

场频率变化时原子与场的相互作用*

许静平 羊亚平

(同济大学物理系, 上海 200092)

(2003 年 10 月 16 日收到, 2003 年 11 月 26 日收到修改稿)

讨论了场频率随时间变化时二能级原子与相干态光场的相互作用. 分析了两种典型的情况, 即场频率随时间作正弦变化以及作脉冲变化的情况. 研究发现: 当场频率随时间作正弦变化时, 原子布居数反转的崩塌和回复现象将消失, 当场频率随时间作脉冲变化时, 布居数反转随时间的演化将诱发出新的崩塌和回复过程.

关键词: Jaynes-Cummings 模型, 布居数反转, 拉比振荡

PACC: 4250, 3280

1. 引言

Jaynes-Cummings (J-C) 模型描述了二能级原子与单模电磁场的相互作用^[1]. 一方面, J-C 模型的数学形式比较简单, 可以严格求解, 在讨论场的统计性质方面具有可靠性^[2]; 另一方面, 在实验上, 人们可以利用高 Q 因子腔体和里德伯原子实现这种理想模型^[3]. 因此, 在探讨光与物质相互作用等问题中, J-C 模型在实验和理论方面均受到广泛的关注^[4-8], 并揭示了许多量子现象, 如拉比振荡^[5]、原子布居数反转的崩塌和回复^[6]、光子反聚束效应^[7]、腔体中场的压缩效应^[8]等. 其中像拉比振荡、崩塌和回复等现象也相继在其他量子系统中得到发现和研究^[9]. 随着研究的发展, J-C 模型不断地推广, 如三能级原子与一个双模压缩真空场的相互作用^[10]、光子腔中的 J-C 模型^[11]、Kerr 介质中的 J-C 模型^[12]、外加驱动场控制下的 J-C 模型^[13]、受驱动的双光子 J-C 模型的非线性动力学演化^[14]、广义 J-C 模型中的耗散等^[15]. 在以前讨论 J-C 模型时, 一般认为场频率不随时间变化. 涉及场频率随时间变化的原子与场相互作用的研究比较少^[16]. 事实上, 场频率随时间的变化将会影响原子与场的相互作用以及原子的动力学性质. 因此, 本文将讨论场频率发生变化时二能级原子与电磁场的相互作用. 主要讨论场频率成正弦和脉冲变化两种情况下原子的动力学性质.

2. 模型和运动方程

考虑一个二能级原子与一个单模电磁场的相互作用系统, 其哈密顿量在旋波近似下为

$$H = \hbar\nu a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar g(\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-), \quad (1)$$

其中 a^\dagger, a 分别为电磁场的产生和湮没算符, 原子算符 σ_\pm, σ_z 满足 $[\sigma_\pm, \sigma_\mp] = \sigma_z, [\sigma_z, \sigma_\pm] = \pm\sigma_\pm$. g 为原子与电磁场之间相互作用的耦合常数, ω_0 为原子的共振跃迁频率, 电磁场频率 $\nu(t)$ 随时间变化. 电磁场频率及耦合系数分别写成

$$\nu = \nu_0 + f(t), \quad (2)$$

$$g = g_0 \sqrt{1 + \frac{f(t)}{\nu_0}}, \quad (3)$$

其中 $f(t)$ 为随时间变化的函数, g_0 为场频率恒定时的耦合常数. 由 (3) 式可见, 随场频率的变化, 原子与场的耦合常数也随时间变化.

任一时刻系统的态矢量 $|\psi\rangle$ 为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n [C_{1,n}(t)|1, n\rangle + C_{0,n}(t)|0, n\rangle], \quad (4)$$

其中 $|1, n\rangle$ 表示原子处于激发态 $|1\rangle$, 场有 n 个光子, $|0, n\rangle$ 表示原子处于基态 $|0\rangle$, 场有 n 个光子.

