第 53 卷 第 7 期 2004 年 7 月
1000-3290/2004/53(07)/2118-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.7, July, 2004

衍射光栅的第二类角色散及其特性分析*

巴音贺希格

(中国科学院长春光学精密机械与物理研究所,长春 130033)

(2003 年 5 月 20 日收到;2003 年 11 月 25 日收到修改稿)

在由矢量衍射理论得到的锥面衍射情形下的广义光栅方程基础上,给出了对应于衍射极角的衍射光栅第一类角色散公式和对应于衍射方位角的衍射光栅第二类角色散公式,并通过理论和数值分析导出了第二类角色散发生突变的条件及相应的数学表达式.

关键词:衍射光栅, 锥面衍射, 第一类角色散, 第二类角色散

PACC:4210, 4110H

1. 引 言

衍射光栅的电磁场理论早在 1907 年就以著名的 Rayleigh 展开法[1] 开始研究. 后历经了约半个世纪的持续探索和缓慢推进过程,直到 20 世纪 60 年代,以借助数值模拟手段分析光栅衍射特性为特征的严格矢量衍射理论,随着电子计算机运算能力的迅速提高才应运而生,并得以不断繁荣. 目前它已逐渐发展成为一种公认的成熟的光学研究理论,最常用的方法有 Fourier 模式法(FMM)[2,3]、严格耦合波法[4—8]、坐标变换法(文献中也称 C 法)[9,10]、微分法[11,12] 和积分法[13] 等. 利用这些方法可以从不同角度分析光栅的衍射效率、光栅结构的各向异性引起的相移特性[14,15]、光栅的衍射场分布[16]、偏振特性[6,17]、抗反射特性[4,18]、全反射特性[19] 和介质光栅的导模共振性质[20] 等. 为了寻求与光栅矢量理论的整个发展趋势协调一致,我们曾提出了适用于一般情况(即所谓锥面衍射[7,8,21—23])的基于矢量衍射理论的色散分析方法[24],试图弥补以往由标量衍射理论得到的光栅色散表达式不涉及入射方位角的不足. 然而,当再一次仔细回顾文献[24] 推导任意斜入射下的色散公式的过程和所得到的结果时,发现有一个重要的方面未被考虑.

由文献[24] 可知,如果入射波的入射方位角 $\phi \neq 0°$,则必然有两个衍射角与其对应,一个是衍射极角 θ_j,另一个是衍射方位角 ϕ_j,二者都与入射方位角 ϕ 有关[24]. 既然由衍射极角 θ_j 毫无疑问地产生了角色散 $\mathrm{d}\theta_j/\mathrm{d}\lambda$,同理,由衍射方位角 ϕ_j 也必然要产生角色散 $\mathrm{d}\phi_j/\mathrm{d}\lambda$,显然,后者被忽视了. 为了避免物理名词的复杂化,姑且简单地将对应于衍射极角的角色散定义为衍射光栅的第一类角色散,将对应于衍射方位角的角色散定义为衍射光栅的第二类角色散,与此同时,本文将基于经典 Rayleigh 展开式,着重对衍射光栅第二类角色散的相关特性展开讨论,实现与文献[24] 的互补,旨在使衍射光栅色散特性分析趋于完整.

2. 理论与数值分析

如图 1 所示,波长为 λ 的平面波以入射极角 θ,入射方位角 ϕ 入射到光栅上,h 为光栅槽深,τ 为槽宽,Λ 为光栅周期,区域 1,2,3 和 4 分别为反射区、调制区、基底层和透射区,δ 为入射电场矢量的偏振角.

根据 Rayleigh 展开,入射区(反射区)的电场矢量可表示为[5—7]

$$\boldsymbol{E}_1 = \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r}) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{R}_j \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{1j} \cdot \boldsymbol{r}), \tag{1}$$

透射区的电场矢量可表示为

$$\boldsymbol{E}_{3,4} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{T}_j \exp[-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{3,4j} \cdot (\boldsymbol{r} - h\hat{z})], \tag{2}$$

磁场矢量也有与电场矢量相对应的相似形式. 式中

* 国家自然科学基金(批准号:10004011)资助的课题.

