第 53 卷 第 6 期 2004 年 6 月
1000-3290/2004/53(06)/1940-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.6, June, 2004


# 位错动力学与系统的全局分叉

罗诗裕[1)]　邵明珠[1)]　韦洛霞[1)]　刘曾荣[2)]

[1)] (东莞理工学院，东莞　523106)

[2)] (上海大学数学系，上海　200436)

(2003 年 6 月 17 日收到；2003 年 7 月 21 日收到修改稿)

在位错动力学的 Seeger 方程基础上，引入周期场作用，把位错运动方程化为具有硬弹簧特性的 Duffing 方程，并利用多尺度法分析了系统的动力学特征，利用 Melnikov 方法讨论了系统的全局分叉和系统进入混沌状态的可能途径. 结果表明，当 $\delta/\alpha$ 一定，$\Omega$ 不断减小时，系统逐渐向临界状态接近，然后经过无限次级联分叉进入混沌状态.

**关键词**：位错，分叉，超晶格，非线性

**PACC**：6180M，0547，7550R

## 1. 引　　言

随着人类认识能力的不断提高，人们已经完成或正在完成从线性认识到非线性认识的超越. 凝聚态物理中的非线性问题就是一类十分普遍而重要的问题，比如热膨胀、热导率、晶格动力学、非线性光学和半导体光磁电效应等都表现出了明显的非线性特征. 非线性系统的一个重要特征就是它的振幅和相位都是时间相关的函数. 一般情况下，非线性方程不存在严格解，而近似解大都利用摄动法. 摄动法有效的基本条件是小参数. 而对于大参数，系统则表现出了另外一系列新的特征. 其中一个就是在参数变化的某个范围内，系统将出现级联分叉，而后进入混沌状态，表现出了特有的内在随机性. 这种随机行为的特点是系统存在一个奇怪吸引子. 弱钉扎的电荷密度波系统和在外场作用下的位错动力学系统都表现出了这种混沌行为.

随着加速器技术的发展，人们对带电粒子与物质相互作用进行了广泛而深入的研究. 带电粒子的沟道效应和沟道辐射便是人们发现的重要现象之一. 由此发展起来的沟道技术在固体物理和原子核物理中得到了广泛应用，而且还成功地用它来研究了形(应)变超晶格. 所谓超晶格就是将两种晶格常数不同(或相近)的材料交替生长，形成的多层薄膜结构. 由于超晶格的材料、组分和层厚等均可以人为(甚至在原子和分子尺度上)控制，可望得到均匀半导体材料所不具有的光电特征. 值得注意的是，正是由于超晶格的特殊几何结构，引起了人们对它的兴趣. 比如选择 GaP 作基片，沿[100]方向生长等厚的 GaP 和 $GaAs_xP_{1-x}$ 薄层，由于在生长方向上晶格失配，沿生长方向的各层将交替产生伸长和压缩形变，导致(110)平面沟道偏折，使直沟道变成了锯齿状的"折沟道". 这种沟道的特点是在界面处沟道平面连续，一阶导数不存在. 当然，这只是一种理想情况. 实际上，超晶格的沟道偏折是由于界面处晶格失配产生应力，应力集中产生位错，位错运动、钉扎导致晶格形变. 正是由于位错存在，超晶格在界面处的沟道不再是折沟道，而是弯沟道. 其特点是界面处沟道平面连续，一阶导数存在.

本文在 Seeger 方程基础上，引入阻尼项和周期场(比如声场)作用，对超晶格界面的位错运动作一非线性描述. 事实上，引入阻尼项和受迫项后，位错运动方程是一个具有硬弹簧特性的 Duffing 方程，利用摄动法讨论了系统的动力学特征，并利用 Melnikov 方法分析了系统的非线性动力学行为，导出了系统走向混沌的临界值，分析了系统的全局分叉和系统进入混沌的可能途径. 在 $\delta/\alpha$-$\Omega$ 图上，讨论了系统的混沌区和非混沌区. 结果表明，当 $\delta/\alpha$ 一定，$\Omega$ 不断减小时，系统逐渐向临界状态接近，然后经过无限次级联分叉进入混沌状态；或者，当无量纲的外场频率 $\Omega$ 固定，无量纲的系统参数 $\delta/\alpha$ 逐渐增加时，系统也将经过无限次奇阶次谐分叉进入混沌，直至断裂.

