

# 端口受控哈密顿系统的混沌反控制研究\*

陶建武<sup>1)</sup> 石要武<sup>2)</sup> 常文秀<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> 空军航空大学, 长春 130022)

<sup>2)</sup> 吉林大学通信工程学院, 长春 130025)

(2003 年 5 月 26 日收到, 2003 年 8 月 27 日收到修改稿)

对端口受控哈密顿系统能量变化和动力学特性进行了分析, 采用了分段线性输出反馈对其进行混沌反控制, 给出了构造分段线性输出反馈矩阵的方法. 此方法具有物理概念明确, 不需计算李雅普诺夫指数, 易于实现等特点. 数值计算和仿真研究表明了此方法的有效性.

关键词: 哈密顿系统, 混沌, 反控制

PACC: 0545

## 1. 引 言

近年来, 混沌控制与反控制的理论与应用研究引起人们的广泛关注. 对于混沌控制问题, 人们提出了一系列控制方法<sup>[1-9]</sup>. 混沌控制的目标也由最初的不动点、低周期轨迹的稳定发展到高周期轨道、准周期轨道的稳定. 控制的对象也由最初的低维系统发展到高维系统, 乃至无穷维系统(时空混沌)<sup>[10]</sup>. 对于混沌反控制问题, 人们也提出了一些反控制方法<sup>[11-13]</sup>, 混沌反控制的目标, 也由增加一个现有混沌系统的混沌行为发展到使一个非混沌系统混沌化. 混沌反控制的对象也由离散时间系统发展到连续时间系统, 但是上述研究都是针对耗散系统的. 对于保守系统或哈密顿(Hamilton)系统的混沌控制与反控制研究很少.

目前, 在物理学方面, 哈密顿系统研究已经扩大到流体的混合、扩散波轨迹的光方程以及等离子体中的磁力线等问题. 在天体方面, 对哈密顿系统的分析直接对应着行星运行的稳定性. 在量子混沌方面, 哈密顿系统的研究则是量子混沌研究的基础. 在实际应用方面, 哈密顿系统也因其良好的可控性和可实现性而得到广泛的应用. 例如, 在混沌保密通信系统中, 系统的保密性、可靠性和可实现性是研究的三大主题. 而对于可实现性来说, 如何产生混沌信号是关键问题, 即需要解决混沌源的设计问题. 通常, 设

计混沌源的思路是首先设计混沌源的动力学方程, 然后用电路实现这些方程. 但是某些混沌源的动力学方程采用一般电路很难实现, 甚至某些混沌系统本身就是物理不可实现的. 然而, 研究表明所有的端口受控的哈密顿系统都可以由独立元件组成的 LC 电路来实现<sup>[14]</sup>. 这说明由端口受控的哈密顿系统构成的混沌源都可以用电路实现其动力学方程, 从而解决了混沌源的实现问题.

本文通过分析端口受控哈密顿系统能量变化和动力学特性, 采用了分段线性输出反馈对端口受控哈密顿系统进行混沌反控制, 产生了物理可实现的混沌信号源.

## 2. 混沌反控制的原理

端口受控的哈密顿系统可表示为<sup>[15]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x} &= J(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u, \quad x \in X, \quad u \in R^m, \\ y &= g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x), \quad y \in R^m, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $J(x)$  为  $n \times n$  反对称矩阵, 且满足矩阵中每一个元素是  $x$  的光滑函数,

$$J(x) = -J^T(x). \quad (2)$$

而  $x = [x_1, \dots, x_n]$  是  $n$  维状态空间流形  $X$  的局部坐标.  $H(x(t))$  是系统的能量存储函数, 它可以由下式计算:

\* 国家自然科学基金(批准号 69872012)资助的课题.

$$H(x(t_1)) = H(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)y(t)dt, \quad \forall t_0, t_1, \forall u(\cdot). \quad (3)$$

如果  $H \geq 0$ , 表明 (1) 式为保守系统. 当 (1) 式中的  $\mathcal{J}(x)$  满足条件 (2) 式时, 称 (1) 式为结构矩阵为  $\mathcal{J}(x)$  的端口受控哈密顿系统 (PCH).

