

# 活性布朗粒子运动的稳态解<sup>\*</sup>

邓茂林<sup>1)</sup> 洪明潮<sup>2)</sup> 朱位秋<sup>3)</sup> 汪元美<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> 浙江大学生物医学工程系 杭州 310027)

<sup>2)</sup> 浙江大学计算中心 杭州 310027)

<sup>3)</sup> 浙江大学非线性随机力学实验室 杭州 310027)

(2003 年 10 月 8 日收到 2003 年 10 月 31 日收到修改稿)

拟可积 Hamilton 系统随机平均法可以用来研究活性布朗粒子运动. 介绍了该随机平均法, 利用它详细求解了布朗粒子运动的动力学方程. 该方程描述了活性布朗粒子在平面上的运动, 粒子受到的激励是 Gaussian 白噪声, 受到的阻尼是 Schienbein-Grueler 速度依赖的磨擦模型. 通过与数字模拟和与实验数据的比较, 证明所得稳态解正确. 对于 Rayleigh 和 Erdamnn 速度依赖的磨擦模型, 也给出了稳态解.

关键词: 活性布朗粒子, 拟可积 Hamilton 系统随机平均法, 可积性, 稳态解

PACC: 0250, 0420J, 0520, 0520D

## 1. 引 言

活性布朗粒子指的是具有内能量累积现象的布朗粒子, 这些内能量被用于粒子的主动运动. 由于活性布朗粒子的理论在生物和社会群体运动研究中的潜在应用, 近几十年来, 该理论得到了较大发展<sup>[1-3]</sup>. 在生物系统中, 从低等单细胞<sup>[4]</sup>到高等动物<sup>[5]</sup>, 甚至人类的运动<sup>[6]</sup>都存在自驱动性的运动. 此外, 交通工具的运动<sup>[7]</sup>也可以用此类运动来描述.

目前, Ebeling 等人提出了一种正则耗散系统的理论<sup>[8]</sup>, 并把它应用到活性布朗粒子运动的研究中, 在一些特殊情形下, 可以得到粒子运动方程的稳态解. 其实, Ebeling 的理论已包含在另一种称为随机激励的耗散的拟 Hamilton 系统理论之内. 在力学领域, 后者的理论框架已经被 Zhu 建立起来<sup>[9]</sup>.

随机激励的耗散的拟 Hamilton 系统的理论在活性布朗粒子运动研究中得到了应用. 通过使用拟 Hamilton 系统随机平均法研究了活性布朗粒子的平面运动, 粒子受 Gaussian 白噪声激励, 阻尼为 Schienbein-Grueler 速度依赖的磨擦模型, 详细求解得到了粒子运动方程的稳态解, 通过将稳态解与数字模拟和与实验数据作比较, 证明了该解的正确性. 对

于粒子在受 Rayleigh 和 Erdamnn 速度依赖模型作用下, 也给出应用该随机平均法得到的稳态解.

## 2. 拟可积 Hamilton 系统随机平均法<sup>[10]</sup>

当一个有  $n$  自由度的 Hamilton 系统存在  $n$  个独立对合的首次积分  $H_1, H_2, \dots, H_n$  时, 这个 Hamilton 系统被称为是可积的. 对合指的是任何两个运动积分  $H_i$  和  $H_j$  的 Poisson 括号为零. 考虑一个由如下运动方程控制的  $n$  自由度拟 Hamilton 系统:

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial p_i}; \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial q_i} - \epsilon c_{ij} \frac{\partial H'}{\partial p_j} + \epsilon^{1/2} f_{ik} \xi_k(t); \\ i &= 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (1)$$

这里  $q_i$  和  $p_i$  分别是广义位移和广义动量;  $H' = H'(q, p)$  是二次可微的 Hamilton 函数;  $c_{ij} = c_{ij}(q, p)$  是可微函数;  $f_{ik} = f_{ik}(q, p)$  也是二次可微函数;  $\epsilon$  是小量的正数;  $\xi_k(t)$  是 Gaussian 白噪声, 它们的相关函数是

$$\begin{aligned} E[\xi_k(t) \xi_l(t + \tau)] &= 2D_{kl} \delta(\tau); \\ k, l &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (2)$$

通过加入 Wong-Zakai 修正项, 再将其分成两部分, 分

\* 高等学校博士学科点专项科研基金(批准号 2002335092)资助的课题.

