第 53 卷 第 8 期 2004 年 8 月
1000-3290/2004/53(08)/2413-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.53,No.8,August,2004

非完整系统的形式不变性与 Hojman 守恒量*

罗绍凯[1)2)] 郭永新[3)] 梅凤翔[4)]

1)(浙江理工大学数学力学与数学物理研究所,杭州 310018)

2)(长沙大学数学力学与数学物理研究所,长沙 410003)

3)(辽宁大学物理系,沈阳 110036)

4)(北京理工大学理学院,北京 100081)

(2003 年 7 月 9 日收到;2003 年 11 月 18 日收到修改稿)

研究非完整力学系统的形式不变性导致的非 Noether 守恒量——Hojman 守恒量. 在时间不变的特殊无限小变换下,给出非完整系统形式不变性的确定方程、约束限制方程和附加限制方程,提出并定义弱(强)形式不变性的概念. 研究特殊形式不变性导致特殊 Lie 对称性的条件,由系统的特殊形式不变性,得到相应完整系统的 Hojman 守恒量以及非完整系统的弱 Hojman 守恒量和强 Hojman 守恒量. 给出两个经典例子说明结果的应用.

关键词:分析力学,非完整系统,形式不变性,非 Noether 守恒量,Hojman 守恒量

PACC:0320

1. 引 言

动力学系统对称性与守恒量的研究在现代数学、力学、物理学中占有重要的地位,也是分析力学的一个发展方向. 近代利用对称性寻找系统守恒量的方法主要有:Noether 对称性[1—5]、Lie 对称性[4—7]和形式不变性[8—10]. 近年来,形式不变性成为对称性研究的热点之一[8—28]. 但是,对于各类动力学系统,以往关于形式不变性的研究全部集中在以下两个方面:一是研究形式不变性与 Noether 对称性之间的关系,通过 Noether 等式得到 Noether 守恒量;二是研究形式不变性与 Lie 对称性之间的关系,通过 Lie 对称性结构方程(等价于 Noether 等式)也是得到 Noether 守恒量.

非完整约束系统各种对称性与守恒量的研究,人们做了大量的工作,得到一系列重要结果[2—5,29—31]. 但是,无论非完整约束是一阶的或高阶的,是 Chetaev 型的或非 Chetaev 型的,系统的 Lagrange 量是非奇异的或奇异的,以及与非完整约束相关的各种专门问题,以往得到的各类非完整约束系统的守恒量都是 Noether 守恒量.

1992 年,Hojman 直接从微分方程出发,经过特殊的 Lie 对称变换,引入函数 $\mu=\mu(q)$ 得到一类新型的守恒量,被称为 Hojman 守恒量[32]. Pillay 和 Leach 证明了这是一类非 Noether 守恒量[33]. 由于 Hojman 的工作没有结合实际的动力学系统,且没有考虑时间因子,Hojman 原始定理只具有数学意义,没有实际的力学意义和物理意义. 后来,人们在应用 Hojman 方法时都要结合各类不同动力学系统的实际,并引入函数 $\mu=\mu(t,q,\dot{q})$ 或 $\mu=\mu(t,q,p)$,才使得 Hojman 守恒量具有实际意义. 近年来,Hojman 守恒量的研究引起国内外学者的重视[34-43]. 但是,以往关于 Hojman 守恒量的研究局限于不受约束或受有完整约束的系统.

本文研究非完整约束系统的形式不变性导致的非 Noether 守恒量,给出利用非完整系统的形式不变性寻找 Hojman 守恒量的方法. 首先,在时间不变的特殊无限小变换下,给出非完整系统形式不变性的确定方程、约束限制方程和附加限制方程,提出并定义弱(强)形式不变性的概念. 其次,研究非完整系统形式不变性与 Lie 对称性之间的关系,给出系统的形式不变性导致 Lie 对称性的充分必要条件. 而后,给出非完整系统的形式不变性导致 Hojman 守恒量存在的定理,并给出弱(强)形式不变性导致弱(强) Hojman 守恒量存在的定理. 最后,用非完整约束系

* 国家自然科学基金(批准号:10372053,10272021)、湖南省自然科学基金(批准号:03JJY3005)和湖南省教育厅科研基金(批准号:02C033)资助的课题.

