

一种新颖的用于光腔模式及光束传输模拟的特征向量法

程愿应 王又青 胡 进 李家熔

(华中科技大学激光技术国家重点实验室, 武汉 430074)

(2003 年 8 月 29 日收到, 2003 年 11 月 21 日收到修改稿)

根据有限元法单元划分的思想, 提出了一种新颖的模拟光腔模式及光束传输的特征向量法. 该方法的关键之处在于基于衍射积分理论构造了一种新的光束传输矩阵, 通过求解特征矩阵方程可一次性得到谐振腔的一系列特征向量, 每一列特征向量即代表了腔镜上光场的一个确定模式的振幅及相位分布. 并可采用该方法模拟光场传输到腔内或腔外任意地方的场分布. 该方法将传统方法中大量的迭代过程转化成为本征积分方程特征向量的求解过程, 并与初值取值无关, 且可一次性求得多个模式分布, 从而可方便地分析谐振腔的模式鉴别能力. 特征向量法对圆形镜共焦腔的计算结果与 Fox-Li 法迭代结果和拉盖尔-高斯近似法所得到的解析结果完全相符, 充分表明了特征向量法的合理性和有效性.

关键词: 谐振腔, 特征向量法, 模式分布

PACC: 4260D, 6180B, 0260

1. 引 言

光腔模式的计算在光束质量控制、导光及整形系统设计中具有非常重要的意义. 谐振腔的经典理论仅给出了部分简单腔型(如平平腔、圆形镜共焦腔)的模式解析解^[1-4]. 但在激光器的不断发展过程中所出现的许多新的腔型和光学元件却通常没有解析结果, 而必须采用各种数值模拟方法去求解. 如 Fox-Li 法^[5]、Prony 法^[6]、快速傅里叶变换法 (FFT)^[7-9]、有限差分法 (FDM)^[10-12] 和有限元法 (FEM)^[13-15] 等数值算法. Fox-Li 法原则上可以用来计算任何形状的开腔中的自再现模, 而且还可以计算诸如腔镜的倾斜、镜面的不平整性等对模的扰动, 但模初值的给定是否恰当会影响到结果的收敛性. Prony 法和 FFT 法由于采用了傍轴近似而不适合宽角衍射的情况. 根据光腔结构确定边界条件, 用 FDM 或 FEM 求解麦克斯韦方程组可以求得强波导腔的模式, 对边界条件进行适当的处理也可以对弱波导腔的模式近似求解, 而开腔边界条件的确定则非常复杂. FEM 将波导截面分成很多三角形单元, 每一个单元内的光场用多项式来表达, 然后加入单元之间场的连续条件, 就可以得到整个横截面的

场分布. 其优点很多. 在设置单元的大小和形状时很方便, 在处理复杂几何曲面时更加有效.

本文所提出的模拟光腔模式及光束传输的特征向量法, 基于基尔霍夫-菲涅耳衍射积分方程, 采用 FEM 单元划分的思想, 对腔镜进行单元划分, 并将单元节点处的光场复振幅变量分离出来, 可一次求解多个模式, 与初值选择无关, 并可适用于复杂腔型的计算等. 其合理性和有效性在对圆形镜共焦腔的模拟计算中得到了验证.

2. 衍射积分方程和传输矩阵的构造

光波在真空 ($\eta = 1$) 中传播时, 其光波场可用基尔霍夫-菲涅耳衍射积分方程近似描述,

$$U_2 = \frac{ik}{4\pi} \iint_{S_1} U_1 \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho} (1 + \cos(\alpha)) ds. \quad (1)$$

其物理意义为: 当知道了光波场在某一空间曲面上的振幅和相位分布, 就可以求出该光波场在空间其他任意位置处的振幅和相位分布. 对于如图 1 所示的激光谐振腔, 如腔镜 1 上光波场为 U_1 , 则腔镜 2 上的光波场 U_2 可用方程 (1) 求得, 反之亦然.

设腔镜 1 上的光场复振幅分布为 $U_1(x, y)$. 将腔镜 1 按照一定的顺序划分为单元 1— g , 通过在各

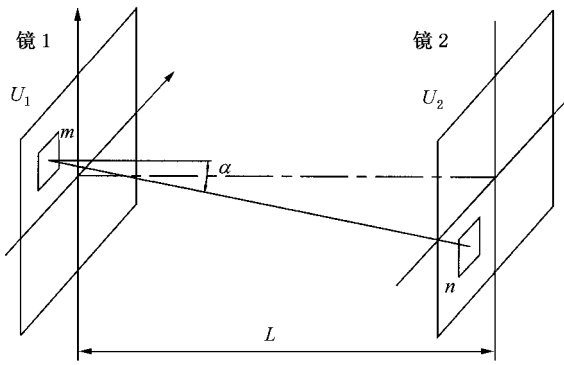


图1 激光谐振腔示意图

个单元上的节点处光场采样,可将连续函数 $U_1(x, y)$ 离散为 $u_1[1], u_1[2], \dots, u_1[g]$, 这样相应的复振幅分布可用列向量 U_1 表示为