† 永久联系人, E-mail: zjudeng@163.net

别与保守力项和耗散力项组合,可得如下修正后的 Itô 随机微分方程:

$$dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt;$$

$$dp_i = - \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} + \varepsilon m_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) dt + \varepsilon^{1/2} \sigma_{ik} dB_k(t);$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n; \quad k, l = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

这里  $B_k(t)$  是标准 Wiener 过程;  $\sigma\sigma^T = 2Df^T$ . 假设系统 (1) 在  $\varepsilon = 0$  时退化成的 Hamilton 系统是可积的,  $\varepsilon$  是小量的正数, 因此方程 (1) 描述了拟可积 Hamilton 系统.

系统 (1) 的独立首次积分  $H_r$  和角变量  $\theta_r$  是系统状态  $(q, p)$  的函数, 通过使用 Itô 微分规则, 可以从方程 (3) 中导出关于  $H_r$  和  $\theta_r$  的 Itô 随机微分方程. 在非共振情形下,  $\theta_r$  是快变量而  $H_r$  是慢变量. 按照 Khasminskii 原理, 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时,  $H_r$  弱收敛于  $n$  维扩散过程. 换言之, 当  $\varepsilon$  是小量时, 在第一次近似中  $H_r$  可以用  $n$  维扩散过程来代替. 通过做平均运算, 就可以得到描述这个  $n$  维扩散过程的 Itô 随机微分方程

$$dH_r = \varepsilon U_r(\mathbf{H}) dt + \varepsilon^{1/2} V_{rk}(\mathbf{H}) dB_k(t);$$

$$r = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

与方程 (4) 相联系的平均后的 Fokker-Planck 方程是

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial H_r} [a_r(\mathbf{H})p] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial H_r \partial H_s} [b_{rs}(\mathbf{H})p] \right\}, \quad (5)$$

漂移系数  $a_r(\mathbf{H})$  和扩散系数  $b_{rs}(\mathbf{H})$  为

$$a_r(\mathbf{H}) = U_r(\mathbf{H})$$

$$= \left\langle -m_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial H_r}{\partial p_i} + D_{kl} f_{ik} f_{jl} \frac{\partial^2 H_r}{\partial p_i \partial p_j} \right\rangle_{\theta};$$

$$b_{rs}(\mathbf{H}) = V_{rk} V_{sl} = \left\langle 2D_{kl} f_{ik} f_{jl} \frac{\partial H_r}{\partial p_i} \frac{\partial H_s}{\partial p_j} \right\rangle_{\theta};$$

$$r, s, i, j = 1, 2, \dots, n; \quad k, l = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

这里

$$\langle \cdot \rangle_{\theta} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} [\cdot] d\theta \quad (7)$$

是平均算子;  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$ ;  $\int_0^{2\pi} [\cdot] d\theta$  是  $n$  重积分. 方程 (5) 的边界条件为

$$-a_r(\mathbf{H})p + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial H_s} [b_{rs}(\mathbf{H})p] = 0;$$

$$r, s = 1, 2, \dots, n; \quad \mathbf{H} \in \text{边界}. \quad (8)$$

这意味着在边界上  $n$  个方向的概率流等于零.