统动力学的两个经典例子说明本文结果的应用，由系统的形式不变性给出相应的 Hojman 守恒量，并验证这些守恒量是非 Noether 的.

2. 非完整力学系统的特殊形式不变性

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s（$s=1,\cdots,n$）来确定. 系统的运动受有理想 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g), \tag{1}$$

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0. \tag{2}$$

系统的运动微分方程为

$$E_s(L)=Q_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,\cdots,n). \tag{3}$$

设系统的 Lagrange 量非奇异，可由方程(1)，(3)先求得乘子 $\lambda_\beta=\lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$，将方程(3)表示为相应完整系统的形式

$$\begin{aligned} &E_s(L)=Q_s+\Lambda_s \qquad (s=1,\cdots,n),\\ &\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}, \end{aligned} \tag{4}$$

式中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为 Lagrange 函数，$Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力，Λ_s 为广义约束反力，E_s 为 Euler 算子

$$E_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}. \tag{5}$$

展开方程(4)可解出所有广义加速度，记作

$$\ddot{q}_s=h_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s=1,\cdots,n). \tag{6}$$

取时间不变的、群的特殊无限小变换

$$\begin{aligned} &t^*=t,\\ &q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \end{aligned} \tag{7}$$

式中 ε 为无限小参数，ξ_s 为无限小生成元. 在无限小变换(7)式下，方程(4)的形式不变性的确定方程归结为

$$E_s\{X^{(1)}(L)\}=X^{(1)}(Q_s)+X^{(1)}(\Lambda_s), \tag{8}$$

非完整约束(1)式在变换(7)式下的不变性归结为约束限制方程[44,45]

$$X^{(1)}(f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}))=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g). \tag{9}$$

Appell-Chetaev 条件(2)式对虚位移 δq_s 的限制归结为附加限制方程[44,45]

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\xi_s=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g;s=1,\cdots,n). \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned} &X^{(1)}=\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s},\\ &\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+h_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \end{aligned} \tag{11}$$

且有

$$X^{(2)}=X^{(1)}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \tag{12}$$

定义 1 如果无限小变换的生成元 ξ_s 满足确定方程(8)，则相应对称性是与非完整系统(1)，(3)式相应完整系统(4)式的特殊形式不变性.

定义 2 如果无限小变换的生成元 ξ_s 满足确定方程(8)，而且还满足约束限制方程(9)，则相应对称性为非完整系统的弱形式不变性.

定义 3 如果无限小变换的生成元 ξ_s 满足确定方程(8)，而且同时满足约束限制方程(9)和附加限制方程(10)，则相应对称性为非完整系统的强形式不变性.

3. 特殊形式不变性为特殊 Lie 对称性的充分必要条件

在特殊无限小变换(7)式下，特殊 Lie 对称性的确定方程归结为[44]

$$X^{(2)}\{E_s(L)\}=X^{(1)}(Q_s)+X^{(1)}(\Lambda_s). \tag{13}$$

容易算得

$$\begin{aligned} &E_s\{X^{(1)}(L)\}-X^{(2)}\{E_s(L)\}\\ &=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\xi_k}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)-\frac{\partial\xi_k}{\partial q_s}\frac{\partial L}{\partial q_k}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right]\\ &-\frac{\partial}{\partial q_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \end{aligned} \tag{14}$$

于是有定理 1.

定理 1 对于非完整力学系统，在特殊的无限小变换(7)式下，如果生成元 ξ_s 是特殊形式不变的，且 ξ_s 满足如下关系：

$$\begin{aligned} &\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\xi_k}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)-\frac{\partial\xi_k}{\partial q_s}\frac{\partial L}{\partial q_k}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right]\\ &-\frac{\partial}{\partial q_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=0 \qquad (s,k=1,\cdots,n), \end{aligned} \tag{15}$$

则生成元 ξ_s 必定是特殊 Lie 对称的. 反之亦然.