作为可能应用，我们讨论超晶格的沟道偏折. 由于超晶格的多层薄膜结构，粒子沟道不再是直沟道，

而是折沟道.我们曾经用位错静力学方法,讨论了沟道偏折的机理.本文试图从位错动力学出发,进一步讨论超晶格界面附近位错的运动行为.也许正是由于位错的钉扎和堆积导致了沟道弯曲,但是,也可能由于位错运动的混沌行为导致界面附近应力集中使沟道畸形,甚至分层或‘断裂”.这就为超晶格的制备提出了更高要求,同时也为进一步改善材料性能提供可能途径.

## 2. 非线性运动方程

假定考察的位错是一段直的刃型位错,并假定位错线与 $x$ 轴平行(即平行于超晶格相邻两个平面的交线),且一端被杂质钉扎.通常,位错沿 $x$ 方向的位移 $\xi$ 是位置 $x$ 和时间 $t$ 的函数.1956 年,Seeger 在研究金属内耗时首次描述了这样的系统[1],并导出 $\xi(x,t)$ 满足偏微分方程

$$E(\xi)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{\partial E(\xi)}{\partial\xi}-b\sigma(t)+m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},\tag{1}$$

其中 $b$ 是 Burger 矢量长度,$m$ 是单位长度上位错的有效质量( $m\propto\rho b^2$,$\rho$ 是位错密度),$\sigma(t)$是位错在单位长度上受到的力.$E(\xi)$是单位长度位错所对应的势能,且是周期为 $d$ 的周期函数.将 $E(\xi)$按 Fourier 展开,并截断为如下形式:

$$E(\xi)=E_0-\alpha_1\cos\frac{2\pi\xi}{d}-\alpha_2\cos\frac{4\pi\xi}{d},\tag{2}$$

其中 $d$ 是晶格常数,$\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 是小量(同 $E_0$ 相比).由(2)式可得

$$\frac{\partial E}{\partial\xi}=\frac{2\pi\alpha_1}{d}\left(\sin\frac{2\pi\xi}{d}+2\alpha_3\sin\frac{4\pi\xi}{d}\right)=F(\xi),\tag{3}$$

其中 $\alpha_3=\alpha_2/\alpha_1$.

注意到 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 是小量,于是,方程(1)左端的 $E(\xi)$可用 $E_0$ 代替.将(3)式代入方程(1),可得

$$E_0\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{2\pi\alpha_1}{d}\left(\sin\frac{2\pi\xi}{d}+2\alpha_3\sin\frac{4\pi\xi}{d}\right)-b\sigma(t)+m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.\tag{4}$$

分两种情形讨论.

### 2.1. 与时间无关的情形

假设系统处于稳定状态(比如系统经过比较长的时间后),则系统状态与时间无关,$\xi(x,t)$退化为 $\xi(x)$,$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0$,$\sigma(t)$为常数 $\sigma_0$,则偏微分方程(4)化为如下形式的常微分方程

$$E_0\frac{d^2\xi}{dx^2}=\frac{2\pi\alpha_1}{d}\left(\sin\frac{2\pi\xi}{d}+2\alpha_3\sin\frac{4\pi\xi}{d}\right)-b\sigma_0.\tag{5}$$

### 2.2. 与空间无关的情形

假设在滑移方向位错运动是均匀的,则系统的状态与 $x$ 无关.于是方程(4)化为

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+F(\xi)=b\sigma(1),\tag{6}$$

其中 $F(\xi)$由(3)式给出.方程(6)是无阻尼的位错动力学方程.引入阻尼项,方程(6)化为

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\gamma\frac{d\xi}{dt}+F(\xi)=b\sigma(t),\tag{7}$$

其中 $\gamma$ 是单位长度位错上的衰减系数.方程(7)就是本文关注的位错动力学方程.