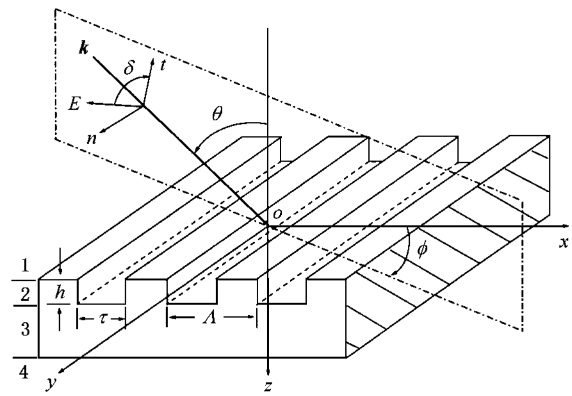

图 1　光栅结构及入射波矢示意图

$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$,j 为衍射级次,$\boldsymbol{R}_j$ 和 $\boldsymbol{T}_j$ 分别为反射和透射振幅矢量,而波矢量可表示为

$$\boldsymbol{k}_{lj} = k_{xj}\hat{\boldsymbol{x}} + k_y\hat{\boldsymbol{y}} \mp k_{l,zj}\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{3}$$

式中'$-$'号对应 $l=1$;'$+$'号对应 $l=3,4$,波矢量的 x 分量、y 分量和 z 分量分别为

$$k_{xj} = k_x + \mathrm{j}\frac{2\pi}{\Lambda}, \tag{4}$$

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta\cos\phi, \tag{5}$$

$$k_y = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta\sin\phi, \tag{6}$$

$$k_{l,zj} = \sqrt{k_l^2 - k_y^2 - k_{xj}^2}, \tag{7}$$

$$k_l = \frac{2\pi}{\lambda}n_l, \quad l = 1,3,4, \tag{8}$$

式中 $l=1,3,4$ 分别为反射区、基底层和透射区,对应的折射率分别为 $n_1=n_4=1$(假设光栅置于空气中),$n_3=$ 介质基底层折射率.

设第 j 级衍射波的衍射极角为 θ_j、衍射方位角为 ϕ_j,则与(5),(6)式同理可写出

$$k_{xj} = \frac{2\pi}{\lambda}n_l\sin\theta_j\cos\phi_j, \tag{9}$$

$$k_y = \frac{2\pi}{\lambda}n_l\sin\theta_j\sin\phi_j, \tag{10}$$

由(4)—(6),(9)和(10)式得到广义光栅方程为[24]

$$n_l\sin\theta_j\cos\phi_j = \sin\theta\cos\phi + \mathrm{j}\frac{\lambda}{\Lambda}, \tag{11}$$

$$n_l\sin\theta_j\sin\phi_j = \sin\theta\sin\phi, \tag{12}$$

由(11)和(12)式求出衍射极角和衍射方位角为

$$\theta_j = \arcsin\frac{1}{n_l}\sqrt{\sin^2\theta\sin^2\phi + \left(\sin\theta\cos\phi + \mathrm{j}\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^2}, \tag{13}$$

$$\phi_j = \arctan\frac{\sin\theta\sin\phi}{\sin\theta\cos\phi + \mathrm{j}\dfrac{\lambda}{\Lambda}}, \tag{14}$$

由(13)和(14)式知,对于给定的正衍射级次而言,θ_j 随 λ 的增大而增大,ϕ_j 随 λ 的增大而减小. 于是,两个相邻波长 λ_1 和 λ_2 的角色散如图 2 所示. 设 $\lambda_1<\lambda_2$,图 2 中 $\phi_{1,j}$ 和 $\phi_{2,j}$ 表示波长分别为 λ_1 和 λ_2 的 j 级衍射波矢在光栅平面 xoy 上的投影矢量与 ox 轴之间的夹角.

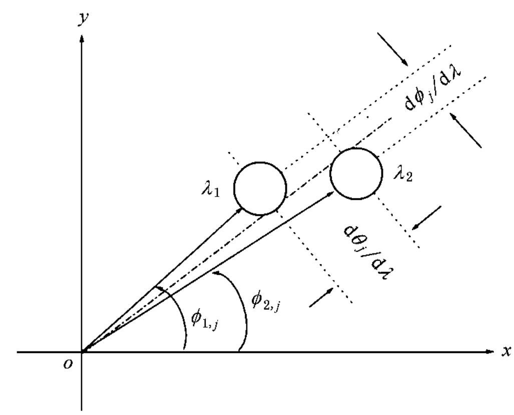

图 2　光栅的第一类角色散和第二类角色散示意图

将(13)和(14)式还原为

$$\sin\theta_j = \frac{1}{n_l}\sqrt{\sin^2\theta\sin^2\phi + \left(\sin\theta\cos\phi + \mathrm{j}\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^2}, \tag{15}$$

$$\tan\phi_j = \frac{\sin\theta\sin\phi}{\sin\theta\cos\phi + \mathrm{j}\dfrac{\lambda}{\Lambda}}, \tag{16}$$