将 (1) 和 (4) 式代入薛定谔方程, 并令

* 国家自然科学基金(批准号: 90203007)和国家重点基础研究发展规划项目资助的课题.

$$\begin{aligned}
 C_{1,n}(t) &= \exp\left(-i\left(n\nu_0 + \frac{1}{2}\omega_0\right)t\right) \\
 &\quad \times \exp\left(-in\int_0^t f(t)\lambda dt\right)M_{1,n}(t), \\
 C_{0,n+1}(t) &= \exp\left(-i\left[(n+1)\nu_0 - \frac{1}{2}\omega_0\right]t\right) \\
 &\quad \times \exp\left(-i(n+1)\int_0^t f(t)\lambda dt\right) \\
 &\quad \times M_{0,n+1}(t), \tag{5}
 \end{aligned}$$

则可得关于 $M_{1,n}(t), M_{0,n+1}(t)$ 的运动方程为

$$\begin{aligned}
 \dot{M}_{1,n}(t) &= -ig\sqrt{n+1}\exp(-i(\nu_0 - \omega_0)t) \\
 &\quad \times \exp\left(-i\int_0^t f(t)\lambda dt\right)M_{0,n+1}(t), \\
 \dot{M}_{0,n+1}(t) &= -ig\sqrt{n+1}\exp(i(\nu_0 - \omega_0)t) \\
 &\quad \times \exp\left(i\int_0^t f(t)\lambda dt\right)M_{1,n}(t). \tag{6}
 \end{aligned}$$

3. 场频率变化时原子的布居数反转

3.1. 特殊情况 $f(t)=0$ 即标准 J-C 模型

在以下讨论中,假定原子初始时处于激发态,即 $C_{1,n}(0) = C_n(0), C_{0,n+1}(0) = 0$,当场频率不变时,即 $f(t)=0, \Delta = \omega_0 - \nu_0$ 则可得

$$\begin{aligned}
 C_{1,n}(t) &= C_{1,n}(0)\left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega_n}\sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right)\right]\exp(i\Delta t/2), \\
 C_{0,n+1}(t) &= -C_{1,n}(0)\frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n} \\
 &\quad \times \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right)\exp(-i\Delta t/2), \tag{7}
 \end{aligned}$$

其中 $\Omega_n^2 = \Delta^2 + 4g^2(n+1), g = g_0$. 原子的布居数反转 $W(t)$ 表示原子处于激发态和基态间的概率差,即

$$\begin{aligned}
 W(t) &= \sum_n [|C_{1,n}(t)|^2 - |C_{0,n+1}(t)|^2] \\
 &= \sum_n [|M_{1,n}(t)|^2 - |M_{0,n+1}(t)|^2]. \tag{8}
 \end{aligned}$$

将(7)式代入(8)式,得

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{nm}(0) \left[\frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} + \frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2} \cos(\Omega_n t) \right], \tag{9}$$

其中 $\rho_{nm}(0) = |c_n(0)|^2$ 为初始时刻场中存在 n 个光子的概率,它服从泊松分布,表示为

$$\rho_{nm}(0) = \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!}, \tag{10}$$

$\langle n \rangle$ 为初始时刻场中的平均光子数.由(9)式可以得到原子的布居数反转随时间的演化性质,如图1所示, $W(t)$ 随时间产生周期性的崩塌和回复现象.

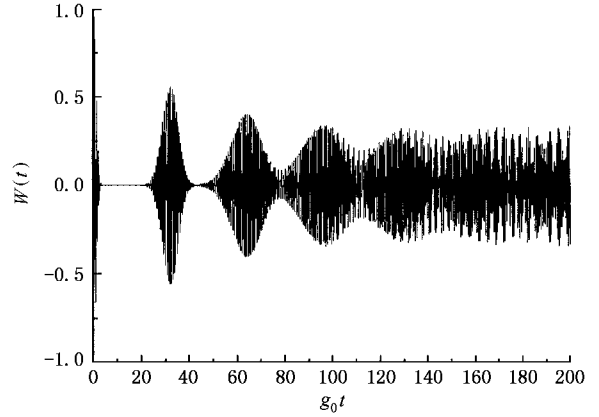


图1 $\langle n \rangle = 25, \Delta = 0, f(t) = 0$ 时解析解结果 $W(t)$ 随时间的变化

3.2. 场频率随时间作正弦变化

若取 $f(t) = c \sin \beta t$, 则场频率随时间作正弦变化, $\nu = \nu_0 + c \sin \beta t$, c 为变化的幅度, β 为变化的角频率. 假定初始光场的平均光子数 $\langle n \rangle = 25$, 并取 $\omega_0 = \nu_0 = 20000g_0$, 则(6)式可写为

$$\begin{aligned}
 \dot{M}_{1,n}(t) &= -ig\sqrt{n+1}\exp(-i(\nu_0 - \omega_0)t) \\
 &\quad \times \exp\left[i\frac{c}{\beta}[\cos(\beta t) - 1]\right]M_{0,n+1}, \\
 \dot{M}_{0,n+1}(t) &= -ig\sqrt{n+1}\exp(i(\nu_0 - \omega_0)t) \\
 &\quad \times \exp\left[-i\frac{c}{\beta}[\cos(\beta t) - 1]\right]M_{1,n}. \tag{11}
 \end{aligned}$$