### 3. Fokker-Planck 方程的稳态解

拟可积 Hamilton 系统随机平均法的一个优点就是它能够把方程的维数从  $2n$  减小到  $n$ . 当 Fokker-Planck 方程 (5) 中时间导数项  $\partial p / \partial t = 0$  时, 方程的解为稳态解. 考虑到概率密度函数的非负性和积分归一性, 方程 (5) 的解可假设为

$$p(\mathbf{H}) = C \exp[-\lambda(\mathbf{H})], \quad (9)$$

这里  $\lambda(\mathbf{H})$  就是所谓的概率势,  $C$  是归一化常数. 把 (9) 式代入边界条件 (8) 式, 就可以得到一个线性方程组

$$b_{rs} \frac{\partial \lambda}{\partial H_s} = \frac{\partial b_{rs}}{\partial H_s} - 2a_r; \quad r, s = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

若该方程组满足以下相容条件:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial H_j \partial H_i} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial H_i \partial H_j}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

则可以解得  $\lambda$  函数为

$$\lambda(\mathbf{H}) = \int_0^{H_1} \frac{\partial \lambda}{\partial H_1} dH_1 + \int_0^{H_2} \frac{\partial \lambda}{\partial H_2} dH_2 + \dots + \int_0^{H_n} \frac{\partial \lambda}{\partial H_n} dH_n. \quad (12)$$

稳态解  $p(\mathbf{H})$  就可以通过把  $\lambda$  函数代入 (9) 式得到. 位移和动量的稳态联合概率密度可以按如下推导得出:

$$p(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = p(\mathbf{H}, \boldsymbol{\theta}) \left| \frac{\partial(\mathbf{H}, \boldsymbol{\theta})}{\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \right| = p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{H}) p(\mathbf{H}) \left| \frac{\partial(\mathbf{H}, \boldsymbol{\theta})}{\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \right| = \frac{C}{(2\pi)^n} p(\mathbf{H}), \quad (13)$$

这里的  $|\partial(\mathbf{H}, \boldsymbol{\theta}) / \partial(\mathbf{q}, \mathbf{p})|$  是 Jacobian 行列式的绝对值, 它总是保持为常数.

### 4. 活性布朗粒子在 Schienbein-Grueler 模型<sup>[1]</sup>下的稳态解

考虑一个有着单位质量, 在平面上运动的布朗粒子, 它的运动方程为

$$\ddot{x} + F\dot{x} + \omega^2 x = \xi_1(t); \quad \ddot{y} + F\dot{y} + \omega^2 y = \xi_2(t), \quad (14)$$

这里  $\omega$  是振动频率;  $F = F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  是使粒子有活性的摩擦系数;  $\xi_1(t)$  和  $\xi_2(t)$  是独立的 Gaussian 白噪声, 它们的激励强度都是  $2D$ .

一般情形下, 磨擦系数  $F$  是系统状态  $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  的函数. 这里考虑的是速度依赖的磨擦模型, 即  $F$  是速度  $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$  的函数.

使用最早和最经典的速度依赖的磨擦模型是由 Schienbein 和 Gruler 在对活细胞做实验后建立起来的<sup>[1]</sup>, 它有如下关系式:

$$F(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}) = \gamma_0 \left( 1 - \frac{v_0}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right). \quad (15)$$

(15) 式概括了不同类型细胞的活性运动特点, 像粒性白细胞、单核细胞和神经嵴细胞. 当  $v_0 > 0$  时, 布朗粒子的被动运动就转变成了主动运动. 当速度较小时 ( $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} < v_0$ ), 负磨擦起着提供能量的作用而使粒子驱动, 慢速运动的粒子会被加速. 相反, 当粒子速度较大时 ( $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} > v_0$ ), 由于出现正磨擦, 它的速度又要减小.

系统 (14) 中粒子假定是单位质量的, 令广义位移  $q_x = x, q_y = y$ , 广义动量  $p_x = \dot{x}, p_y = \dot{y}$  可得与系统 (14) 相联系的 Hamilton 系统, 这个 Hamilton 系统是可积的, 它的两个独立对合的运动积分为

$$H_x = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q_x^2; \quad H_y = \frac{1}{2} p_y^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q_y^2. \quad (16)$$

如果系统的某些固有频率满足共振关系, 并且相应的耦合项满足某些条件, 系统就会发生内共振<sup>[11]</sup>. 这里尽管与系统 (14) 相联系的 Hamilton 系统的固有频率满足共振关系, 但在这两个自由度中没有必要的耦合条件, 它仍然是非共振的.