$$U_1 = [u_1[1], u_1[2], \dots, u_1[g]]^T. \quad (2)$$

经过腔内的一次渡越, U_1 在腔镜 2 上将产生复振幅分布为 U_2 的光场. 同样 U_2 也可离散成 $u_2[1], u_2[2], \dots, u_2[h]$, 离散单元数为 $1-h$. 相应的复振幅分布同理也可用列向量 U_2 表示为

$$U_2 = [u_2[1], u_2[2], \dots, u_2[h]]^T. \quad (3)$$

镜 2 上单元 n (中心位置 $[X_n, Y_n]$) 处光场复振幅 $u_2[n]$ 等于镜 1 上所有单元 ($m = 1-g$) 对镜 2 上单元 n 作用的叠加, 可根据基尔霍夫-菲涅耳衍射公式(1)表示为

$$u_2[n] = \sum_{m=1}^g \frac{ik}{4\pi S_m} \iint_{S_m} u_1[m] \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho} \times (1 + \cos\alpha) dx dy, \quad (4)$$

式中, $\rho = \sqrt{(X_m - X_n)^2 + (Y_m - Y_n)^2 + L^2}$, L 为腔长, α 是镜 1 上单元 m 中心位置 (X_m, Y_m) 处的法线与 (X_m, Y_m) (X_n, Y_n) 之间连线的夹角. S_m 为单元 m 的面积分区, $u_1[m]$ 为单元 m 处的复振幅.

当划分数 g 足够大时, 则每个单元上复振幅起伏很小, 可假设每个单元上的复振幅为均匀分布, 此时 $u_1[m]$ 即可用单元 m 中心处的复振幅来表示. 这意味着: 在单元 m 的积分区域内, $u_1[m]$ 与积分变量 x, y 无关, 可从积分号内提出, 即可得到

$$u_2[n] = \sum_{m=1}^g u_1[m] \frac{ik}{4\pi S_m} \iint_{S_m} \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho} \times (1 + \cos\alpha) dx dy. \quad (5)$$

(5) 式也可表示为

$$u_2[n] = \sum_{m=1}^g A_{12}[n, m] u_1[m] \quad (m = 1, 2, \dots, g; n = 1, 2, \dots, h), \quad (6)$$

其中

$$A_{12}[n, m] = \frac{ik}{4\pi S_m} \iint_{S_m} \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho} (1 + \cos\alpha) dx dy. \quad (7)$$

在腔镜形状已知, 且单元划分已确定的情况下, 可以求得 $A_{12}[n, m]$ 的值. 因为方程中的 ρ 和 $\cos\alpha$ 被积变量只与单元 m, n 的几何位置有关, 因此一对 m 和 n 可唯一地确定一个 $A_{12}[n, m]$.

(6) 式也可写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} u_2[1] \\ u_2[2] \\ \vdots \\ u_2[h] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12}[1, 1] & A_{12}[1, 2] & \dots & A_{12}[1, g] \\ A_{12}[2, 1] & A_{12}[2, 2] & \dots & A_{12}[2, g] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{12}[h, 1] & A_{12}[h, 2] & \dots & A_{12}[h, g] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1[1] \\ u_1[2] \\ \vdots \\ u_1[g] \end{bmatrix}. \quad (8)$$

其简写形式为

$$U_2 = A_{12} U_1, \quad (9)$$

其中

$$A_{12} = \begin{bmatrix} A_{12}[1, 1] & A_{12}[1, 2] & \dots & A_{12}[1, g] \\ A_{12}[2, 1] & A_{12}[2, 2] & \dots & A_{12}[2, g] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{12}[h, 1] & A_{12}[h, 2] & \dots & A_{12}[h, g] \end{bmatrix}. \quad (10)$$

A_{12} 即为从镜 1 到镜 2 的传输矩阵.

同理, 从镜 2 到镜 1 的传输矩阵 A_{21} 也可用同样方法求得.

那么, 光波从镜 1 出发, 经过一个来回的传播后, 在镜 1 上所形成的光场可表示为

$$U'_1 = A_{21} U_2 = A_{21} A_{12} U_1 = A_1 U_1. \quad (11)$$

这里, $A_1 = A_{21} A_{12}$ 为一个来回光程的传输矩阵, 它仅与谐振腔的几何尺寸有关. A_1 为 $g \times g$ 维方阵.

根据谐振腔的自再现理论, 有

$$U'_1 = \gamma U_1, \quad (12)$$

式中 γ 为方程的本征值, 表示光场一个来回光程的振幅衰减和相位变化.

比较(11)和(12)式得特征矩阵方程

$$\gamma U_1 = A_1 U_1. \quad (13)$$

此方程本征值 γ 的求解过程就是传输矩阵 A_1 特征

值的求解过程. 而谐振腔镜 1 上多阶模式分布(由向量 U_1 表示)即为不同的特征值 γ 所对应的特征向量. 可见传输矩阵 A_1 包含了对腔内所有模式和光束特性的描述.

