第 53 卷 第 8 期 2004 年 8 月
1000-3290/2004/53(08)/2534-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.8, August, 2004

利用介观 *LC* 电路制备薛定谔猫态*

嵇英华[1)2)] 罗海梅[1)2)] 叶志清[1)2)] 吴云翼[1)] 陈明玉[1)]

[1)] (江西师范大学物理与通信电子学院，南昌 330027)

[2)] (江西省光电子与通信重点实验室，南昌 330027)

(2003 年 8 月 27 日收到；2003 年 11 月 12 日收到修改稿)

提出了一种制备相干态的叠加态,即薛定谔猫态的方案. 该方案是基于将外加冲激信号作用于介观 *LC* 电路系统而设计的. 在该薛定谔猫态下,介观电路系统有非经典的量子压缩效应.

关键词：介观 *LC* 电路，冲激信号，薛定谔猫态
PACC：4250

1. 引 言

制备各种量子态及探索量子态的特性是量子光学的重要研究课题之一. 对各种量子态的操纵不仅在验证量子力学基本原理方面有重要的意义,而且在其他相关的领域也发挥着重要的作用,尤其在量子信息领域更起着举足轻重的作用. 在量子通信、量子计算机和量子隐形传态中,量子态是信息的载体,量子信息加工处理归根到底是对量子态的操纵过程. 因而,人们提出了许多制备量子态的方法. 例如,在数态上作用压缩算子得到压缩数态、在相干态上作用得到压缩相干态,还可以得到压缩热态、压缩克尔态等等. 近年来,随着对纳米器件研究的深入,人们对可作为量子位或量子逻辑门的有关纳米电子器件以及介观量子线路中的有关电荷与电流的非经典量子效应等问题产生了浓厚的研究兴趣[1—12]. 同时,人们对用电子学方法制备量子态也产生了浓厚的兴趣,因为相比于光学方法,用电子学方法制备量子态无需太苛刻的宏观条件[13—15]. 现有的研究结果业已表明：若不考虑介观电容器极板间电子波函数的耦合效应,则无耗散介观 *LC* 电路的动力学行为可等效为一个量子谐振子. 且在时变外源作用下,电路参数不变的非耗散介观 *LC* 电路将由初始的真空态演化到相干态[16]. 我们研究了电路参数作阶跃函数变化的介观 *LC* 电路量子态的变化. 研究结果[17]表明：通过保持非耗散介观 *LC* 电路的固有频率不变,而使电路参数作阶跃函数变化,就可将介观 *LC* 电路由初始的真空态经相干态而演化到压缩相干态,并由此进一步分别制备出电荷与电流的压缩最小测不准态. 通过控制电感参数的改变,可使电荷(电流)的量子涨落呈现出压缩与反压缩效应. 在文献[17]研究结果的基础上,我们进一步研究了利用介观 *LC* 电路制备压缩偶相干态. 结果表明：如果初始时刻介观 *LC* 电路系统处于偶相干态,则由于电路参数作阶跃变化,电路将处于压缩偶相干态. 在压缩偶相干态下,正像其他薛定谔猫态一样,光子场不仅有压缩效应,而且会出现反聚束现象[18].

通常在宏观情况下,电子穿过金属-绝缘体-金属结时,由于常温下热涨落的影响,掩盖了电子隧穿过程引起的静电能的变化. 但是在介观尺度下,由于介观尺度实际上和载流子保持相位记忆的相干长度相当,因而电子穿过金属-绝缘体-金属结时,静电能的变化会引起奇异的量子效应. 同样,介观电容器作为一个隧道结,其两极板中的电子波函数会形成一定强度的耦合；而当极板中电子波函数的耦合不可忽略时,介观 *LC* 电路的动力学行为就应等效为一个非线性量子谐振子. 为此,在本文中我们进一步研究无耗散非线性的介观 *LC* 电路系统量子态的演化. 结果表明：如果初始时刻系统处于真空态,则由于外加冲激函数信号的作用,系统由初始的真

---

* 江西省自然科学基金(批准号：0312019)资助的课题.