将 $F(\xi)$按 Talore 级数展开,并取前两项,可得

$$F(\xi)=A\xi-B\xi^3,\tag{8}$$

其中

$$A=\left(\frac{2\pi}{d}\right)^2\alpha_1(1+4\alpha_3),$$

$$B=\frac{1}{6}\left(\frac{2\pi}{d}\right)^4\alpha_1(1+16\alpha_3).\tag{9}$$

假定时间相关的周期场均匀地作用在所考察的位错上(比如将它放置在周期变化的声场中),并注意到(8)式,方程(7)可进一步化为

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}+\gamma\frac{d\xi}{dt}+A\xi-B\xi^3=\sigma_0 b\cos\omega t,\tag{10}$$

其中 $\sigma_0$ 是外场振幅.

令

$$\alpha=\gamma/m\omega_0,\ \omega_0=A/m,\tag{11}$$

$$\psi=\xi/\xi_0,\ \xi_0=(A/2b)^{1/2},$$

$$\tau=\omega_0 t,\ \delta=\xi_0\sigma_0 b/8V_0,\tag{12}$$

$$V_0=A^2/4B,\ \Omega=\omega/\omega_0,$$

则方程(10)化为无量纲形式

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2}+\alpha\frac{d\psi}{d\tau}+\psi-\psi^3=\delta\cos\Omega\tau.\tag{13}$$

系统(10)是一个具有硬弹簧特性的 Duffing 方程.这是一个典型的动力学系统,文献[2,3]用摄动法对它进行过研究.下面,首先讨论在弱非线性情况下系统的动力学行为,而后再讨论大参数情况下系统的动力学特征,并利用 Melnikov 方法讨论系统的全局分叉和系统进入混沌状态的可能途径.

## 3. 系统的主共振和次共振

假设方程(10)中阻尼项和非线性项是一个小量，则形式上可将它改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\tau^2}+\psi+2\varepsilon\mu\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tau}-\varepsilon\psi^3=\delta\cos\Omega\tau, \tag{14}$$

其中 $2\mu=\alpha$，而 $\varepsilon$ 是小参数，也是形式参数. 当它是形式参数时，只需在结果中令它为 1 即可. 当它是小参数时，在方程中它仅代表该项是 $O(\varepsilon)$ 量级. 我们利用多尺度法讨论系统(14)的动力学行为. 引入快尺度 $T_0=\tau$ 和慢尺度 $T_1=\varepsilon\tau$，并注意到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}&=D_0+\varepsilon D_1+\cdots\\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}&=(D_0+\varepsilon D_1+\cdots)^2\\ &=D_0^2+2\varepsilon D_0D_1+\cdots\end{aligned} \tag{15}$$

其中微分算子 $D_n=\frac{\partial}{\partial T_n}$. 于是，方程(14)可以表示为

$$\begin{aligned}&D_0^2\psi+2\varepsilon D_0D_1\psi+2\varepsilon\mu D_0\psi+\cdots+\psi-\varepsilon\psi^3\\ &=\delta\cos\Omega T_0.\end{aligned} \tag{16}$$

问题归结为寻找如下形式的近似解

$$\psi=\psi_0(T_0,T_1)+\varepsilon\psi_1(T_0,T_1)+\cdots \tag{17}$$

将(17)式代入方程(16)，并令 $\varepsilon$ 的同次幂系数相等，可得

$$\begin{aligned}&D_0^2\psi_0+\psi_0=\delta\cos\Omega T_0,\\ &D_0^2\psi_1+\psi_1=-2D_0D_1\psi_0-2\mu D_0\psi_0-\psi_0^3.\end{aligned} \tag{18}$$

(18)式中第一个方程的通解可表示为

$$\psi_0=A_1(T_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}T_0}+\Lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega T_0}+\mathrm{c.c.} \tag{19}$$

其中 c.c. 表示共轭项，而

$$A_1=\frac{1}{2}\alpha_4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta},\ \Lambda=\frac{\delta}{2(1-\Omega^2)}, \tag{20}$$