则由(15)和(16)式可得第一类角色散和第二类角色散表达式为

$$\frac{\mathrm{d}\theta_j}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{j}}{n_l\Lambda\cos\theta_j}\frac{\sin\theta\cos\phi + \mathrm{j}\dfrac{\lambda}{\Lambda}}{\sqrt{\sin^2\theta\sin^2\phi + \left(\sin\theta\cos\phi + \mathrm{j}\dfrac{\lambda}{\Lambda}\right)^2}}, \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\mathrm{j}}{\Lambda\sec^2\phi_j}\frac{\sin\theta\sin\phi}{\left(\sin\theta\cos\phi + \mathrm{j}\dfrac{\lambda}{\Lambda}\right)^2}, \tag{18}$$

由(15)—(18)式知,第一类角色散 $\mathrm{d}\theta_j/\mathrm{d}\lambda$ 与衍射波所在区域介质折射率有关,第二类角色散 $\mathrm{d}\phi_j/\mathrm{d}\lambda$ 则无关. 计算中,将(13)式衍射极角 θ_j 和(14)式衍射方位角 ϕ_j 分别代入(17)和(18)式即可. 此时,衍射光栅的总角色散可表示为

$$\frac{\mathrm{d}\rho_j}{\mathrm{d}\lambda}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\theta_j}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2}, \tag{19}$$

其物理意义为波长相差 1nm 的相邻两束衍射波的实际角距离. 很明显,通常情况下总角色散要大于第一类角色散和第二类角色散,因 $\mathrm{d}\rho_j/\mathrm{d}\lambda$ 是直角三角形的弦长.

当入射方位角 $\phi=0°$时,第二类角色散 $\mathrm{d}\phi_j/\mathrm{d}\lambda=0$,则(17)和(19)式退化为

$$\frac{\mathrm{d}\rho_j}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}\theta_j}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{j}}{n_l\Lambda\cos\theta_j}. \tag{20}$$

为了直观了解衍射光栅第一类角色散和第二类角色散的作用,有必要根据广义光栅方程对入射波以任意倾斜角入射到光栅表面时发生锥面衍射的情景[7,21,23]做简单分析. 假设入射角(θ,ϕ)和介质折射率 n_l 都已给定,若使衍射角(θ_j,ϕ_j)连续变化,则方程(12)所描述的将是由(θ_j,ϕ_j)所代表的波矢围绕波矢空间坐标系的 k_y 轴旋转而成的两个半圆锥面,波矢的端点描绘出的是半圆锥面的底——两个半圆,一半在图 1 的反射区,另一半则在透射区,锥顶在 o 点处. 这一点根据(6)和(10)式不难理解,设入射波数为 $k=2\pi/\lambda$,则在反射区和透射区的上、下半圆锥的半角 α 可表示为

$$\cos\alpha=\frac{k_y}{k}=\sin\theta\sin\phi, \tag{21}$$

圆锥底半径为 $k\sin\alpha$,基底层中只需考虑折射率的贡献. 然而,衍射角(θ_j,ϕ_j)不可以连续变化,还要受到(11)式的约束,因而形成落在圆锥面上的分立的衍射级次. 图 3 给出锥面衍射的情形,大圆表示半径为 k 的球面,小圆表示衍射锥面的底面,指向下的箭头表示入射波矢,其余箭头表示反射区中的衍射波矢. 因此,第一类角色散描述的是波长相差 1nm 的相邻两束衍射波偏离波矢空间坐标系 k_z 轴的角度之差;第二类角色散描述的则是波长相差 1nm 的相邻两束衍射波在波矢空间坐标系的 k_xk_y 平面上的投影矢量与 k_x 轴的夹角之差. 若入射方位角 $\phi=0°$,第二类角色散将不存在,锥面衍射也将消失,图 3 小圆与 k_xk_z 面(大圆)重合.