在非线性系统中, PCH 系统的概念比一般的保守系统的概念要强. 因为并不是所有非线性保守系统都能够满足 (2) 式.

端口受控的哈密顿系统的一个基本特性是能量平衡特性,

$$\frac{dH}{dt}(x(t)) = u^T(t)y(t). \quad (4)$$

物理上, 它对应于内部互连结构是能量守恒这一事实,  $u^T(t), y(t)$  为通过  $g(x)$  定义端口能量,  $u^T(t)y(t)$  即为外部供给的能量,  $\frac{dH}{dt}(x(t))$  是系统能量存储函数的变化量. 当  $u(t) = 0$  时 (1) 式变为自治哈密顿系统

$$\dot{x} = \mathcal{J}(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x), \quad (5)$$

此系统的能量存储函数的变化量为零. 因此 (5) 式的解在相空间中保持标准容积.

Liouville 定理指出, 保守系统在相空间运动的过程中, 始终保持相空间容积不变. 但对于一个耗散系统, 其相容积一般要逐渐收缩. 若一个耗散系统产生混沌运动, 它一定存在着相反的两个过程, 一方面耗散作用要使轨道收缩, 系统的存储能量逐渐减小; 另一方面, 扩散作用又使轨道相互分离, 向外发散, 系统的存储能量逐渐增加. 由于收缩是对整体相空间起作用, 而发散是对局部相空间起作用, 就使得所有轨道最后集中在相空间的有限范围内, 靠拢又分开, 分开又折叠而靠拢, 无数次的来回折叠, 形成复杂的混沌运动.

由于端口受控的哈密顿系统可以通过端口能量来控制整个系统能量, 在某一局部相空间内, 通过端口向系统注入能量, 使系统轨道向外扩散, 而在其他的相空间内, 通过端口消耗系统的能量, 将系统的轨道限制在有界区域内. 这两个条件共同作用, 就可能使受控的哈密顿系统在有界区域内产生复杂的混沌运动.

根据上述原理, 可采用非线性输出反馈, 实现三阶端口受控哈密顿系统的混沌反控制. 其框图如图 1 所示.

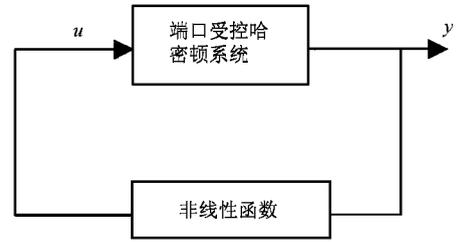


图 1 混沌反控制示意图

通常取非线性函数为分段线性函数, 闭环系统应满足以下条件, 闭环系统就可能产生混沌运动.

1) 分段线性函数将整个系统的状态空间分为若干个子空间, 每个子空间具有惟一平衡点. 所有平衡点都是鞍点, 且在两个鞍点的稳定流形和不稳定流形之间无限缠结在一起, 形成系统轨道的伸长和折叠.

2) 在整个相空间上, 通过输出反馈的作用, 形成扩散和收缩两个子相空间. 在扩散子相空间中, 输出反馈为正反馈, 能量存储函数的变化量  $\frac{dH}{dt}(x(t))$  大于零, 系统能量增加, 系统轨道向外扩散. 在收缩子相空间中, 输出反馈为负反馈, 能量存储函数的变化量  $\frac{dH}{dt}(x(t))$  小于零, 系统能量减少, 系统轨道向内收缩.

### 3. 数值研究

考虑如下三阶端口受控的哈密顿系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \mathcal{J}(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} + g(x)u$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H(x)}{\partial x_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = g^T(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H(x)}{\partial x_3} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中  $J = -J^T$  是反对称阵,  $H(x) = \frac{x_1^2}{2c_1} + \frac{x_2^2}{2c_2} + \frac{x_3^2}{2c_3}$ .