空态演化到相干态，再由相干态演化到相干态的叠加态——薛定谔猫态，并呈现出压缩效应.

2. 非线性介观 LC 电路的哈密顿量

理论和实验的研究结果均表明介观电容器相当于一个隧道结，电子在介观电容器中的运动实际上是一个单电子隧穿过程. 当一个电子穿过隧道结由一个极板到达另一个极板时，必须有一个克服库仑阻力的起始阈值电压 e/C，而当外加电压小于起始阈值电压时，穿过隧穿结的电流为零. 由于介观电路系统的特征尺度相当于系统电子波函数的相位相干长度，因而介观电容器两极板中的电子波函数会形成一定强度的耦合[19]. 假设介观电容器两极板中的电子波函数分别为 ψ_1 和 ψ_2，波函数相位差为 $\theta=\theta_2-\theta_1$，ε_1，ε_2 分别为两极板中的电子哈密顿量的能量本征值，有如下薛定谔方程：

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t}=\varepsilon_1\psi_1+k\psi_2,$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t}=\varepsilon_2\psi_2+k\psi_1.$$

这里 k 是两极板中的电子波函数的耦合系数. 一般而言，k 是一个很小的量. 当介观电容器两极板间的电压为 V 时，$\varepsilon_2-\varepsilon_1=2eV$，可以得到穿过隧道结的隧道电流

$$I_s=I_c\sin\theta,\tag{1}$$

$$\dot{\theta}=2eV,\tag{2}$$

式中 I_c 是临界电流. 因此，介观电容器两极板间存在着附加的耦合能，耦合能的大小可以由电压所做的功计算出来. 根据 $\mathrm{d}A(\theta)=-IV\mathrm{d}t$，耦合能为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_I&=-E_J\sin\theta\mathrm{d}\theta,\\E_I&=E_J(1-\cos\theta).\end{aligned}\tag{3}$$

式中 $E_J=\hbar I_c/2e$.

在本文中，我们研究一个非耗散的介观 LC 电路，计入介观电容器的耦合能，则体系的哈密顿量算符为($\hbar=k_B=c=1$)

$$H=\frac{1}{2C}q^2+E_J(1-\cos\theta)+\frac{1}{2L}\phi^2+q\varepsilon,\tag{4}$$

式中 L，C 分别为电路中的电感和电容，它们与时间无关. $\varepsilon(t)$为外加电压源的电压，在(4)式中我们已根据绝热近似取为常量 ε. $q(t)$是电荷，与电荷共轭的变量为磁通量 $\phi(t)$. 由于计入了耦合能，(4)式相当于一个非线性的量子谐振子. 按照正则量子化的方法，将 $q(t)$和 $\phi(t)$作为一对线性厄米共轭算符，它们满足正则对易关系，

$$[q,\phi]=\mathrm{i}.$$

3. 薛定谔猫态的制备与操纵

对于无源的 LC 电路，根据基尔霍夫回路电压定理：电容器上的电压和电感器上的电压相等. 由(2)式不难得到介观电容器两极板中电子波函数相位差算符和电路中磁通量算符的关系

$$\theta=2e\phi,\tag{5}$$

式中积分常数已取为零. 对于含源的介观 LC 电路，在绝热近似下，外加电压源的电压取为常量 ε，通过算符的适当平移，(5)式同样成立. 为了得到系统量子态的演化，考虑到 $\theta=2e\phi$，我们先将(4)式中的 $\cos\theta$ 作泰勒级数展开，近似取为