用数值方法可以求解上述方程组(用数值解算出标准 J-C 模型的结果,与解析解的结果完全符合),可以知道原子布居数反转 $W(t)$ 随时间的演化性质.图2至图4给出不同参数时 $W(t)$ 的演化情况.当场频率振荡的幅值 c 非常小时,崩塌和回复所受的影响很小,可以忽略不记.但如果提高幅值 c ,发现当幅值增大到一定程度时(但依然相对于 ν_0 是一个小量),会对崩塌和回复产生影响.崩塌和回复的轮廓依然可见(见图2),但是可明显看到崩塌已经消失,并随场频率的正弦变化而相应作正弦振荡.回复过程也可以看到这种现象.继续提高幅值 c 这种正弦调制的作用更加明显(见图3),回复现象几乎消失.此外也发现,随场频率变化幅度的提高,整个崩塌回复的轮廓产生了延迟.我们把场频

率变化的频率放慢,见图 4,可见原子占据数反转的演化也随场频率变化而成近似正弦变化,变化频率等于场频率的变化频率.

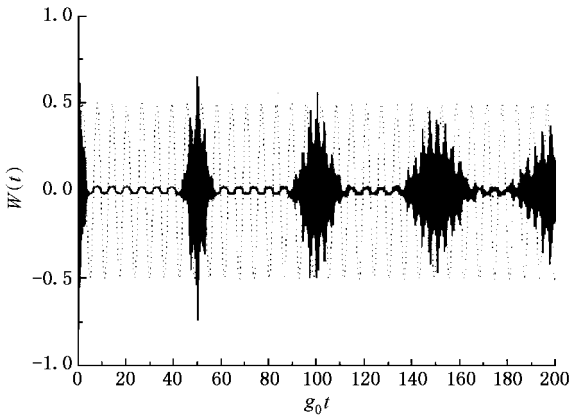


图 2 $\beta = g_0, c = 0.001\nu_0$ 时 $W(t)$ 随时间的变化图为场频率的正弦振荡

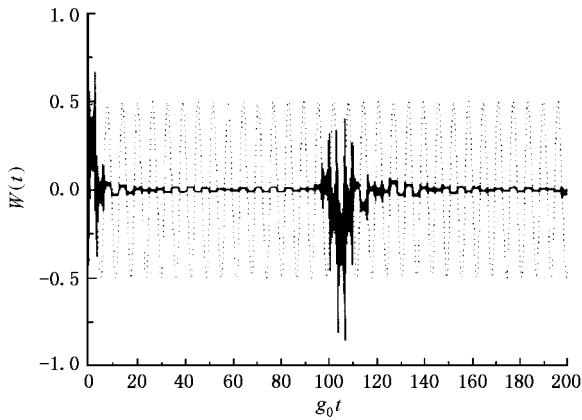


图 3 $\beta = g_0, c = 0.003\nu_0$ 时 $W(t)$ 随时间的变化图 图注同图 2

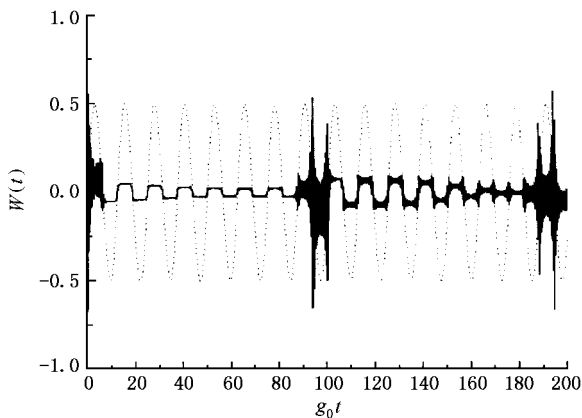


图 4 $\beta = 0.5g_0, c = 0.003\nu_0$ 时 $W(t)$ 随时间的变化图 图注同图 2

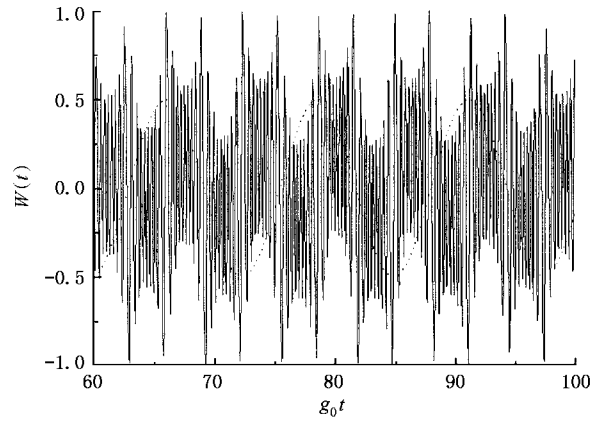


图 5 $c = 0.001\nu_0, \beta = g_0$, 光子数 n 为 25 时 $W(t)$ 的演化情况 图注同图 2

当相互作用光场的频率为常数时,原子布居数反转值 $W(t)$ 将出现拉比振荡,其振荡频率与光强相关.当初始光场的光子分布为泊松分布时,各个光子数态引起的拉比振荡频率各不相同,而对 $W(t)$ 性质起主要影响的光子态的光子数集中在峰值附近一个小的区间.当小区间两边的光子数态引起的拉比振荡的相位相差 π 的奇数倍时,各拉比振荡之间将不再相关,并相互减弱,从而出现崩塌现象;当最大光子数的光子态引起的拉比振荡与其近邻的光子数态所引起的拉比振荡的位相差为 2π 的整数倍时,各拉比振荡之间重新出现相干,并相互加强,从而出现回复现象,如图 1 所示.