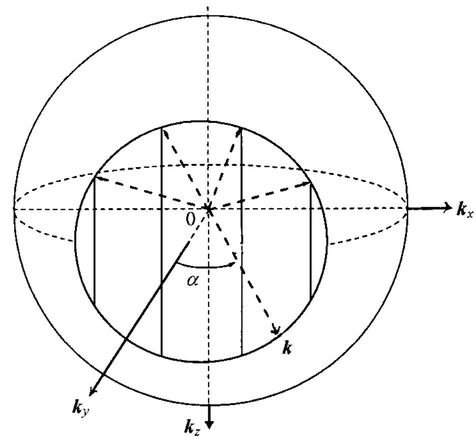

图 3 锥面衍射示意图

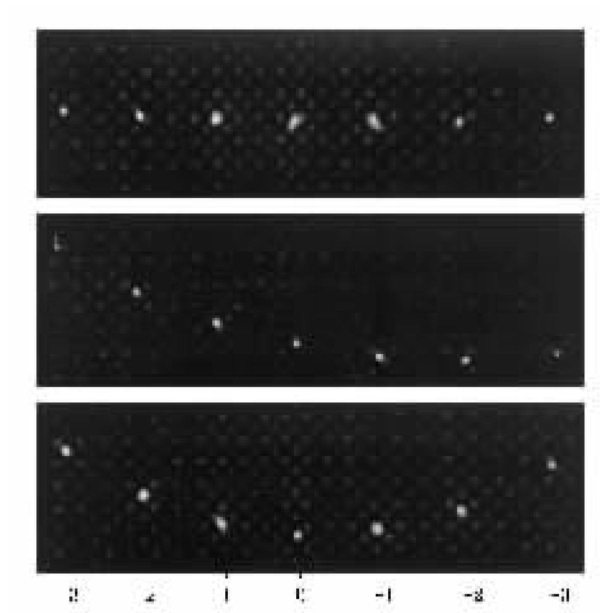

图 4 展示衍射光栅第二类角色散作用的实验照片

图 4 给出展示衍射光栅锥面衍射透射区各级衍射光斑的一组实验照片(He-Ne 激光束的衍射),自上而下分别为 $\phi=0°$,$0°<\phi<90°$和 $\phi=90°$时的情况,由此可以看出圆锥顶角与入射方位角的关系.

下面将给出几个算例,通过它们将着重分析衍射光栅第二类角色散的相关特性,并在计算中取 $\lambda=632.8\mathrm{nm}$,$\Lambda=10.0\mu\mathrm{m}$,$n_l=1$. 图 5 显示,从总体趋势来看,当入射波长 λ 和入射方位角 ϕ 一定时,第一类角色散 $\mathrm{d}\theta_j/\mathrm{d}\lambda$ 随着入射角 θ 的增大变化幅度较小,第二类角色散 $\mathrm{d}\phi_j/\mathrm{d}\lambda$ 则由 $\theta=0°$时的等于零随着入射角 θ 的增大迅速达到一个最大值. 衍射波的总角色散的变化规律取决于第一类角色散和第二类角色散.

通过求偏导数的方法可以求出图 5 中第二类角色散的最大值产生条件. (18)式的另一种形式为

$$\frac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}\lambda}=-\frac{\mathrm{j}}{\Lambda}\frac{\sin\theta\sin\phi}{\sin^2\theta\sin^2\phi+\left(\sin\theta\cos\phi+\mathrm{j}\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^2}, \tag{22}$$

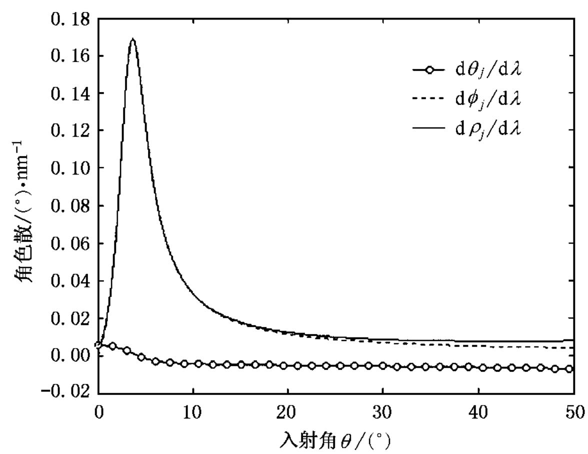

图 5　角色散与入射角关系($\phi=30°$,$j=-1$)

由 $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}\lambda}\right)=0$ 得到

$$\sin\theta = \pm \mathrm{j}\frac{\lambda}{\Lambda}, \tag{23}$$

即当 $\phi\neq0°$时,只要入射角满足(23)式,第二类角色散就会发生急剧变化出现最大值,这可以称得上是一个有趣的结论. 可见,衍射级次或波长增大,光栅周期减小等情况都会使第二类角色散的峰值向大入射角方向漂移,反之亦然. 如图 6 所示,当波长和光栅周期一定,j 分别等于 -1,-2 和 -3 时,第二类角色散最大值分别出现在 $\theta=3.628°$,$7.271°$ 和 $10.943°$处,以此类推,但是,衍射级次与峰值的大小无关.