$$\cos(2e\phi)=1-2(e\phi)^2+\frac{2}{3}(e\phi)^4.$$

系统的哈密顿量为

$$H=\frac{1}{2L'}\phi^2+\frac{1}{2}L'\omega^2q^2+q\varepsilon+H',\tag{6}$$

式中

$$\frac{1}{L'}=4e^2E_J+\frac{1}{L},$$

$$H'=\frac{2}{3}E_J(e\phi)^4,$$

$$\omega_0^2=\frac{1}{L'C}.$$

我们引入非含时的产生算符和湮没算符 a^+ 和 a，

$$q=\frac{1}{\sqrt{2L'\omega_0}}(a^++a),$$

$$\phi=\mathrm{i}\sqrt{\frac{L'\omega_0}{2}}(a^+-a).$$

在外加电源的作用下，$0\leqslant t\leqslant\tau_c$，体系的哈密顿量为

$$\begin{aligned}H&=\omega_0a^+a+\lambda(a^++a)+H',\\\lambda&=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2L'\omega_0}}.\end{aligned}\tag{7}$$

这里，τ_c 为信号源作用的时间长度，对于冲激函数，$\tau_c\to0$. 低温下，设初始时刻介观电路系统处于真空态$|0\rangle$，在真空态下，电荷与磁通量的量子涨落分别为

$$\overline{(\Delta q)_0^2}=\frac{1}{2L'\omega_0},\tag{8}$$

$$\overline{(\Delta\phi)_0^2}=\frac{L'\omega_0}{2}.\tag{9}$$

由于 $L' < L$,不难推知真空态下,相比于极板间电子波函数无耦合的情形,极板间电子波函数有耦合情形下的电荷量子涨落要大一些,磁通量的量子涨落要小一些. 在 $t=0^+$ 时刻,介观 LC 电路受到冲激信号的作用,即系统受到一个幅度很大的信号电压的瞬时作用,理想情况下该冲激信号可表示为狄拉克函数

$$\delta(t) = 0, \qquad \forall t \neq 0,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1.$$

显然,在冲激信号作用下,系统的量子态将发生变化. 根据冲激函数信号的特点,我们可知其信号的幅度很大,满足 $\lambda \gg \omega$. 因而在冲激信号作用期间,$0 \leqslant t \leqslant \tau_c$,(7)式中等号右端主要是第二项起作用,其他两项可忽略. 则在 $0 < t \leqslant \tau_c$ 期间,系统的波函数$|\Psi(\tau)\rangle$为

$$\begin{aligned}|\Psi(\tau)\rangle &= \exp(-\mathrm{i}H\tau_c)|0\rangle \\ &= D(\beta)|0\rangle,\end{aligned} \tag{10}$$

式中 $\beta = -\mathrm{i}\lambda\tau_c$,$D(\beta) = \exp(\beta a^+ - \beta^* a)$为平移算符. 波函数$|\Psi(\tau)\rangle$表示的量子态为相干态. 易知,冲激信号作用后,介观 LC 电路将由 $t=0^-$ 时刻的真空态演化到 $t>0$ 时的相干态.

冲击函数信号作用后,$t > \tau_c$,描述系统量子态的波函数随时间作进一步的演化. 此时体系的哈密顿量应为

$$H_0 = \omega_0 a^+ a + H'.$$

作旋波近似,忽略不能保持系统能量守恒的项,上述无外源作用下的哈密顿量可表示为

$$H_0 \approx \Omega a^+ a - \omega(a^+ a)^2, \tag{11}$$

式中

$$\Omega = \omega_0 - \omega,$$
$$\omega = \frac{e^4 E_J L'}{C}.$$

毫无疑问,在冲激函数信号作用后介观 LC 电路所处的量子态$|\Psi(\tau)\rangle$是没有外加冲激函数信号系统哈密顿量 H_0 的初始态. 在相互作用绘景中,撤除冲激函数信号后,介观 LC 电路系统的波函数可表示为[20]

$$|\Psi(\tau)\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\beta|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\exp(\mathrm{i}\omega n^2 t)\frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{12}$$

(12)式波函数表示的量子态最初由 Titulaer 和 Glauber 引入并为人们广泛讨论. 在冲激函数信号作用完后,介观 LC 电路系统的量子态将由 $t=0^-$ 时刻的真空态演化到 $0 < t \leqslant \tau_c$ 时的相干态,再由相干态 $D(\beta)|0\rangle$按$|\Psi(t)\rangle$作进一步的演化.