当相互作用光场的频率随时间作正弦变化时,情况将出现变化.对于某光子数的光子态与原子的相互作用,原子布居数反转 $W(t)$ 出现振荡.在相互作用光场频率恒定时, $W(t)$ 具有确定的、与光场强度相关的拉比振荡频率;而当相互作用光场的频率随时间作正弦变化时, $W(t)$ 尽管开始时作无规则的振荡,但由于场频率正弦调制作用, $W(t)$ 在一段时间后作准周期振荡,其振动周期与频率振荡周期将相同,而与光强无关(见图 5).而且光场频率变化的振幅越大, $W(t)$ 的这种准周期状态就越强.初始光场为相干态时,各光子数的光子态与原子相互作用产生各自的振荡,但在一段时间后,由于所有的振荡都由于光场的频率作正弦变化的调制作用变成了准周期的振荡,而且具有相同的周期,因此总的原子布居数反转值 $W(t)$ 也演化成了准周期性的振荡.

3.3. 光场频率呈脉冲变化

考虑相互作用光场频率呈脉冲变化

$$f(t) = \begin{cases} c & t \in [nT + t_0, nT + \tau + t_0], \\ 0 & \text{其余}, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

其中 T 为脉冲周期, c 为脉冲强度, τ 为脉冲宽度, t_0 为第一个脉冲起始时刻. 由于频率的脉冲变化将会改变各拉比振荡的相位, 从而改变各拉比振荡之间的相干性, 这将会对布居数反转值的演化产生影响. 在以下讨论中, 将考虑不同的脉冲对原子布居数反转 $W(t)$ 演化性质的影响, 依然假定初始时刻 $\nu_0 = \omega_0 = 20000g_0, <n> = 25$.

1) 脉冲周期 T 与固定场频率时崩塌回复的周期相同, 而脉冲加在每次崩塌处, 如图 6 所示. 在这种情况下, 各拉比振荡在崩塌时处于非相干状态, 频率脉冲在此时的加入, 对原子布居数反转值 $W(t)$ 随时间演化的影响很小, 在原先回复处依然出现回复, 而在原先崩塌处依然出现崩塌, 但在回复或崩塌过程中, 会出现一些新的崩塌与回复的中间过程.

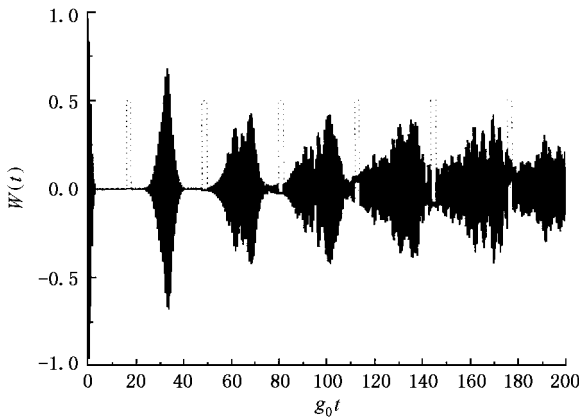


图 6 脉冲为 $g_0 T = 32, g_0 t_0 = 16, c = 0.001\nu_0, g_0 \tau = 2$ 时 $W(t)$ 随时间的变化图为场频率的脉冲振荡