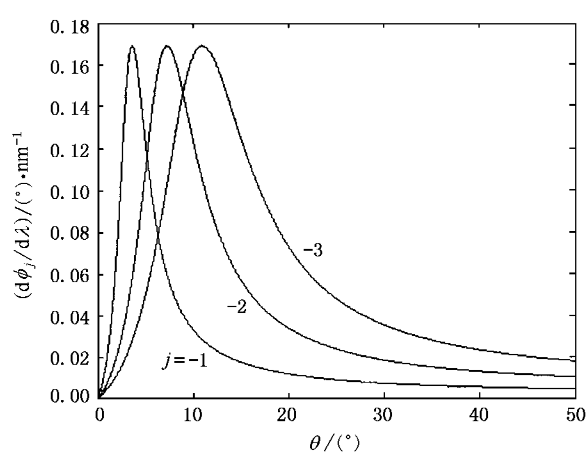

图 6　第二类角色散峰值与衍射级次关系($\phi=30°$)

将(23)式代入(22)式,得到第二类角色散峰值的表达式为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\max} = \mp\frac{\sin\phi}{2\lambda(1\pm\cos\phi)}, \tag{24}$$

可见,只与入射方位角、入射波长以及衍射级次的正负有关. 可以验证,表达式前的'$\mp$'号中,'$-$'对应正衍射级,"$+$"对应负衍射级,分母中的正负号恰与此相反. 例如,当 $j<0$,$\phi=30°$时,$\mathrm{d}\phi_j/\mathrm{d}\lambda|_{\max}=0.169(°)\cdot\mathrm{nm}^{-1}$,与图 6 结果一致. (24)式表明,当 λ 一定时,第二类角色散的峰值决定于衍射级次的正负和入射方位角的大小. 如图 7 所示,对于 $j=-1$ 级衍射波,在 $\phi=25°$,$15°$和 $5°$时,$\mathrm{d}\phi_j/\mathrm{d}\lambda|_{\max}$ 分别为 0.204,0.344 和 $1.039(°)\cdot\mathrm{nm}^{-1}$. 从(24)式还可以看出,当衍射级次的正负和入射方位角一定时,波长越小峰值则越大,这里就不再给出具体算例.

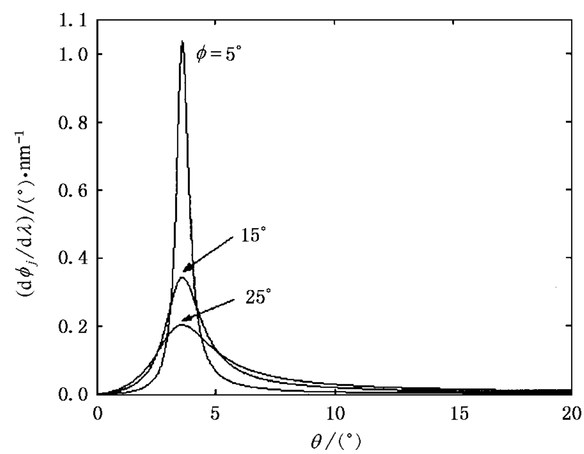

图 7　第二类角色散峰值与入射状态关系($j=-1$)

至此已经看到,当入射方位角 $\phi\neq0°$时,如果入射波以满足关系式 $\Lambda\sin\theta=\pm\mathrm{j}\lambda$ 的方式入射到光栅上,无论入射方位角 ϕ 多大,都将会引起第二类角色散的突变.