对于(6)式, 根据上述闭环系统产生混沌运动的条件, 按如下5个步骤设计非线性输出反馈.

1)为了简化设计, 两个输入控制分量分别选择两个独立的反馈函数, 一个是线性函数, 另一个是分段线性连续函数. 即

$$u_1 = f(y_1), u_2 = -Gy_2, \quad (7)$$

其中  $f(\cdot)$  是分段线性连续函数,  $G > 0$ .

2)由于哈密顿系统是三阶的, 选取的分段线性反馈应将整个系统的状态空间分成三个线性子空间. 在三个线性子空间中, 处于中间位置的子空间, 其输出反馈应为正反馈, 从而使系统能量增加, 系统轨道向外扩散. 而另外两个子空间, 其输出反馈应为负反馈, 使系统能量减少, 系统轨道向内收缩. 因此, 选取

$$f(y_1) = \begin{cases} m_1 y_1 + (m_0 - m_1)\mu, & y_1 \geq \mu, \\ m_0 y_1, & |y_1| < \mu, \\ m_1 y_1 - (m_0 - m_1)\mu, & y_1 \leq -\mu, \end{cases} \quad (8)$$

其中  $\mu$  为正常数,  $m_0, m_1$  为实数.

分段线性函数将闭环系统分成三个线性子空间, 即

$$\begin{aligned} D_\mu &= \{ (x_1, x_2, x_3) \mid y_1 \geq \mu \}, \\ D_0 &= \{ (x_1, x_2, x_3) \mid |y_1| < \mu \}, \\ D_{-\mu} &= \{ (x_1, x_2, x_3) \mid y_1 \leq -\mu \}. \end{aligned}$$

在三个状态子空间由分别具有惟一平衡点, 即

$$\begin{aligned} P^+ &= (k_1, 0, k_2) \in D_\mu, \\ Q &= (0, 0, 0) \in D_0, \\ P^- &= (-k_1, 0, -k_2) \in D_{-\mu}, \end{aligned}$$

其中

$$k_1 = \frac{c_1(m_1 - m_0)\mu}{m_1 - G}, k_2 = -c_3 G \frac{(m_1 - m_0)\mu}{m_1 - G}. \quad (9)$$

3)通过选取非线性输出反馈的参数, 让三个线性子空间的平衡点都为鞍点.

对于平衡点  $P^+$  和  $P^-$ , 其雅可比矩阵为

$$J_P = \begin{bmatrix} \frac{-G + m_1}{c_1} & \frac{G}{c_2} & 0 \\ \frac{G}{c_1} & \frac{-G}{c_2} & \frac{1}{c_3} \\ 0 & -\frac{1}{c_2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

雅可比矩阵的特征方程为

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \left( \lambda - \frac{m_1 - G}{c_1} \right) \left( \lambda + \frac{G}{c_2} \right) \lambda \\ &+ \left( \lambda - \frac{m_1 - G}{c_1} \right) \frac{1}{c_2 c_3} - \lambda \frac{G^2}{c_1 c_2} \\ &= \lambda^3 + \left( \frac{G}{c_2} - \frac{m_1 - G}{c_1} \right) \lambda^2 \\ &+ \left( \frac{1}{c_2 c_3} - \frac{m_1 G}{c_1 c_2} \right) \lambda - \frac{m_1 - G}{c_1 c_2 c_3}. \end{aligned} \quad (11)$$