2) 脉冲周期 T 与固定场频率时崩塌回复的周期相同, 而脉冲加在每次回复处, 如图 7 所示. 在第一个脉冲结束时, 各拉比振荡处于从相干向非相干转化的过程中, 由于频率的突然变化, 改变了这种转化过程, 又向相干转化, 从而产生一个新的回复. 此外, 由于场频率突然变化, 使得在脉冲发生这段过程中, $W(t)$ 集中于某一小段概率中. 而在以后每次回复时加上的脉冲, 则会加速原先处于相干的各拉比振荡之间的相干性, 从而引起新的回复过程.

3) 脉冲加在每次崩塌及回复处, 如图 8 所示. 在第一个脉冲附近没有明显的变化, 这与第一种情况相同. 但在第三、五等脉冲附近, 即在未加脉冲时

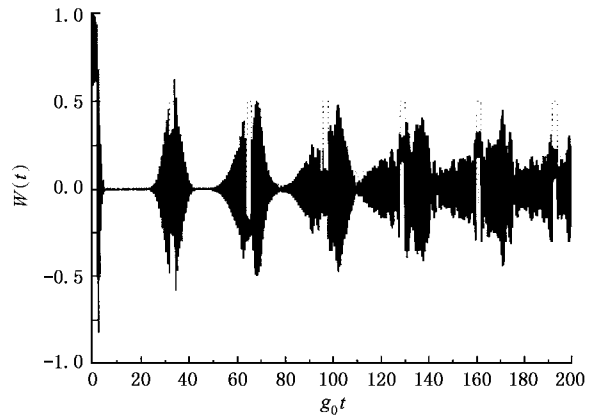


图 7 脉冲为 $g_0 T = 32, g_0 t_0 = 0, c = 0.001\nu_0, g_0 \tau = 2$ 时 $W(t)$ 随时间的变化图 图注同图 6

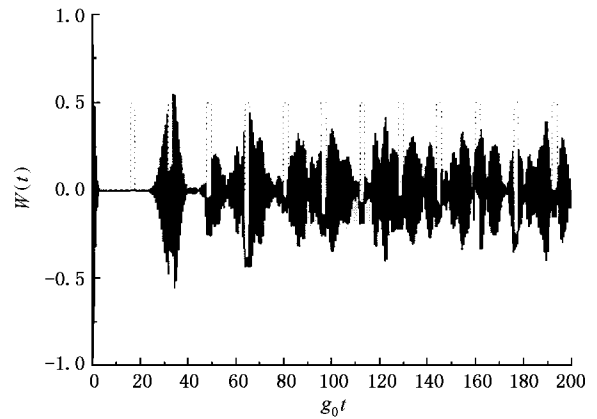


图 8 脉冲为 $g_0 T = 16, g_0 t_0 = 16, c = 0.001\nu_0, g_0 \tau = 2$ 时 $W(t)$ 随时间的变化图 图注同图 6

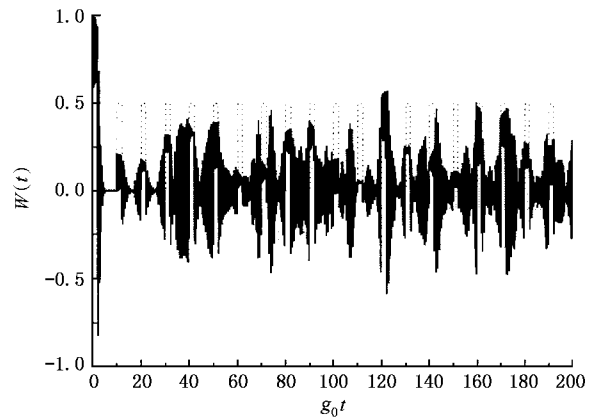


图 9 脉冲为 $g_0 T = 10, g_0 t_0 = 0, c = 0.001\nu_0, g_0 \tau = 2$ 时 $W(t)$ 随时间的变化图 图注同图 6

处于崩塌的时段, 均能诱导出一个新的回复. 该现象表明频率脉冲的变化导致该处各拉比振荡由原先的非相干转化成了相干, 从而出现回复.