证 将(15)式代入(14)式，得

$$E_s\{X^{(1)}(L)\}-X^{(2)}\{E_s(L)\}=0, \tag{16}$$

于是有

$$E_s\{X^{(1)}(L)\} - X^{(1)}(Q_s) - X^{(1)}(\Lambda_s)$$
$$= X^{(2)}\{E_s(L)\} - X^{(1)}(Q_s) - X^{(1)}(\Lambda_s). \quad (17)$$

如果 ξ_s 是特殊形式不变的,则(17)式等号左端为零,由(13)式知,ξ_s 也是特殊 Lie 对称的. 如果特殊形式不变性是特殊 Lie 对称的,则(16)和(17)式成立,再利用(14)式,则得(15)式.

显然,定理 1 中(15)式也是特殊 Lie 对称性为特殊形式不变性的充分必要条件.

对于 $\Lambda_s = 0$ 的一般完整力学系统以及 $\Lambda_s = Q_s = 0$ 的 Lagrange 系统,都是特殊的非完整力学系统,因此定理 1 自然适用.

由定义 2 和定理 1,可以得到定理 2.

定理 2　对于非完整力学系统,在特殊的无限小变换(7)式下,如果生成元 ξ_s 满足确定方程(8)和约束限制方程(9),而且满足关系式(15),则生成元 ξ_s 既是弱形式不变的,也是弱 Lie 对称的.

由定义 3 和定理 1,可以得到定理 3.

定理 3　对于非完整力学系统,在特殊的无限小变换(7)式下,如果生成元 ξ_s 满足确定方程(8)、约束限制方程(9)和附加限制方程(10),而且满足关系式(15),则生成元 ξ_s 既是强形式不变的,也是强 Lie 对称的.

4. 系统的特殊形式不变性与 Hojman 守恒量

非完整系统的特殊形式不变性导致 Hojman 守恒量的方法由下述定理给出.

定理 4　对于非完整力学系统,在无限小变换(7)式下,如果生成元 ξ_s 满足形式不变性的确定方程(8)和关系式(15),且存在函数 $\mu = \mu(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 使得

$$\frac{\partial h_s}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0, \quad (18)$$

则系统的形式不变性导致相应完整系统的 Hojman 守恒量,形如

$$I_{\mathrm{H}} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s) + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right) = \mathrm{const}. \quad (19)$$

证　在 Hojman 原始定理的证明方法中[32],改令 $\mu = \mu(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$,并利用定义 1 和定理 1,可以证得定理 4.

对于一般完整力学系统和 Lagrange 系统,定理 4 自然适用.

由定理 2 和定理 4,可以得到定理 5.

定理 5　对于非完整力学系统,在无限小变换(7)式下,如果生成元 ξ_s 满足形式不变性的确定方程(8)、约束限制方程(9)和关系式(15),且存在函数 $\mu = \mu(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 使得条件(18)式成立,则系统的弱形式不变性导致形如(19)式的弱 Hojman 守恒量.

由定理 3 和定理 4,可以得到定理 6.

定理 6　对于非完整力学系统,在无限小变换(7)式下,如果生成元 ξ_s 满足形式不变性的确定方程(8)、约束限制方程(9)、附加限制方程(10)和关系式(15),且存在函数 $\mu = \mu(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 使得条件(18)式成立,则系统的强形式不变性导致形如(19)式的强 Hojman 守恒量.

5. 算　例

例 1　二自由度非完整系统的 Lagrange 函数和非势广义力为[2,4,29]

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \quad (20)$$

$$Q_1 = -\frac{t}{1+t^2}, \quad (21)$$

$$Q_2 = \frac{1}{1+t^2}. \quad (22)$$

非完整约束方程为

$$f = -t\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + t = 0, \quad (23)$$

试由系统的形式不变性导出 Hojman 守恒量.