为了使平衡点  $P^+$  和  $P^-$  为鞍点, 雅可比矩阵的特征值应为一个负实数  $\lambda_p$  和一对实部为正的共轭复数  $\sigma_p \pm jw_p$ , 其理想特征方程为

$$\begin{aligned} \alpha^*(\lambda) &= (\lambda - \lambda_p) (\lambda - \sigma_p - jw_p) (\lambda - \sigma_p + jw_p) \\ &= \lambda^3 - (2\sigma_p + \lambda_p)\lambda^2 + (\sigma_p^2 + w_p^2 \\ &+ 2\sigma_p\lambda_p)\lambda - \lambda_p(\sigma_p^2 + w_p^2). \end{aligned} \quad (12)$$

让  $\alpha(\lambda) = \alpha^*(\lambda)$ , 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{G}{c_2} - \frac{m_1 - G}{c_1} &= -(2\sigma_p + \lambda_p), \\ \frac{1}{c_2 c_3} - \frac{m_1 G}{c_1 c_2} &= \sigma_p^2 + w_p^2 + 2\sigma_p\lambda_p, \\ \frac{m_1 - G}{c_1 c_2 c_3} &= \lambda_p(\sigma_p^2 + w_p^2). \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $c_1, c_2, c_3$  是给定的正实数, 由(13)式可以求出相应的  $G$  和  $m_1$ .

同理, 对于平衡点  $Q$ , 其雅可比矩阵为

$$J_Q = \begin{bmatrix} \frac{-G + m_0}{c_1} & \frac{G}{c_2} & 0 \\ \frac{G}{c_1} & \frac{-G}{c_2} & \frac{1}{c_3} \\ 0 & -\frac{1}{c_2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

为了使平衡点  $Q$  为鞍点, 令在平衡点  $Q$  处的特征值为一个正实数  $\lambda_Q$  和一对实部为负的共轭复数  $\sigma_Q \pm jw_Q$ , 同样可以得到

$$\begin{aligned} \frac{G}{c_2} - \frac{m_0 - G}{c_1} &= -(2\sigma_Q + \lambda_Q), \\ \frac{1}{c_2 c_3} - \frac{m_0 G}{c_1 c_2} &= \sigma_Q^2 + w_Q^2 + 2\sigma_Q\lambda_Q, \\ \frac{m_0 - G}{c_1 c_2 c_3} &= \lambda_Q(\sigma_Q^2 + w_Q^2). \end{aligned} \quad (15)$$

由(15)式可以求出相应的  $m_0$ .

4)在整个相空间上, 求出扩散和收缩两个子相空间的区域, 进一步校正非线性输出反馈的参数. 在  $D_0$  子空间, 根据(4)式可得

$$\frac{dH(x(t))}{dt} = u^T(t)y(t)$$

$$\begin{aligned}
 &= F^T(y)y(t) \\
 &= [m_0 y_1, -Gy_2] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
 &= m_0 y_1^2 - Gy_2^2. \tag{16}
 \end{aligned}$$

同理 在  $D_\mu$  子空间

$$\begin{aligned}
 \frac{dH}{dt}(x(t)) &= [m_1 y_1 + (m_0 - m_1)\mu, -Gy_2] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
 &= m_1 y_1^2 + (m_0 - m_1)\mu y_1 - Gy_2^2. \tag{17}
 \end{aligned}$$

在  $D_{-\mu}$  子空间

$$\begin{aligned}
 \frac{dH}{dt}(x(t)) &= [m_1 y_1 - (m_0 - m_1)\mu, -Gy_2] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
 &= m_1 y_1^2 - (m_0 - m_1)\mu y_1 - Gy_2^2. \tag{18}
 \end{aligned}$$

根据(6)式,  $y_1 = x_1/c_1, y_2 = x_1/c_1 - x_2/c_2$ . 选

$c_1 = 1/9, c_2 = 1, c_3 = 1/7, \mu = 9, \lambda_p = -2.7595, \sigma_p = 0.1297, \omega_p = 2.1329, \lambda_q = 1.5522, \sigma_q = -0.6761, \omega_q = 1.8978$ . 根据(13)式和(15)式计算得到  $m_0 = 0.8, m_1 = 0.5, G = 0.7$ . 依据这组数据和(16)–(18)式, 绘制了在  $x_1-x_2$  相平面上, 发散子相空间

$(\frac{dH}{dt}(x(t)) > 0)$  和收缩子相空间  $(\frac{dH}{dt}(x(t)) < 0)$  的区域, 如图 2 所示.