通过利用 Itô 微分规则, 可得关于  $H_x$  和  $H_y$  的 Itô 随机微分方程为

$$\begin{aligned} dH_x &= \left[ \gamma_0 \left( \frac{v_0}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} - 1 \right) p_x^2 + D \right] dt \\ &\quad + \sqrt{2D} p_x dB_1(t); \\ dH_y &= \left[ \gamma_0 \left( \frac{v_0}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} - 1 \right) p_y^2 + D \right] dt \\ &\quad + \sqrt{2D} p_y dB_2(t). \end{aligned} \quad (17)$$

与之相联系的平均后的 Fokker-Planck 方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial H_x} [a_1 p] - \frac{\partial}{\partial H_y} [a_2 p] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial H_x^2} [b_{11} p] + \frac{1}{2} \\ &\quad \times \frac{\partial^2}{\partial H_y^2} [b_{22} p] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial H_x \partial H_y} [b_{12} p] \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial H_y \partial H_x} [b_{21} p]. \quad (18)$$

漂移系数和扩散系数为

$$\begin{aligned} a_1 &= \langle \gamma_0 \left( \frac{v_0}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} - 1 \right) p_x^2 + D \rangle_\theta; \\ a_2 &= \langle \gamma_0 \left( \frac{v_0}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} - 1 \right) p_y^2 + D \rangle_\theta; \\ b_{11} &= \langle 2D p_x^2 \rangle_\theta; \quad b_{22} = \langle 2D p_y^2 \rangle_\theta; \\ b_{12} &= b_{21} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

在  $\omega \neq 0$  时, 做完平均演算后, 可得这些系数的最简表达式为

$$\begin{aligned} a_1 &= D - \gamma_0 H_x + \frac{\sqrt{2} v_0 \gamma_0 H_x}{4\pi^2} \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta_1}{\sqrt{H_x \sin^2 \theta_1 + H_y \sin^2 \theta_2}} d\theta_1 d\theta_2; \\ a_2 &= D - \gamma_0 H_y + \frac{\sqrt{2} v_0 \gamma_0 H_y}{4\pi^2} \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta_2}{\sqrt{H_x \sin^2 \theta_1 + H_y \sin^2 \theta_2}} d\theta_1 d\theta_2; \\ b_{11} &= 2D H_x; \quad b_{22} = 2D H_y. \end{aligned} \quad (20)$$

这里方程组 (10) 的相容条件 (11) 式自然满足, 可解得  $\lambda(H_x, H_y)$  为

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\gamma_0}{D} (H_x + H_y) - \frac{2\sqrt{2} v_0 \gamma_0}{\pi^2 D} \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{H_x \sin^2 \theta_1 + H_y \sin^2 \theta_2} d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned} \quad (21)$$

将  $\lambda(H_x, H_y)$  代入方程 (9), 即可得稳态概率密度  $\rho(H_x, H_y)$ , 再根据方程 (13) 即可得如下位移和动量的稳态联合概率密度:

$$\begin{aligned} \rho(q_x, q_y, p_x, p_y) &= \\ C_1 \exp[-\lambda(H_x, H_y)] &|_{H_x = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q_x^2, H_y = \frac{1}{2} p_y^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q_y^2}, \end{aligned} \quad (22)$$

这里  $C_1$  是规一化常数.