非完整系统的 Routh 方程给出

$$\ddot{q}_1 = -\frac{t}{1+t^2} - \lambda t, \qquad \ddot{q}_2 = -\frac{1}{1+t^2} + \lambda. \quad (24)$$

由(23),(24)式解得

$$\lambda = \frac{\dot{q}_1 - 1}{1+t^2}, \quad (25)$$

于是有

$$\ddot{q}_1 = -\frac{t}{1+t^2}\dot{q}_1 = h_1, \qquad \ddot{q}_2 = \frac{1}{1+t^2}\dot{q}_1 = h_2; \quad (26)$$

$$\Lambda_1 = -\frac{t}{1+t^2}(\dot{q}_1 - 1), \qquad \Lambda_2 = \frac{1}{1+t^2}(\dot{q}_1 - 1). \quad (27)$$

可以算得

$$
\begin{aligned}
X^{(1)}(L) &= \dot q_1\dot\xi_1 + \dot q_2\dot\xi_2,\\
X^{(1)}(Q_1) &= X^{(1)}(Q_2) = 0,\\
X^{(1)}(\Lambda_1) &= -\frac{t}{1+t^2}\dot\xi_1,\\
X^{(1)}(\Lambda_2) &= \frac{1}{1+t^2}\dot\xi_1 .
\end{aligned}
\tag{28}
$$

取生成元

$$\xi_1 = 0,\qquad \xi_2 = 1;\tag{29}$$

$$\xi_1 = 1,\qquad \xi_2 = 1;\tag{30}$$

$$\xi_1 = 1,\qquad \xi_2 = t .\tag{31}$$

容易验证，它们分别满足确定方程(8)和关系式(15)．条件(18)式给出

$$-\frac{t}{1+t^2} + \ln\mu = 0.\tag{32}$$

它有解

$$\mu = (1+t^2)^{1/2},\tag{33}$$

$$\mu = (1+t^2)^{1/2}(\dot q_1 + t\dot q_2 - q_2).\tag{34}$$

利用定理 4，由(29)，(30)，(31)与(33)，(34)式组合，可找到 Hojman 守恒量．由(29)与(33)式，(30)与(33)式，(31)与(33)式，(31)与(34)式分别组合，都给出平凡的 Hojman 守恒量

$$I_{\mathrm H} = 0.\tag{35}$$

由(29)与(34)式，(30)与(34)式分别组合可得

$$I_{\mathrm H} = -(\dot q_1 + t\dot q_2 - q_2)^{-1} = \mathrm{const}.\tag{36}$$

它是非平凡的．生成元(29)和(30)式分别满足约束限制方程(8)，而不满足附加限制方程(9)，因此，(36)式是非完整系统的弱 Hojman 守恒量．

注意到 Hojman 守恒量(36)式是非 Noether 的．因为按照 Noether 理论，生成元(29)，(30)式给出的 Noether 守恒量都是平凡的，而守恒量(36)式对应的 Noether 对称性生成元是

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= (\dot q_1 + t\dot q_2 - q_2)^{-2},\\
\xi_2 &= (\dot q_1 + t\dot q_2 - q_2)^{-2}t .
\end{aligned}
\tag{37}
$$

它不同于(29)和(30)式．

例 2 Appell-Hamel 例的 Lagrange 函数和非完整约束方程为[2—4,29—31]

$$L = \frac{1}{2}m(\dot q_1^2 + \dot q_2^2 + \dot q_3^2) - mgq_3,\tag{38}$$

$$f = \dot q_1^2 + \dot q_2^2 - \dot q_3^2 = 0.\tag{39}$$

试由系统的形式不变性导出 Hojman 守恒量．

应用 Lagrange 乘子方法，方程(4)给出

$$
\begin{aligned}
\ddot q_1 &= -\frac{g\dot q_1}{2\dot q_3} = h_1,\\
\ddot q_2 &= -\frac{g\dot q_2}{2\dot q_3} = h_2,\\
\ddot q_3 &= -\frac{1}{2}g = h_3;
\end{aligned}
\tag{40}
$$

$$
\begin{aligned}
\Lambda_1 &= -\frac{mg\dot q_1}{2\dot q_3},\\
\Lambda_2 &= -\frac{mg\dot q_2}{2\dot q_3},\\
\Lambda_3 &= \frac{1}{2}mg .
\end{aligned}
\tag{41}
$$