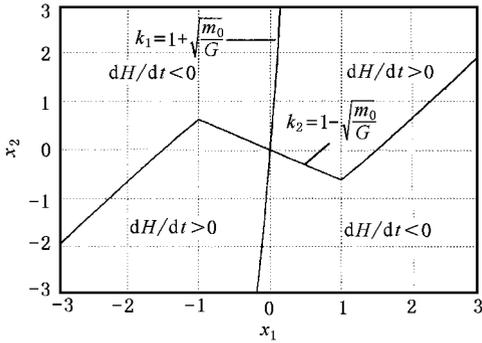


图 2 相平面  $\frac{dH}{dt}$  分布区域图

从图 2 看出, 发散子相空间主要位于第一和第三象限, 且随着  $m_0$  的增大或  $G$  的减小而增大. 收缩子相空间位于第二和第四象限, 且随着  $m_0$  的减小或  $G$  的增大而增大.

5) 通过模拟仿真等方法, 验证设计结果.

图 3 给出了系统  $\frac{dH}{dt}(x(t))$  随时间  $t$  变化情况.

从图 3 看出,  $\frac{dH}{dt}(x(t))$  随时间  $t$  呈振荡变化, 正负幅度基本相等, 说明了系统吸收能量和消耗能量基

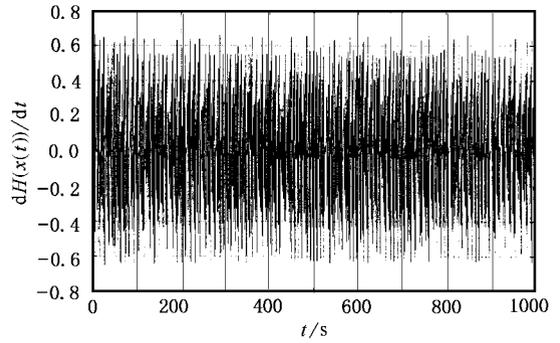


图 3 系统  $\frac{dH}{dt}(x(t))$  随时间  $t$  的变化

本相等, 因此, 系统的轨迹保持在一定的范围.

图 4 给出系统能量  $H(x(t))$  随时间  $t$  变化的情况, 从图 4 看出, 系统能量始终大于零, 但小于某一最大值, 在零与最大值之间振荡, 这导致系统的轨迹维持在一定的范围, 呈现不规则的运动.

图 5 给出了系统状态  $x_1$  和  $x_2$  的相平面轨迹图. 整个相轨迹呈现双旋涡混沌吸引子<sup>[16,17]</sup>, 说明此系统处于混沌状态.