在  $\omega = 0$  时, 将 (16) 式代入 (19) 式, 并完成平均演算, 可得漂移系数和扩散系数为

$$\begin{aligned} a_1 &= 2\gamma_0 H_x \left( \frac{v_0}{\sqrt{2H_x + 2H_y}} - 1 \right) + D; \quad b_{11} = 4DH_x; \\ a_2 &= 2\gamma_0 H_y \left( \frac{v_0}{\sqrt{2H_x + 2H_y}} - 1 \right) + D; \quad b_{11} = 4DH_y. \end{aligned} \quad (23)$$

同样解方程组 (10) 可得  $\lambda$  函数. 粒子动量的稳态概率密度为

$$\begin{aligned}
\rho(p_x, p_y) &= C_2 \exp \left[ \frac{\gamma_0}{D} \left( v_0 \sqrt{2H_x + 2H_y} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - H_x - H_y \right) \right] \Big|_{H_x = \frac{1}{2} p_x^2, H_y = \frac{1}{2} p_y^2} \\
&= C_2 \exp \left[ - \frac{\gamma_0}{2D} \left( v^2 - 2v_0 v \right) \right] \Big|_{v = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}}, \tag{24}
\end{aligned}$$

$C_2$  是规一化常数,解(24)式与文献[1]得到的解一致,说明在研究活性布朗粒子运动中应用拟可积 Hamilton 系统随机平均法可行,且求解的过程更加系统化和规范化.

图 1 至图 3 显示一些数值结果.对于不同的激励强度  $2D$ ,图 1 显示边缘稳态概率密度  $\rho(q_x)$  的变化.图 2 显示不同参数  $v_0$  时,位移  $q_x$  的稳态均方值  $E[Q_x^2]$  随激励强度  $2D$  的变化曲线.图 3 中实验数据来自 Franke 和 Gruler 对粒性白细胞的实验结果<sup>[12]</sup>,该图表示细胞运动速度的稳态概率密度.从所有图例中都可以看出,理论解和数字模拟结果以及实验数据都符合得较好,证明了所得稳态解的正确性.

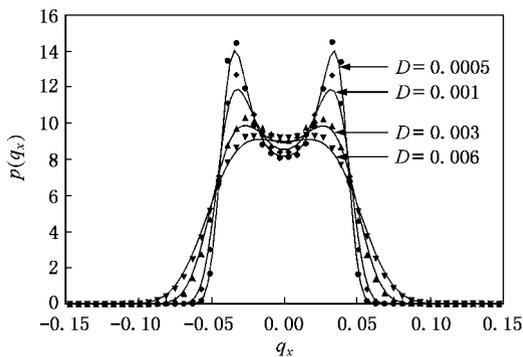


图 1 系统(14)的稳态概率密度  $\rho(q_x)$  随激励强度  $2D$  的变化.系统参数  $\gamma_0 = 0.8, v_0 = 0.2, \omega = 5$ .——为理论计算结果,可由概率密度  $\rho(q_x, q_y, p_x, p_y)$  得到,●◆▲为数值模拟结果