$\alpha_4$ 和 $\beta$ 是与时间有关的非线性振动的振幅和相位. 从(18)和(19)式可以看出，当 $\Omega\approx1$ 时，系统出现共振. 因为它在零级近似就出现，这种共振称为主共振. 将(19)式代入(18)式的第二方程，可得

$$\begin{aligned}&D_0^2\psi_1+\psi_1\\ &=-[2\mathrm{i}(A'_1+\mu A_1)+3(A_1\bar{A}_1+2\Lambda^2)A_1]\mathrm{e}^{\mathrm{i}T_0}\\ &\quad+(6A_1\bar{A}_1+3\Lambda^2-2\mathrm{i}\mu\Omega)\Lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega T_0}+A_1^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}T_0}\\ &\quad+\Lambda^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\Omega T_0}+3A_1^2\Lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2+\Omega)T_0}+3\bar{A}_1^{\,2}\Lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Omega-2)T_0}\\ &\quad+3A_1\Lambda^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1+2\Omega)T_0}+3A_1\Lambda^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-2\Omega)T_0}+\mathrm{c.c.}\end{aligned} \tag{21}$$

如果我们关心的不是方程的解，而是它的一般动力学特征，则从上式就可以直接看出位错运动时将穿过哪些共振线. 事实上，从方程(21)可以看出，当 $\Omega\approx0,1/3,3$ 时，系统出现共振. 因为这三条共振线是在一次近似中出现的，这类共振又称为次共振. 在二阶或二阶以上的近似中将出现更多的共振线. 从上式还可以看出，$\Omega=1$ 的这条共振线除了线性激励外，非线性也可以激励. 这就是说，当位错运动时，将穿越 $\Omega=0,1/3,1,3$ 四条共振线. 其中 $\Omega=1$ 的这条共振线是必须避免的，而 $\Omega=0,3,1/3$ 则是应当尽量避免的. 适当选择工作点，这些共振线是可以避免的. 即使不能避免，只要保证位错运动能够比较快地穿过共振线(不包括 $\Omega=1$ 这条共振线)，则材料仍然是安全的.

## 4. 系统的级联分叉与混沌临界值

分两种情况讨论.

### 4.1. 自治系统

根据定义，方程(13)的自治系统由

$$\psi''+\psi-\psi^3=0 \tag{22}$$

给出，或者表示为

$$\begin{aligned}\psi'&=\varphi,\\ \varphi'&=-\psi+\psi^3,\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $\varphi'=\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\tau$. 系统(23)有初积分

$$H(\psi,\varphi)=\frac{1}{2}\varphi^2+\frac{1}{2}\psi^2-\frac{\psi^4}{4}=h. \tag{24}$$

当 $h=1/4$ 时，系统存在一对异宿轨道(heteroclinic orbit). 当 $h>1/4$ 时，存在一簇开轨道. 当 $0<h<1/4$ 时，存在一簇围绕原点的周期闭轨道[2,3].

容易算出 $h=1/4$ 时，异宿轨道方程为

$$\begin{aligned}\psi_0(\tau)&=\pm\operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\tau\right),\\ \varphi_0(\tau)&=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\tau\right),\end{aligned} \tag{25}$$

它把相平面分成两个区域. 令 $h^2=\kappa/(1+\kappa^2)$，可求得 $0<h<1/4$ 的闭轨道方程为

$$\begin{aligned}\psi_\kappa(\tau)&=\frac{\sqrt{2}\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}}\operatorname{sn}\left(\frac{\tau}{\sqrt{1+\kappa^2}},\kappa\right),\\ \varphi_\kappa(\tau)&=\frac{\sqrt{2}\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}}\operatorname{cn}\left(\frac{\tau}{\sqrt{1+\kappa^2}},\kappa\right)\operatorname{dn}\left(\frac{\tau}{\sqrt{1+\kappa^2}},\kappa\right)\end{aligned} \tag{26}$$

其中 $\mathrm{sn}(u)$, $\mathrm{cn}(u)$, $\mathrm{dn}(u)$ 为 Jacobian 椭圆函数,闭轨道的周期为

$$T_\kappa = 4\sqrt{1+\kappa^2}K(\kappa), \tag{27}$$

而 $K(\kappa)$ 是第一类完全椭圆积分.

## 4.2. 非自治系统

由(22)式,非自治系统(13)可以表示为

$$\begin{aligned}\psi' &= \varphi,\\ \varphi' &= -\psi + \psi^3 - \alpha\varphi + \delta\cos\Omega\tau.\end{aligned} \tag{28}$$

假设方程(28)中的 $\alpha$ 和 $\delta$ 是正的小量. 则系统的主要特征由自治系统决定.