3. 结　论

入射方位角不仅对传统意义上的衍射光栅角色散(即本文的第一类角色散)有影响,它还导致第二类角色散的产生,促成锥面衍射,且入射角满足 $\Lambda\sin\theta=\pm\mathrm{j}\lambda$ 时,第二类角色散将发生突变出现最大值,波长越小峰值越大. 对于光谱仪器而言,由于入射狭缝高度不为零,除狭缝中心点之外的其他各点发出的所有光线都不在光栅主截面内,其入射面将与光栅主截面形成一系列各不相同的方位角,因而会有相应的第一类角色散和第二类角色散存在. 因此,根据本文提供的分析方法可以对谱线弯

曲[25,26]和光谱弯曲[25]等现象的产生机理做出更为精确的解释，而且所含信息量将要比标量衍射理论以及空间光线追迹法[25]的描述丰富，这将对光谱仪器设计、测试、装调和使用具有一定的理论指导意义，在此就不再作详细讨论．再者，由(17)，(18)和(19)式看出，它们与光栅槽深、占空比、光栅槽形无关，适用于所有一维衍射光栅；同时，第一类角色散和第二类角色散均不涉及入射波的偏振态．

[1] Rayleigh L 1907 *Proc. Roy. Soc.* A **79** 399
[2] Tamir T *et al* 1964 *IEEE Trans. Microwave Tech.* **MTT-12** 323
[3] Li L 1996 *J. Opt. Soc. Am.* A **13** 1870
[4] Moharam M G and Gaylord T K 1981 *J. Opt. Soc. Am.* **71** 811
[5] Moharam M G and Gaylord T K 1982 *J. Opt. Soc. Am.* **72** 1385
[6] Moharam M G and Gaylord T K 1983 *J. Opt. Soc. Am.* **73** 451
[7] Moharam M G and Gaylord T K 1983 *J. Opt. Soc. Am.* **73** 1105
[8] Moharam M G *et al* 1995 *J. Opt. Soc. Am.* A **12** 1068
[9] Chandezon J *et al* 1982 *J. Opt. Soc. Am.* **72** 839
[10] Li L *et al* 1999 *Appl. Opt.* **38** 304
[11] Kaspar F G 1973 *J. Opt. Soc. Am.* **63** 37
[12] Tremain D E and Mei K K 1978 *J. Opt. Soc. Am.* **68** 775
[13] Maystre D 1978 *J. Opt. Soc. Am.* **68** 496
[14] Yun G and Yu M W 1985 *Acta Opt. Sin.* **5** 488 (in Chinese)[恽钢、于美文 1985 光学学报 **5** 488]
[15] Wang S S *et al* 1990 *J. Opt. Soc. Am.* A **7** 1470
[16] Zhang Y H and Chen Y S 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 204 (in Chinese)[张玉河、陈岩松 1995 物理学报 **44** 204]
[17] Knop K 1978 *J. Opt. Soc. Am.* **68** 1207
[18] Raguin D and Morris G M 1993 *Appl. Opt.* **32** 1154
[19] Fu K X *et al* 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1278(in Chinese)[傅克祥等 1998 物理学报 **47** 1278]
[20] Zhou C H *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 68(in Chinese)[周传宏等 2002 物理学报 **51** 68]
[21] Petit R 1980 *Electromagnetic Theory of Grating* (Berlin:Springer)
[22] Peng S T 1989 *J. Opt. Soc. Am.* A **6** 1869
[23] Li L 1993 *J. Mod. Opt.* **40** 553
[24] Bayanheshig, Qi X D and Tang Y G 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1157 (in Chinese)[巴音贺希格、齐向东、唐玉国 2003 物理学报 **52** 1157]
[25] Wu G A 1978 *Design in Spectrum Instrument* (Beijing:Science Press) (in Chinese)[吴国安 1978 光谱仪器设计(北京 科学出版社)]
[26] Zhu S J *et al* 1986 *Diffraction Grating* (Beijing:Mechanics Industry Press) (in Chinese)[祝绍箕等 1986 衍射光栅(北京 机械工业出版社)]

The second kind angular dispersion and the analysis of characteristics of diffraction grating*

Bayanheshig
(*Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun* 130033, *China*)
(Received 20 May 2003; revised manuscript received 25 November 2003)

Abstract

The first and second kind formulas of angular dispersion, corresponding respectively to the polar angle and azimuthal angle of diffraction grating, are presented based on the generalized grating equation produced on the basis of vector diffraction theory under the condition of conical diffraction mounting; at the same time, by making theoretical and numerical analysis of the condition in which the second kind formula of angular dispersion changes evidently and the corresponding mathematical expression is obtained.

Keywords: diffraction grating, conical diffraction mounting, first kind angular dispersion, second kind angular dispersion
PACC: 4210, 4110H

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10004011).