可以算得

$$
\begin{aligned}
X^{(1)}(L) &= \dot q_1\dot\xi_1 + \dot q_2\dot\xi_2 + \dot q_3\dot\xi_3 - mg\xi_3,\\
X^{(1)}(\Lambda_1) &= -\frac{mg}{2\dot q_3}\dot\xi_1 + \frac{1}{2}mg\frac{\dot q_1}{\dot q_3}\dot\xi_3,\\
X^{(1)}(\Lambda_2) &= -\frac{mg}{2\dot q_3}\dot\xi_2 + \frac{1}{2}mg\frac{\dot q_2}{\dot q_3}\dot\xi_3,\\
X^{(1)}(\Lambda_3) &= 0.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

取生成元

$$\xi_1 = \xi_2 = 0,\qquad \xi_3 = 1;\tag{43}$$

$$\xi_1 = \xi_2 = 1,\qquad \xi_3 = 0;\tag{44}$$

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1.\tag{45}$$

容易验证，它们分别满足确定方程(8)和关系式(15)．条件(18)式给出

$$-\frac{g}{\dot q_3} + \frac{\bar{\mathrm d}}{\mathrm dt}\ln\mu = 0.\tag{46}$$

它有解

$$\mu = t^{-2},\tag{47}$$

$$\mu = \left[-\frac{1}{2}m(\dot q_1^2 + \dot q_3^2 + \dot q_3^2) + mgq_3\right]t^{-2},\tag{48}$$

$$\mu = \left(m\dot q_3 + \frac{1}{2}mgt\right)t^{-2}.\tag{49}$$

利用定理 4，由(43)与(48)式，(45)与(48)式分别组合，都给出如下的 Hojman 守恒量：

$$
\begin{aligned}
I_{\mathrm H} &= -g\left[\frac{1}{2}(\dot q_1^2 + \dot q_2^2 + \dot q_3^2) - gq_3\right]^{-1}\\
&= \mathrm{const}.
\end{aligned}
\tag{50}
$$

守恒量(50)式是非 Noether 的．

6．结　语

本文提出了由非完整力学系统的形式不变性寻

找 Hojman 守恒量的方法,所得的 Hojman 守恒量不是 Noether 定理给出的. 本文的工作表明,利用形式不变性不但可以找到 Noether 守恒量,而且在一定条件下也可以找到非 Noether 守恒量. 本文的工作还表明,对于给定的动力学系统,不但利用 Lie 对称性可以找到非 Noether 守恒量,而且利用形式不变性也可以找到非 Noether 守恒量.

本文的结论自然适用于一般完整约束系统以及 Lagrange 系统. 本文提供的方法可以推广或类比使用于其他各类动力学系统.

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Math. Phys.* **2** 235

[2] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京 北京工业大学出版社)]

[3] Li Z P 1999 *Constrained Hamiltonian Systems and Their Symmetry Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1999 约束哈密顿系统及其对称性质(北京: 北京工业大学出版社)]

[4] Mei F X 1999 *Application of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)]

[5] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量(北京 科学出版社)]

[6] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **19** 105

[7] Mei F X 2000 *Acta Mech. Sin.* **141** 135

[8] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[9] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[10] Wang S Y, Mei F X 2002 *Chin. Phys.* **11** 5

[11] Wang S Y, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[12] Li R J, Qiao Y F, Meng J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1 (in Chinese) [李仁杰、乔永芬、孟 军 2002 物理学报 **51** 1]

[13] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[14] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449

[15] Luo S K 2002 *Commun. Theor. Phys.* **38** 257

[16] Chen X W, Luo S K, Mei F X 2002 *Appl. Math. Mech.* **23** 53

[17] Ge W K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 939 (in Chinese) [葛伟宽 2002 物理学报 **51** 939]