利用 Melnikov 方法[4,5],构造异宿轨道的 Melnikov 函数

$$\begin{aligned}M(\tau_0) &= \int_{-\infty}^{\infty}[-\alpha\varphi_0(\tau) + \delta\cos\Omega(\tau+\tau_0)]\varphi_0(\tau)\mathrm{d}\tau\\ &= I_1 + I_2.\end{aligned} \tag{29}$$

将(25)式代入(29)式,并利用积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^4x} = -\frac{1}{3}\mathrm{th}^3x + \mathrm{th}x$,可求得

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} - \alpha\varphi_0^2(\tau)\mathrm{d}\tau = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\alpha. \tag{30}$$

再利用三角函数和双曲函数的奇偶性以及积分 $\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{\mathrm{ch}^3\beta x}\mathrm{d}x = (\alpha\pi/2\beta^2)\mathrm{sh}\frac{\alpha\pi}{2\beta}$,可求得

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\delta\cos\Omega(\tau+\tau_0)\varphi_0(\tau)\mathrm{d}\tau\\ &= \pm\sqrt{2}\pi\Omega\delta\cos\Omega\tau_0\,\mathrm{cosech}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\Omega\right).\end{aligned} \tag{31}$$

将(30)和(31)式代入(29)式[6,7],可得

$$M(\tau_0) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\alpha \pm\sqrt{2}\pi\Omega\delta\cos\Omega\tau_0\,\mathrm{cosech}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\Omega\right). \tag{32}$$

令 $M(\tau_0) = 0$,并注意到 $|\cos x|\leqslant 1$,可知当参数 $\delta/\alpha$ 满足条件

$$\delta/\alpha \geqslant \frac{2}{3\pi\Omega}\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\Omega\right) \tag{33}$$

时,系统出现混沌. 当(33)式取等号时,系统处于临界状态. 由此可导出系统的临界值为

$$R_\infty^{(1)}(\Omega) = \frac{2}{3\pi\Omega}\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\Omega\right). \tag{34}$$

利用 Melnikov 方法,再构造周期轨道超次谐波的 Melnikov 函数

$$\begin{aligned}M^{\frac{m}{n}}(\tau_0) &= \int_0^{\frac{2\pi m}{n\Omega}}[-\alpha\varphi_\kappa(\tau) + \delta\cos\Omega(\tau+\tau_0)]\varphi_\kappa(\tau)\mathrm{d}\tau\\ &= I_1 + I_2.\end{aligned} \tag{35}$$

将(26)式代入(35)式,并利用积分

$$\int\mathrm{sn}(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{\kappa^2}[u - E(\alpha mu,\kappa)], \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathrm{cn}(u) &= -\mathrm{sn}(u)\mathrm{dn}(u),\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathrm{dn}u &= -\kappa^2\mathrm{sn}(u)\mathrm{cn}(u)\end{aligned} \tag{37}$$

和

$$\begin{aligned}\int\mathrm{sn}^m(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{m+1}\Big[&\mathrm{sn}^{m+1}(u)\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)\\ &+(m+2)(1+\kappa^2)\int\mathrm{sn}^{m+2}(u)\mathrm{d}u\\ &-(m+3)\kappa^2\int\mathrm{sn}^{m+4}(u)\Big]\mathrm{d}u,\end{aligned} \tag{38}$$

可得

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^{\frac{2\pi m}{\Omega n}}(-\alpha\varphi_\kappa^2(\tau))\mathrm{d}\tau\\ &= -\frac{8\alpha n}{3(1+\kappa^2)^{3/2}}[(\kappa^2-1)K(k)\\ &\quad + (1+\kappa^2)E(k)],\end{aligned} \tag{39}$$

其中 $E(k)$ 是第二类椭圆积分.