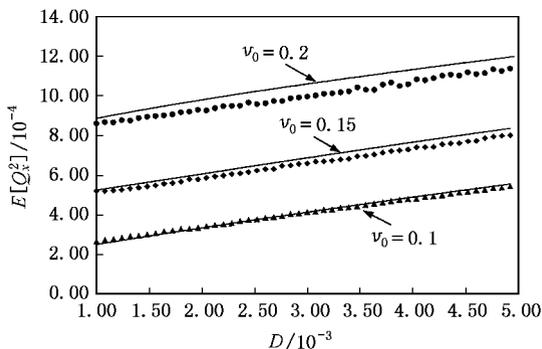


图 2 系统(14)的均方值  $E[Q_x^2]$  随激励强度  $2D$  和参数  $v_0$  的变化.其他参数同图 1

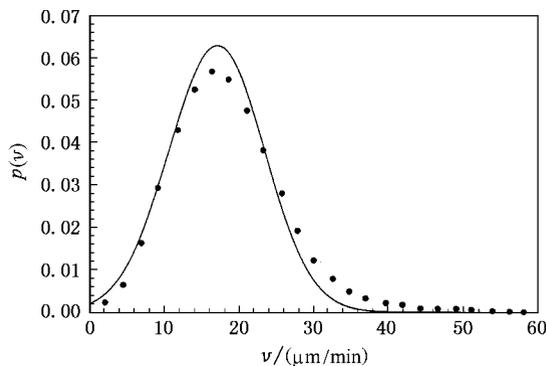


图 3 系统(14)粒子速度的稳态概率密度.系统参数  $\gamma_0/2D = 81 \mu\text{m}/\text{min}, v_0 = 17 \mu\text{m}/\text{min}, \omega = 0$ .●为实验数据

### 5. 其他磨擦模型下的稳态解

拟可积 Hamilton 系统随机平均法同样适用于布朗粒子运动系统(14)在其他速度依赖的磨擦模型下的情形.以下是 Rayleigh 速度依赖的磨擦模型<sup>[13]</sup>:

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}) = -\gamma_1 + \gamma_2(x^2 + y^2). \tag{25}$$

将其引入系统(14),替代 Schienbein-Gruler 模型,应用拟可积 Hamilton 系统随机平均法,可得系统在  $\omega \neq 0$  时稳态联合概率密度为

$$\begin{aligned}
\rho(q_x, q_y, p_x, p_y) &= C_3 \exp \left\{ \frac{1}{D} \left[ \gamma_1 (H_x + H_y) - \gamma_2 \left( \frac{3}{4} H_x^2 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{3}{4} H_y^2 + H_x H_y \right) \right] \right\} \Big|_{H_x = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q_x^2, H_y = \frac{1}{2} p_y^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q_y^2}. \tag{26}
\end{aligned}$$

在  $\omega = 0$  时,可得动量的稳态概率密度为

$$\begin{aligned}
\rho(p_x, p_y) &= C_4 \exp \left\{ \frac{1}{D} \left[ \gamma_1 (H_x + H_y) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \gamma_2 (H_x + H_y)^2 \right] \right\} \Big|_{H_x = \frac{1}{2} p_x^2, H_y = \frac{1}{2} p_y^2};
\end{aligned}$$

$$v = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}. \tag{27}$$

这一结果与 Reyleigh 所得结果<sup>[13]</sup>一致.

将 Erdmann 速度依赖的磨擦模型<sup>[14]</sup>

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}) = \gamma_0 \frac{(x^2 + y^2 - v_0^2)}{(q_0/\gamma_0) + (x^2 + y^2 - v_0^2)} \tag{28}$$

引入系统(14),然后应用拟可积 Hamilton 系统随机平均法,可得  $\omega \neq 0$  时的稳态联合概率密度为

$$\begin{aligned}
\rho(q_x, q_y, p_x, p_y) &= C_5 \exp \left\{ \frac{1}{D} \left[ \frac{q_0}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(q_0/\gamma_0 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2H_x \sin^2 \theta_1 + 2H_y \sin^2 \theta_2 - v_0^2) d\theta_1 d\theta_2 - \pi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \gamma_0 (H_x + H_y) \right] \right\} \Big|_{H_x = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q_x^2, H_y = \frac{1}{2} p_y^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q_y^2}. \tag{29}
\end{aligned}$$

在  $\omega = 0$  时, 可得动量的稳态概率密度为

$$P(p_x, p_y) = C_6 \left( \frac{q_0}{\gamma_0} + 2H_x + 2H_y - v_0^2 \right)^{\frac{q_0}{2D}} \times \exp \left[ -\frac{\gamma_0}{D} (H_x + H_y) \right] \Big|_{H_x = \frac{1}{2} p_x^2, H_y = \frac{1}{2} p_y^2} \quad (30)$$

注意到文献[14]中  $v_0^2 = q_0/\gamma_0 - c/d_2$ , 并且  $v = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ , 因此稳态解(30)式与文献[14]相应的解一致.