我们发现,当 $t = \pi/2\omega$,描述系统量子态的波函数$|\Psi(t)\rangle$将演化为

$$\begin{aligned}\left|\Psi\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}|-\beta\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}|\beta\rangle\right), \\ |\beta\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\beta|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle.\end{aligned} \tag{13}$$

(13)式明确指出:当 $t = \pi/2\omega$,在冲激函数信号作用后,介观 LC 电路系统的量子态将由 $t=0^-$ 时刻的真空态演化到$0 < t \leqslant \tau_c$ 时的相干态,再由相干态 $D(\beta)|0\rangle$演化到两个相干态的叠加态——薛定谔猫态. 这说明当介观电容器极板间的耦合不可忽略时,在冲激函数信号下,我们能够制备出薛定谔猫态. 我们知道,冲激函数可用来描述某些物理现象,这些现象所涉及的物理量作用时间极短、数值极大而效果有限. 在 LC 电路中,电源开关的瞬间切换、电容电压的跃变和电感电流的跃变等都相当于冲激信号的作用. 因此,对介观 LC 电路系统进行上述操纵,我们就能够制备出(13)式表示的相干态的叠加态.

当系统处于(13)式表示的量子态时,电荷与磁通量的量子涨落分别为

$$\begin{aligned}\overline{(\Delta q)^2} &= \frac{1}{2L'\omega_0}(1 + 4\beta^2\cos^2\varphi \\ &\quad - 4|\beta|^2\mathrm{e}^{-4|\beta|^2}\sin^2\varphi),\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\overline{(\Delta\phi)^2} &= \frac{L'\omega_0}{2}(1 + 4\beta^2\sin^2\varphi \\ &\quad - 4|\beta|^2\mathrm{e}^{-4|\beta|^2}\cos^2\varphi).\end{aligned} \tag{15}$$

式中 $\varphi = \frac{\pi}{2}\frac{\omega_0}{\omega}$. 上述结果显示:在一定的相干强度下,电荷和磁通量的量子涨落以周期 π 作振荡变化.

4. 压缩效应

为了探讨系统在方程(13)描述的薛定谔猫态下的统计特性,我们定义二阶压缩度

$$\begin{aligned}Y_1 &= \frac{\langle(\Delta q)^2\rangle}{\langle(\Delta q)^2\rangle_0}, \\ Y_2 &= \frac{\langle(\Delta\phi)^2\rangle}{\langle(\Delta\phi)^2\rangle_0}.\end{aligned} \tag{16}$$

当 $Y<1$ 时,说明系统在一定量子态下电荷(或磁通

量)的量子涨落小于该物理量在真空态下的量子涨落,出现压缩效应. 显然,上述定义的二阶压缩度越接近于零,相应物理量的量子涨落被压缩得更深. 由(8),(9)和(14),(15)式,我们容易得到

$$Y_1\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)=1+4|\beta|^2(\cos^2\varphi-e^{-4|\beta|^2}\sin^2\varphi),\tag{17}$$

$$Y_2\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)=1+4|\beta|^2(\sin^2\varphi-e^{-4|\beta|^2}\cos^2\varphi).\tag{18}$$

图 1 和图 2 分别给出了 Y 随参数 φ 和相干强度的变化曲线. 变化曲线表明对于一定的相干强度,随着参数 φ 的变化,二阶压缩呈现周期振荡,且存在 $Y<1$ 的区间,非线性的介观 LC 电路系统出现压缩效应.