利用三角函数和椭圆函数的奇偶性以及

$$\mathrm{sn}(u) = \frac{2}{\kappa K(\kappa)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-1/2}}{1-q^{2n-1}}\sin\left[(2n-1)\frac{\pi n}{2K(k)}\right], \tag{40}$$

其中

$$\begin{aligned}q &= \mathrm{e}^{-\pi\kappa'/\kappa},\\ K' &= K(\kappa'),\\ \kappa' &= (1-k^2)^{1/2},\end{aligned} \tag{41}$$

可得

$$\begin{aligned}I^2 &= \int_0^{\frac{2\pi m}{\Omega n}}\delta\cos(\tau+\tau_0)\varphi_\kappa(\tau)\mathrm{d}\tau\\ &= \delta J_2(m,n)\cos\Omega\tau_0,\end{aligned} \tag{42}$$

而

$$J_2(m,n) = \begin{cases}0, n\neq 1 \text{ 或 } m \text{ 为偶数},\\ 2\sqrt{2}\pi\Omega\,\mathrm{cosech}\frac{\pi mK'}{2K}, n = 1 \text{ 且 } m \text{ 为奇数}.\end{cases} \tag{43}$$

将(39)和(42)式代入(35)式,可得

$$M^{\frac{m}{n}}(\tau_0) = -\alpha J_1(m,n) + \delta J_2(m,n)\cos\Omega\tau_0, \tag{44}$$

其中

$$J_1(m,n) = I_1/\alpha. \tag{45}$$

令 $M^{\frac{m}{n}}(\tau_0)=0$,可导出 $n=1$,$m$ 为奇数,且参数 $\delta/\alpha$ 满足条件

$$\frac{J_1(m,1)}{J_2(m,1)} \leqslant \delta/\alpha \tag{46}$$

时,系统出现 $m$ 次谐波轨道.(46)式取等号,可求得 $m$ 次谐波出现的临界值为

$$R_m^{(1)}(\Omega) = \frac{2\sqrt{2}[(n^2-1)K(\kappa)+(\kappa^2+1)E(\kappa)]}{3\pi\Omega(1+\kappa^2)^{3/2}} \times \mathrm{sh}\frac{\pi m K'(\kappa)}{2K(\kappa)}. \tag{47}$$

## 5. 系统通向混沌的可能途径

注意到 $4\sqrt{1+\kappa^2}K(\kappa)=\frac{2\pi m}{\Omega}$,$m$ 次谐波的临界值(39)可化为[8—10]

$$R_m^{(1)}(\Omega) = \frac{2\sqrt{2}[(\kappa^2-1)K(\kappa)+(\kappa^2+1)E(\kappa)]}{3\pi\Omega(1+\kappa^2)^{3/2}} \times \mathrm{sh}[\Omega\sqrt{1+\kappa^2}K'(\kappa)]. \tag{48}$$

对于任一固定的 $\Omega$,当 $m\to\infty$,即 $\kappa\to1$ 时,可求得 $R_m^{(1)}(\Omega)$的极限值为

$$\lim_{m\to\infty} R_m^{(1)}(\Omega) = \frac{2}{3\pi\Omega}\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\Omega\right) = R_\infty^{(1)}(\Omega). \tag{49}$$

可见,对于任一固定的 $\Omega$,当 $m$ 充分大时,恒有不等式

$$R_m^{(1)}(\Omega) < R_\infty^{(1)}(\Omega) \tag{50}$$

成立.于是我们可以断定,当 $\Omega$ 不变,参数 $\delta/\alpha$ 逐渐增加时,系统将经过无限次级联分叉进入混沌状态[11,12].从(35)和(37)式还可以进一步看出,当参数 $\delta/\alpha$ 逐渐增加时,系统是经过无限次奇阶次谐分叉进入混沌状态的.

## 6. 系统的混沌区和非混沌区

我们考查系统的临界状态.由(33)和(34)式可以看出,对于临界状态,系统参数 $\delta/\alpha$ 满足条件

$$\delta/\alpha = \frac{2}{3\pi\Omega}\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\Omega\right), \tag{51}$$

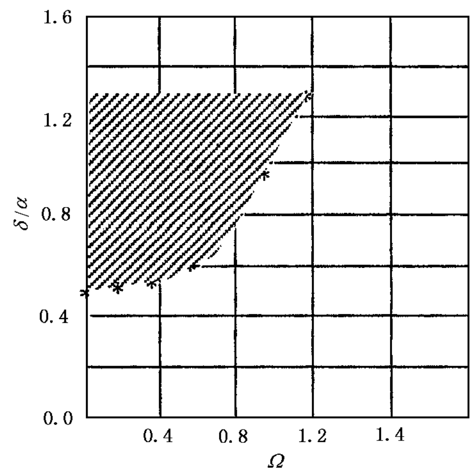


图 1 参数 $\delta/\alpha$ 与无量纲频率 $\Omega$ 之间的关系(阴影表示混沌区)