[18] Fang J H, Xue Q Z, Zhao S Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2183 (in Chinese) [方建会、薛庆忠、赵嵩卿 2002 物理学报 **51** 2183]

[19] Fang J H, Yan X H, Chen P S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1561 (in Chinese) [方建会、闫向宏、陈培胜 2003 物理学报 **52** 1561]

[20] Chen P S, Fang J H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1044 (in Chinese) [陈培胜、方建会 2003 物理学报 **52** 1044]

[21] Qiao Y F, Zhang Y L, Han G C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1051 (in Chinese) [乔永芬、张耀良、韩广才 2003 物理学报 **52** 1051]

[22] Ge W K, Zhang Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2105 (in Chinese) [葛伟宽、张 毅 2003 物理学报 **52** 2105]

[23] Zhang Y, Mei F X 2003 *Chin. Phys.* **12** 1058

[24] Luo S K 2003 *Appl. Math. Mech.* **24** 468

[25] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[26] Fang J H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2945 (in Chinese) [方建会 2003 物理学报 **52** 2945]

[27] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]

[28] Zhang Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 331 (in Chinese) [张 毅 2004 物理学报 **53** 331]

[29] Mei F X 1985 *Foundations of Mechanics of Nonholonomic Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 1985 非完整系统力学基础(北京 北京工业学院出版社)]

[30] Mei F X 1987 *Research on Nonholonomic Dynamics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 1987 非完整力学研究(北京 北京工业学院出版社)]

[31] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、刘 端、罗 勇 1991 高等分析力学(北京 北京理工大学出版社)]

[32] Hojman S A 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** L291

[33] Pillay T, Leach P G L 1996 *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** 6999

[34] Lutzky M 1995 *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** L637

[35] Lutzky M 1998 *Inter. J. Non-Linear Mech.* **33** 393

[36] Lutzky M 1999 *Inter. J. Non-Linear Mech.* **34** 387

[37] Mei F X 2002 *Chin. Sci. Bull.* **47** 2049

[38] Mei F X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1048 (in Chinese) [梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]

[39] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 **51** 461]

[40] Xu Z X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2423 (in Chinese) [许志新 2002 物理学报 **51** 2423]

[41] Luo S K 2003 *Chin. Phys.* **12** 357

[42] Luo S K 2003 *Chin. Phys.* **12** 841

[43] Luo S K 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 597

[44] Luo S K, Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 666 (in Chinese) [罗绍凯、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 666]

[45] Luo S K, Guo Y X, Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1271 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 1271]

Form invariance and Hojman conserved quantity for nonholonomic mechanical systems*

Luo Shao-Kai[1)2)] Guo Yong-Xin[3)] Mei Feng-Xiang[4)]

[1)] (Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics, Zhejiang University of Sciences, Hangzhou 310018, China)

[2)] (Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics, Changsha University, Changsha 410003, China)

[3)] (Department of Physics, Liaoning University, Shenyang 110036, China)

[4)] (School of Science, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

(Received 9 July 2003; revised manuscript received 18 November 2003)

Abstract

A non-Noether conserved quantity, i.e. Hojman conserved quantity, constructed by using a form invariance for the nonholonomic mechanical systems is presented. Under special infinitesimal transformations in which the time is not changed, the determining equations of the special form invariance, the constrained restriction equations, the additional restriction equations, and the definitions of the weak form invariance and the strong form invariance of the nonholonomic mechanical systems are given. The condition under which the special form invariance is a special Lie symmetry are obtained. From the special form invariance, the Hojman conserved quantity of the corresponding holonomic systems, the weak Hojman conserved quantity and the strong Hojman conserved quantity of the nonholonomic systems are obtained. And two examples are given to illustrate the application of the result.

Keywords: analytical mechanics, nonholonomic system, form invariance, non-Noether conserved quantity, Hojman conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10372053, 10272021), the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant No. 03JJY3005) and the Scientific Research Foundation of the Education Bureau of Hunan Province, China (Grant No. 02C033).