4)对于一般的脉冲变化情况,如图 9 所示. 可以发现,由于频率脉冲变化的影响,出现了更多的崩塌和回复过程.

4. 结 论

本文分别讨论了场频率作正弦变化及脉冲变化时二能级原子与相干态光场的相互作用,主要分析了在这两种情况下原子的布居数反转随时间的演化

性质. 研究表明,当场频率作正弦变化时,由于场频率的正弦变化对各个拉比振荡具有调制作用,驱使各个拉比振荡以同一频率振动,从而使原子的布居数反转 $W(t)$ 随场频率的变化作准周期振动. 当场频率作脉冲变化时,由于频率变化的脉冲对各拉比振荡之间的相干性产生了影响,因此原子布居数反转 $W(t)$ 随时间的演化性质也受到影响,并能诱发新的崩塌与回复现象的产生.

- [1] Jaynes E T and Cummings F W 1963 *Proc. IEEE* **51** 89
- [2] Joshi A and Puri R R 1987 *J. Mod. Opt.* **34** 1421
Joshi A *et al* 1990 *Phys. Rev. A* **42** 4336
Joshi A *et al* 1990 *Opt. Commun.* **75** 189
Puri R R *et al* 1987 *Phys. Rev. A* **35** 3433
- [3] Yeazell J A, Mallalieu M and Stroud C R Jr 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 2007
Brune M *et al* 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1800
- [4] Raimond J M *et al* 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 117 ;1924
Kleppner D 1981 *Phys. Rev. Lett.* **47** 233
Meschede D, Walther H and Muller G 1985 *Phys. Rev. Lett.* **54** 551
- [5] Eberly J H, Narozhny N B and SanchezMondragon J J 1980 *Phys. Rev. Lett.* **44** 1383
Gentile T R, Hughey B J and Kleppner D 1989 *Phys. Rev. A* **40** 5103
- [6] Knight P L and Radmore P M 1982 *Phys. Lett.* **90** A 342
Meystre P and Zubairy M S 1982 *Phys. Lett. A* **89** 390
Rempe G, Walther H and Klein N 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 353
- [7] Short R and Mandel L 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 384
Tian Y H *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1439 [田永红等 物理学报 **48** 1439]
- [8] Arvinda P K and Guanhui H 1988 *Physica C* **150** 427
- [9] Li G X and Peng J S 1993 *Acta Phys. Sin.* **42** 1443 (in Chinese)
[李高翔、彭金生 1993 物理学报 **42** 1443]
Peng J S and Li G X 1993 *Phys. Rev. A* **47** 4212
Jakob M *et al* 1999 *Phys. Rev. A* **59** 2111
Potting S, Cramer M, Zhang W P and Meystre P 2002 *Phys. Rev. A* **65** 63620
- [10] Lai W K, Buzek V and Knight P L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6043
- [11] Quang T, Knight P L and Buzek V 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6092
- [12] Joshi A and Puri R R 1992 *Phys. Rev. A* **45** 5056
Huang C J and Wen L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1978 (in Chinese)
[黄春佳、文立 2002 物理学报 **51** 1978]
- [13] Alsing P, Gao D S and Carmichael H J 1992 *Phys. Rev. A* **45** 5135
Li F L and Gao S Y 2000 *Phys. Rev. A* **62** 43809
- [14] Joshi A 2000 *Phys. Rev. A* **62** 43812
- [15] Budini A A, de Matos Filho R L and Zagury N 2003 *Phys. Rev. A* **67** 33815
- [16] Law C K, Zhu S Y and Zubairy M S 1995 *Phys. Rev. A* **52** 4095
Janowicz M 1998 *Phys. Rev. A* **57** 4784

The interactions between an atom and a field with a time-varying frequency^{*}

Xu Jing-Ping Yang Ya-Ping

(*Department of Physics , Tongji University , Shanghai 200092 , China*)

(Received 16 October 2003 ; revised manuscript received 26 November 2003)

Abstract

In this paper , the interactions between a two-level atom and a coherent field with a time-varying frequency have been studied. The two typical cases , in which the frequency of the field varies with time in the form of sine or impulse , have been considered. It is found that the collapse and revival phenomena of the atomic population inversion will disappear as the frequency changing with time in sine form ; and the frequency varying in impulse form can lead to some new collapses and new revivals in the evolution of the atomic population inversion.

Keywords : Jaynes-Cumming models , atomic population inversion , Rabi oscillation

PACC : 4250 , 3280

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 90203007) , and the State Key Development Program for Basic Research of China.