图 1 给出了 $\delta/\alpha$-$\Omega$ 的关系,阴影区域恒满足条件

$$\delta/\alpha > \frac{2}{3\pi\Omega}\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\Omega\right), \tag{52}$$

该系统处于混沌状态.当 $\delta/\alpha$ 一定,$\Omega$ 不断减小时,系统逐渐向临界状态接近,然后经过无限次级联分叉进入混沌状态.或者,对于 $\Omega$ 一定,参数 $\delta/\alpha$ 不断增加时,系统也逐渐接近临界状态,再经过无限次级联分叉进入混沌, 直至断裂.

我们曾经用位错静力学方法,讨论了沟道偏折问题[9].本文进一步从位错动力学出发,讨论超晶格界面附近位错的运动行为.结果表明,在超晶格界面处,由于位错运动、钉扎和堆积导致沟道形变,同时也可能由于位错的混沌行为使超晶格出现分层或“断裂”,这就对超晶格材料的制备提出了更高的要求,也同时为进一步改善材料性能提供可能途径.

[1] Seeger A 1956 *Philos Mag*. **1** 651
[2] Luo S Y 1984 *Chin*. *Phys*.(USA) **4** 670
[3] Luo S Y,Ma R K and Shao M Z 2002 *Nucl*. *Phys*. *Rev*. **19** 407 (in Chinese)[罗诗裕、马如康、邵明珠 2002 原子核物理评论 **19** 407]
[4] Luo S Y and Shao M Z 1988 *Acta Phys*. *Sin* **37** 1278(in Chinese) [罗诗裕、邵明珠 1988 物理学报 **37** 1278]
[5] Korol A,Solovyov A V and Greiner W 1998 *J*. *Phys* G **24** L45
[6] Korol A,Solovyov A V and Greiner W 1999 *Int*. *J*. *Mod*. *Phys*. E **8** 49
[7] Gradshteyn I S and Ryzhik I M 1980 *Table of Integrals*,*Series and Products*(New York :Academic Press)p948
[8] Shao M Z 1992 *Acta Phys*. *Sin* **41** 1825(in Chinese)[邵明珠 1992 物理学报 **41** 1825]

[9] Luo S Z and Shao M Z 2003 *Chin. J. Semiconductors* **24** 485（in Chinese）[罗诗裕 邵明珠 2003 半导体学报 **24** 485]

[10] Luo S Y，Shao M Z，Tang J N and Liu Z R 1988 *Acta Phys. Sin.* **37** 1394（in Chinese）[罗诗裕、邵明珠、唐建宁、刘曾荣 1988 物理学报 **37** 1394]

[11] Shao M Z，Luo S Y and Hofmann I 1990 *Acta Phys. Sin.* **39** 1189（in Chinese）[邵明珠、罗诗裕、Hofmann I 1990 物理学报 **39** 1189]

[12] Luo S Y *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1157（in CHinese）[罗诗裕等 2004 物理学报 **53** 1157]

# Dynamics of dislocation and global bifurcation for a system

Luo Shi-Yu[1) ]  Shao Ming-Zhu[1)]  Wei Luo-Xia[1)]  Liu Zeng-Rong[2)]

[1)]（*Dongguan University of Technology*，*Dongguan* 523106，*China*）

[2)]（*Department of Mathematics*，*Shanghai University*，*Shanghai* 200436，*China*）

（Received 17 June 2003；revised manuscript received 21 July 2003）

Abstract

An external periodic field has been introduced in the Seeger equation；a motion equation of a crystal dislocation has been induced to Duffing function with the hard—spring properties. A global bifurcation of the system and a probable way into the chaos have been discussed by using Melnikov methoud. It shows that the system enters into the critical state，then enters the chaos by the cascading bifurcation，if $\delta/\alpha$ is defined and $\Omega$ is reduced continuously.

**Keywords**：dislocation，bifurcation，superlattice，nonlinearity

**PACC**：6180M，0547，7550R