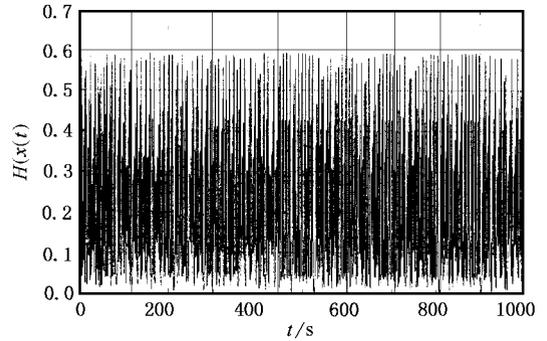


图 4 系统能量  $H(x(t))$  随时间  $t$  的变化

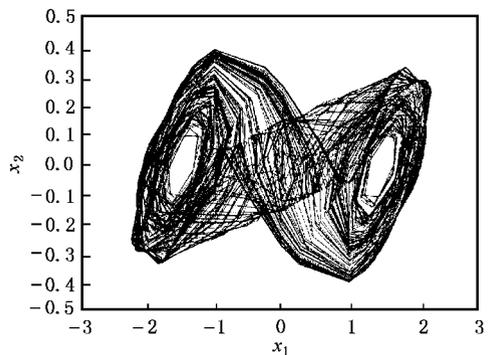


图 5 状态  $x_1$  和  $x_2$  的相平面轨迹图

## 4. 结 论

本文采用了分段线性输出反馈对端口受控哈密顿系统进行混沌反控制. 将系统能量变化和系统动力学特性相结合, 给出了闭环系统产生混沌运动应

满足的条件和构造分段线性输出反馈矩阵的方法, 产生了物理可实现的混沌信号源, 解决了混沌源的实现问题. 此方法物理概念明确, 不需计算李雅普诺夫指数, 易于实现, 将在混沌保密通信系统及其他系统中获得广泛的应用.

- [ 1 ] Ott E , Grebogi C and Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [ 2 ] Konishi K *et al* 1999 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **46** 1285
- [ 3 ] Yao L N , Gao J F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 487 ( in Chinese ) [ 姚利娜、高金峰 2002 物理学报 **51** 487 ]
- [ 4 ] Chen S H *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 749 ( in Chinese ) [ 陈士华等 2002 物理学报 **51** 749 ]
- [ 5 ] Guan X P *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 753 ( in Chinese ) [ 关新平等 2002 物理学报 **51** 753 ]
- [ 6 ] Ren H P , Liu D 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 982 ( in Chinese ) [ 任海鹏、刘 丁 2002 物理学报 **51** 982 ]
- [ 7 ] Wu Z Q *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1193 ( in Chinese ) [ 吴忠强等 2002 物理学报 **51** 1193 ]
- [ 8 ] Yin X H *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1949 ( in Chinese ) [ 尹逊和等 2002 物理学报 **51** 1949 ]
- [ 9 ] Liu F C *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1954 ( in Chinese ) [ 刘福才等 2002 物理学报 **51** 1954 ]
- [ 10 ] Hu G *et al* 2002 *Phys. Rev. E* **62** R3043
- [ 11 ] Wang X F and Chen G R 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1435
- [ 12 ] Chen G 2001 Proc of the 2<sup>nd</sup> Int. Sym. On Intelligent and Complex Systems , Wuhan , three Gorges , China , Oct. 17
- [ 13 ] Guan X P *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2216 ( in Chinese ) [ 关新平等 2002 物理学报 **51** 2216 ]
- [ 14 ] Maschke B M *et al* 1995 *IEEE Trans. On Circ. Syst.* **CAS - 42** 73
- [ 15 ] Arjan Van der Schaft. L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control. 2002 Springer-Verlag London Limited.
- [ 16 ] Luo X S *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 988 ( in Chinese ) [ 罗晓曙等 2002 物理学报 **51** 988 ]
- [ 17 ] Lin C X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1198 ( in Chinese ) [ 刘崇新 2002 物理学报 **51** 1198 ]

## Chaotic anti-control of a port control Hamilton system<sup>\*</sup>

Tao Jian-Wu<sup>1)</sup> Shi Yao-Wu<sup>2)</sup> Chang Wen-Xiu<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> *University of Aeronautics , Changchun 130022 , China*

<sup>2)</sup> *Communication Academy , Jilin University , Changchun 130025 , China*

( Received 26 May 2003 ; revised manuscript received 27 August 2003 )

### Abstract

Based on the analysis of energy change and dynamical force characteristics for port control Hamilton ( PCH ) system , a method of chaotic anti-control is studied via nonlinear output feedback . The proposed method has a clear physical conception and need not estimate the Lyapunov exponent of the chaotic system . This makes the method simpler in practical applications . Numerical studies and computer simulation show the capabilities of this method .

**Keywords :** Hamilton system , chaos , anti-control

**PACC :** 0545