## 6. 结 论

本文引入了拟可积 Hamilton 系统随机平均法,

并将它应用到求解活性布朗粒子运动的稳态解之中. 对于不同的系统结构和运动模型, 都可以用系统化和规范化的过程来求解. 通过应用于三类速度依赖的磨擦模型( Schienbein-Gruler 模型、Rayleigh 模型和 Erdmann 模型) 结果表明理论解和数字模拟结果以及实验数据都可以在很大的参数范围内符合得较好. 拟可积 Hamilton 系统随机平均法在研究活性布朗粒子运动中有特殊的优势, 应该得到进一步发展. 需要指出的是, 拟可积 Hamilton 系统随机平均法也可以扩展到研究多粒子的运动规律中, 比如带有全局耦合的多粒子群体运动, 这也是下一步的研究课题.

- 
- [ 1 ] Schienbein M and Gruler H 1993 *Bull. Math. Biology* **55** 585
- [ 2 ] Steuermagel O, Ebeling H and Cahlenbuhr V 1994 *Chaos, Soliton, Fractals* **4** 1917
- [ 3 ] Schweitzer F 2002 *Brownian Agents and Active Particles* ( Berlin : Springer )
- [ 4 ] Tranquillo R T and Lauffenburger D 1987 *J. Math. Biology* **25** 229
- [ 5 ] Okubo A 1986 *Adv. Biophys.* **22** 1
- [ 6 ] Helbing D, Schweitzer F, Keltsch J and Molnár P 1997 *Phys. Rev. E* **56** 2527
- [ 7 ] Helbing D and Molnár P 1995 *Phys. Rev. E* **51** 42
- [ 8 ] Schweitzer F, Ebeling W and Tilch B 2001 *Phys. Rev. E* **64** 21110
- [ 9 ] Zhu W Q and Huang Z L 2000 *Adv. Mech.* **30** 481 ( in Chinese ) [ 朱位秋、黄志龙 2000 力学进展 **30** 481 ]
- [ 10 ] Zhu W Q, Huang Z L and Yang Y Q 1997 *J. Appl. Mech.* **64** 975
- [ 11 ] Huang Z L and Zhu W Q 1997 *J. Sound Vibration* **204** 249
- [ 12 ] Franke K and Gruler H 1990 *Eur. Biophys. J.* **18** 335
- [ 13 ] Rayleigh J W 1945 *The Theory of Sound* 2nd ed( New York : Dover )
- [ 14 ] Erdmann U, Ebeling W, Schimansky-Geier L and Schweitzer F 2000 *Eur. Phys. J. B* **15** 105

# Stationary solution of motion of active Brownian particle <sup>\*</sup>

Deng Mao-Lin<sup>1)</sup> Hong Ming-Chao<sup>2)</sup> Zhu Wei-Qiu<sup>3)</sup> Wang Yuan-Mei<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>( *Department of Biomedical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China* )

<sup>2)</sup>( *Center of Computation, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China* )

<sup>3)</sup>( *Nonlinear Stochastic Mechanics Laboratory, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China* )

( Received 8 October 2003 ; revised manuscript received 31 October 2003 )

## Abstract

The stochastic averaging method for a quasi-integrable Hamiltonian system has been applied to the study of the motion of active Brownian particles. Firstly, the stochastic averaging method is introduced. Then, the stationary solution of the dynamic equations governing an active Brownian particle moving in a plane with Schienbein-Gruler velocity-dependent friction model subject to Gaussian white noise excitation is obtained by using this method. The solution is proved validated by comparison with the results from digital simulation and those from experiment. Finally, the solutions for the Rayleigh and Erdamnn model are also given.

**Keywords:** active Brownian particle, stochastic averaging method for quasi-integrable Hamiltonian system, integrability, stationary solution

**PACC:** 0250, 0420J, 0520, 0520D

<sup>\*</sup> Project supported by the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China ( Grant No. 2002335092 ).