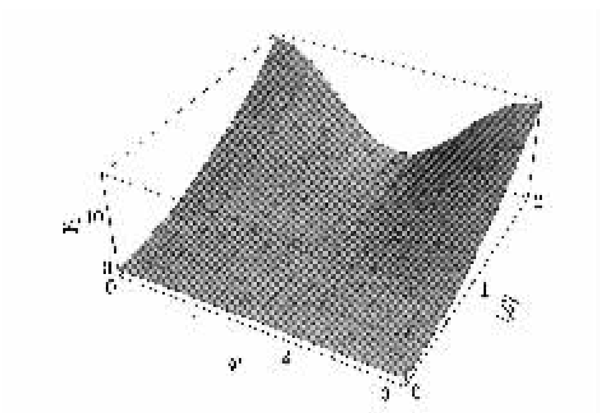

图 1　Y_1 随 φ 和 $|\beta|$ 参数的变化　$\varphi\in[0,\pi]$, $|\beta|\in[0,2]$

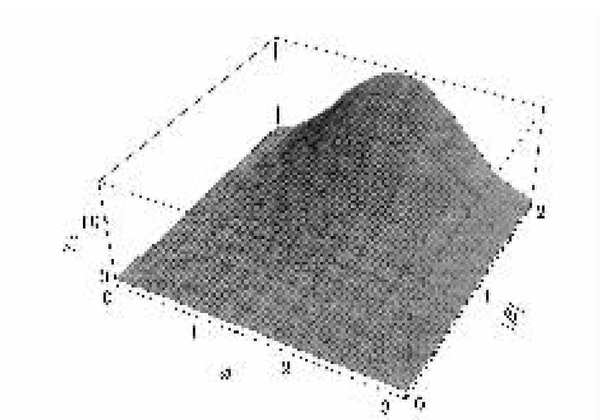

图 2　Y_2 随 φ 和 $|\beta|$ 参数的变化　$\varphi\in[0,\pi]$, $|\beta|\in[0,2]$

当

$$\operatorname{arccot}\exp(-2|\beta|^2)<\varphi<\pi-\operatorname{arccot}\exp(-2|\beta|^2)$$

时,则 $Y_1<1$,电荷的量子涨落出现压缩效应,磁通量的量子涨落无压缩效应.反之,当

$$0<\varphi<\operatorname{arccot}\exp(-2|\beta|^2),$$

或者

$$\pi-\operatorname{arccot}\exp(-2|\beta|^2)<\varphi<\pi,$$

则 $Y_2<1$,磁通量的量子涨落出现压缩效应. 由图 1、图 2 我们还可以知道,只有当相干强度较小时($|\beta|<1$)才会出现较明显的压缩效应.

图 3 描绘了当 $\varphi=k\pi+\pi/2$(或 $\varphi=k\pi$)时,Y_1(或 Y_2)二阶压缩度随相干强度的变化. $|\beta|>1$ 时,随着相干强度 $|\beta|$ 的增大,处于压缩状态的物理量的二阶压缩度总是接近于 1.而和其共轭的物理量的二阶压缩度不仅大于 1,而且总是随着 $|\beta|$ 的增大而单调增加. 只有在 $|\beta|<1$,才能得到较好的压缩效应.尤其当 $|\beta|=0.5$ 时,二阶压缩度有最小值,电荷(或磁通量)的量子涨落出现最大压缩. 根据上述的讨论可知,$\beta=-i\lambda\tau_c$,它们与电路参数和信号参数有关. 通过调节和操纵相应的参数,我们能够实现量子态的操纵.

