{ua}) = v_u^d\nabla_d(v_u^c\nabla_c Z_a(u,\lambda)) + R_{dcae}v_u^c v_u^e Z^d(u,\lambda).\qquad(17)$$

选择沿类光测地线 $\gamma_0(\lambda)$ 平移的伪正交标架 $E_1^a, E_2^a, E_3^a, E_4^a$，满足

$$E_4^a = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_0^a = v_0^a,$$

$$g_{ab}E_i^a E_i^b = 1, i = 1,2;$$

$$g_{ab}E_i^a E_i^b = 0, i = 3,4;$$

$$g_{ab}E_i^a E_j^b = 0, i = 1,2, j = 3,4$$

$$g_{ab}E_3^a E_4^b = -1,$$

$$g_{ab}E_1^a E_2^b = 0,$$

对于 λ 等于常数，上述标架的四个矢量是常矢量，可沿 $\sigma(u,\lambda)$ 且 $\lambda=$ 常数的曲线对它们进行平移，得到 $E_i^a(u,\lambda)$，$i=1,2,3,4$，满足当 $u=0$ 时，$E_i^a(0,\lambda)=E_i^a$. 这样矢量 $\tilde{A}_u^a$ 可分解为

$$\tilde{A}_u^a = \sum_{i=1}^4\tilde{A}_u^i E_i^a(u,\lambda),\qquad(18)$$

且有

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^d\nabla_d\tilde{A}_u^a\right]_{u=0} = \sum_{i=1}^4\left[E_i^a(u,\lambda)\left(\frac{d\tilde{A}_u^i}{du}\right)\right]_{u=0} = \sum_{i=1}^4 E_i^a\left(\frac{d\tilde{A}_u^i}{du}\right)_{u=0}.\qquad(19)$$

由(17)式，并对其取极限 $u\to 0$，得

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^d\nabla_d\tilde{A}_u^a\right]_{u=0} = v_0^d\nabla_d(v_0^c\nabla_c Z^a(\lambda)) + R_{edc}^a v_0^c v_0^e Z^d(\lambda).\qquad(20)$$

设

$$\left(\frac{d\tilde{A}_u^i}{du}\right)_{u=0} = \tilde{C}^i, i = 1,2,3,4,$$

则

$$\tilde{C}^i = v_0^d\nabla_d(v_0^c\nabla_c Z^i(\lambda)) + R_{edc}^i v_0^c v_0^e Z^d(\lambda),\quad i = 1,2,3,4,\qquad(21)$$

由(7)式和黎曼曲率张量 R_{abcd} 的反对称性质可知，(21)式的第二部分与 v_{oa} 的缩并为零. 这样由(20)式推出

$$\left(\frac{d\tilde{A}_u^3}{du}\right)_{u=0} = \tilde{C}^3 = 0,\qquad(22)$$

故，有

$$\tilde{A}_u^1 = u\tilde{C}^1 + 0(u^2),$$

$$\tilde{A}_u^2 = u\tilde{C}^2 + 0(u^2),$$

$$\tilde{A}_u^4 = u\tilde{C}^4 + 0(u^2),$$

$$g_{ab}\tilde{A}_u^a\tilde{A}_u^b = u^2(\tilde{C}^1\tilde{C}^1 + \tilde{C}^2\tilde{C}^2) + 0(u^3).\qquad(23)$$

1)如果 $\tilde{C}^1\tilde{C}^1+\tilde{C}^2\tilde{C}^2>0$，从(8)式可得 $\beta_2<0$. 除非在 u 趋于零时，$A^2=A^aA_a$ 趋于无穷大；否则，(16)式与(23)式是相互矛盾的. 所以，得到类时曲线 $\gamma_u(\lambda)$ 的固有加速度在 u 趋于零时为无穷大.

2)如果 $\tilde{C}^1=0$，$\tilde{C}^2=0$，则变分矢量场 Z^a 的空间分量满足方程(21)，即

$$\tilde{C}^i = v_0^d\nabla_d(v_0^c\nabla_c Z^i(\lambda)) + R_{edc}^i v_0^c v_0^e Z^d(\lambda), i = 1,2,\qquad(24)$$

它说明变分矢量场 Z^a 是类光测地线 $\gamma_0(\lambda)$ 上的广义 Jacobi 场[1]. 由于 Z^a 不恒等于零，但在 q 点为零，说明 $\gamma_u(\lambda)$ 也是测地线.

连接固定点 q 和二维类空超曲面 φ 的类光测

地线 $\gamma_0(\lambda)$，它与超曲面 φ 正交，假设沿该类光测地线存在一点 $r\in(\varphi,q)$ 共轭于超曲面 φ，则存在一个对类光测地线 $\gamma_0(\lambda)$ 的变分，由此得到的是连接超曲面 φ 和固定点 q 的类时曲线[1]．当产生类时曲线的变分矢量场不是类光测地线上的广义 Jacobi 场时，这些类时曲线在趋于类光测地线时，它们的固有加速度趋于无穷大．

[1] Hawking S W and Ellis G F R 1973 *The large scale structure of space-time* (Cambridge: Cambridge University Press)

[2] Wald R M 1984 *General Relativity* (Chicago: The University of Chicago Press)

[3] Tian G H, Zhao Z and Liang C B 2002 *Class. Quantum Grav.* **19** 2777

Acceleration of a kind of null geodesic*

Tian Gui-Hua[1)2)] Zhao Zheng[2)]

1) (*School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China*)

2) (*Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China*)

(Received 21 August 2003; revised manuscript received 25 September 2003)

Abstract

When a null geodesic γ_0, orthogonal to a space-like two-surface φ, is from φ to q with a point $r\in(\varphi, q)$ conjugate to φ along $\gamma_0(\lambda)$, there will be a variation of $\gamma_0(\lambda)$ which will give time-like curves from φ to q. This is a well-known theory in the famous bood. When the variation vector is not a generalized Jacobi field on the null geodesic γ_0, the acceleration of these time-like curves approaches infinity as the time-like curves approach the null geodesic.

Keywords: null geodesic, conjugate points, variation

PACC: 0420

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10073002, 10373003, 10347151, 10375008).