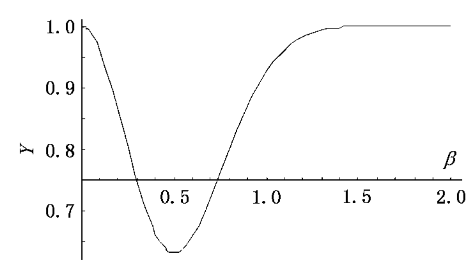

图 3　二阶压缩度随相干强度的变化

5. 结　论

把一个冲激函数信号作用到非线性的介观 LC 电路,将导致系统由初始的真空态演化到相干态,再由相干态演化到相干态的叠加态,并呈现出压缩效应. 以上研究表明,一方面通过调节介观 LC 电路的电路参数,另一方面通过调节和操纵冲激信号参量(强度、宽度),我们能够在介观 LC 电路中制备并操纵薛定谔猫态.

[1] Li Y Q, Chen B 1998 *Commun. Theor. Phys.* **29** 139
[2] Ji Y H, Nie Y Y *et al* 2002 *Commun. Theor. Phys.* **37** 346
[3] Chen B, Li Y Q *et al* 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 129 (in Chinese) [陈 斌、李有泉等 1997 **物理学报 46** 129]
[4] Ji Y H, Lei M S, Xie F S *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1064 (in Chinese) [嵇英华、雷敏生、谢芳森等 2001 **物理学报 50** 1064]
[5] Wang J S, Han B C, Sun C Y 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1187 (in Chinese) [王继锁、韩保存、孙长勇 1998 **物理学报 47** 1187]
[6] Wang J S, Feng J, Zhan M S 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 299 (in Chinese) [王继锁、冯 健、詹明生 2001 **物理学报 50** 299]
[7] Liang X T, Fan H Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 486
[8] Gu Y J 2001 *Chin. Phys.* **10** 490
[9] Wang X G, Pan S H 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 171
[10] Lei M S, Ji Y H, Xie F S 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 163
[11] Ling R L 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2343 (in Chinese) [凌瑞良 1999 **物理学报 48** 2343]
[12] Liang X T, Fan H Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 486
[13] Vegel K *et al* 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1816
[14] Monroe C *et al* 1996 *Science* **272** 1131
[15] Fukuo T, Ogawa T, Nakamura K 1998 *Phys. Rev.* A **57** 1367
[16] Fan H Y 1997 *Representation and Transformation Theory in Quantum Mechanics* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publishers) p21 (in Chinese) [范洪义 1997 量子力学表象与变换论 (上海:上海科学技术出版社) 第 21 页]
[17] Ji Y H, Le J X, Lei M S 2001 *Acta Phot. Sin.* **30** 1504 (in Chinese) [嵇英华、乐建新、雷敏生 2001 **光子学报 30** 1504]
[18] Ji Y H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 332 (in Chinese) [嵇英华 2003 **物理学报 52** 332]
[19] Ji Y H, Lei M S, Ouyang C Y 2002 *Chin. Phys.* **11** 720
[20] Zou J, Shao B 1999 *Phys. Lett.* A **256** 375

Preparation of Schrödinger cat state via a mesoscopic *LC* circuit*

Ji Ying-Hua[1)2)] Luo Hai-Mei[1)2)] Ye Zhi-Qing[1)2)] Wu Yun-Yi[1)] Chen Ming-Yu[1)]

[1)] (*Institute of Physics and Communication Engineering, Jiangxi Normal University, Nanchang* 330027, *China*)

[2)] (*Key Laboratory of Optoelectronic and Telecommunication of Jiangxi, Nanchang* 330027, *China*)

(Received 27 August 2003; revised manuscript received 12 November 2003)

Abstract

A scheme is presented for preparing the superposition of coherent states, i.e., Schrödinger cat states. These states can be generated by the action of an external impulse functional signal on initial vaccum state of a mesoscopic *LC* circuit. The nonclassical squeezing properties appear in the circuit under the Schrödinger cat states.

Keywords: mesoscopic *LC* circuit, impulse signal, Schrödinger cat states

PACC: 4250

* Project supported by the Natural Science Foundation of Jiangxi Province, China (Grant No. 0312019).