特征向量法的计算步骤可归纳如下:

(1) 将谐振腔镜进行划分: 如镜 1 划分为 $1, 2, 3, \dots, g$ 个单元, 镜 2 划分为 $1, 2, 3, \dots, h$ 个单元, 那么, 镜 1 和镜 2 上的光场分布 U_1, U_2 就分别离散为 (2) 和 (3) 式.

(2) 按 (7) 式计算 A_{12} ($h \times g$ 矩阵) 中的各个元素, A_{21} ($g \times h$ 矩阵) 中的所有元素可按同样方法求得, 然后再按公式 $A_1 = A_{21} \times A_{12}$ 求得传输矩阵 A_1 ($g \times g$ 矩阵).

(3) 求出传输矩阵 A_1 的特征值 γ (为复数), 也就求出了方程 (13) 的本征值, 特征值共有 g 个, 由腔镜划分确定.

(4) 将所求得的 g 个特征值按绝对值从大到小的顺序重新排序.

(5) 将排序后的特征值 γ_i ($i = 1, 2, 3, \dots, h$) 依次代入方程 (13), 即可求出每个特征值所对应的一系列复数特征向量 U_1 , 该列特征向量中的每个元素即对应了腔镜 1 上某一位置(在进行腔镜划分时就已明确确定)上的复数光场, 这样腔镜 1 上光场的强度和相位分布就可用三维绘图软件非常直观地显示出来, 其所对应的确定模式很容易识别出来.

(6) 重复过程 (5) 即可求出 g 列复数特征向量所对应的 g 个模式分布.

(7) 绝对值较大的特征值即对应于谐振腔内损耗较小、较可能存在的模式, 绝对值非常接近的特征值即表示其所对应的模式在谐振腔中可能同时存在. 因此, 分析采用特征向量法所求解出的模式特性, 很容易判断谐振腔的模式鉴别能力.

(8) 当求出腔镜上的光场分布后, 再采用特征向量法模拟光束传输, 很容易计算腔内或腔外任意地方的光场分布.

从求解过程可以看出: 当谐振腔的类型和几何参数一旦确定, 腔内可能存在的光场模式就可随之确定. 与传统方法(如 Fox-Li 法和 Prony 法)相比, 特征向量法的主要特点在于:

(1) A_1 的求解虽然在本方法中的计算量最大, 但却是一次性的, 一旦确定后, 在以后的计算过程中就不再变化.

(2) A_1 确定后, 无须上百次迭代, 可一次性直接

求出特征值组 γ , 它描述了腔内相应模式的单程相移和单程损耗. 一个特征值就可求出一列特征向量, 此列特征向量即为腔镜上一个确定模式光场的分布. 可见, 该方法一次计算就同时求出了一系列模式分布, 而所求得的模式数目直接对应于腔镜单元划分的数目, 并可根据各阶模式的损耗大小直接判断谐振腔的模式鉴别能力.

(3) 整个计算过程与光场初值的选取无关.

(4) 计算中没有对 ρ 采用傍轴近似, 因此可计算宽角衍射, 这对计算腔长很短的光腔尤其有利.

传统方法中对初值选取的高度依赖性(关系到是否收敛), 以及一组初值只能算出一个模式的缺点, 在特征向量法中从根本上得以避免. 如要求解相同数目的模式分布, 特征向量法比传统方法的计算量要小得多.

3. 圆形镜共焦腔的计算

为了验证特征向量法的实用性和有效性, 下面以经典圆形镜共焦腔作为算例, 所得结果见图 2、图 3 和表 1.

由于圆形镜共焦腔结构上完全对称, 为了方便起见, 只取其一半, 即仅对其等效半共焦腔进行计算, 结构参数为: 平面镜直径 $2a = 20$ mm, 圆形球面镜直径 30 mm, 球面曲率半径 $ROC = 10$ m, 等效腔长 $L = 5$ m, $\lambda = 10.6$ μm , 菲涅耳数 $N = \frac{a^2}{\lambda L} = 1.887$.

考虑到共焦腔的各阶光场模式沿圆周方向的分布较为平缓, 而沿半径方向的分布起伏较大, 在进行单元划分时, 将半径方向划分的数目取得稍大, 取半径方向和圆周方向的单元划分数目分别为 80 和 60. 表 1 为计算所得到的平面镜上绝对值较大的特征值及其所对应的模式, 图 2 为光场的振幅分布(横坐标为归一化半径, 纵坐标为归一化振幅), 图 3 为光场的相位分布. 从中可以看出:

(1) 模的单程损耗可以方便地由公式 $\delta_{pl} = 1 - |\gamma_{pl}|^2$ 求出. 因此, 特征向量法的计算结果可以很好地用来分析谐振腔的模式鉴别能力. 这是拉盖尔-高斯近似解析法所不能实现的.

(2) TEM_{00} 的损耗最小, 是腔内最有可能出现的模式.

(3) 然后, 依次是 TEM_{10} , TEM_{01} , TEM_{20} 和 TEM_{30} 等. 实际出现的模式将存在于这些损耗较小的模式

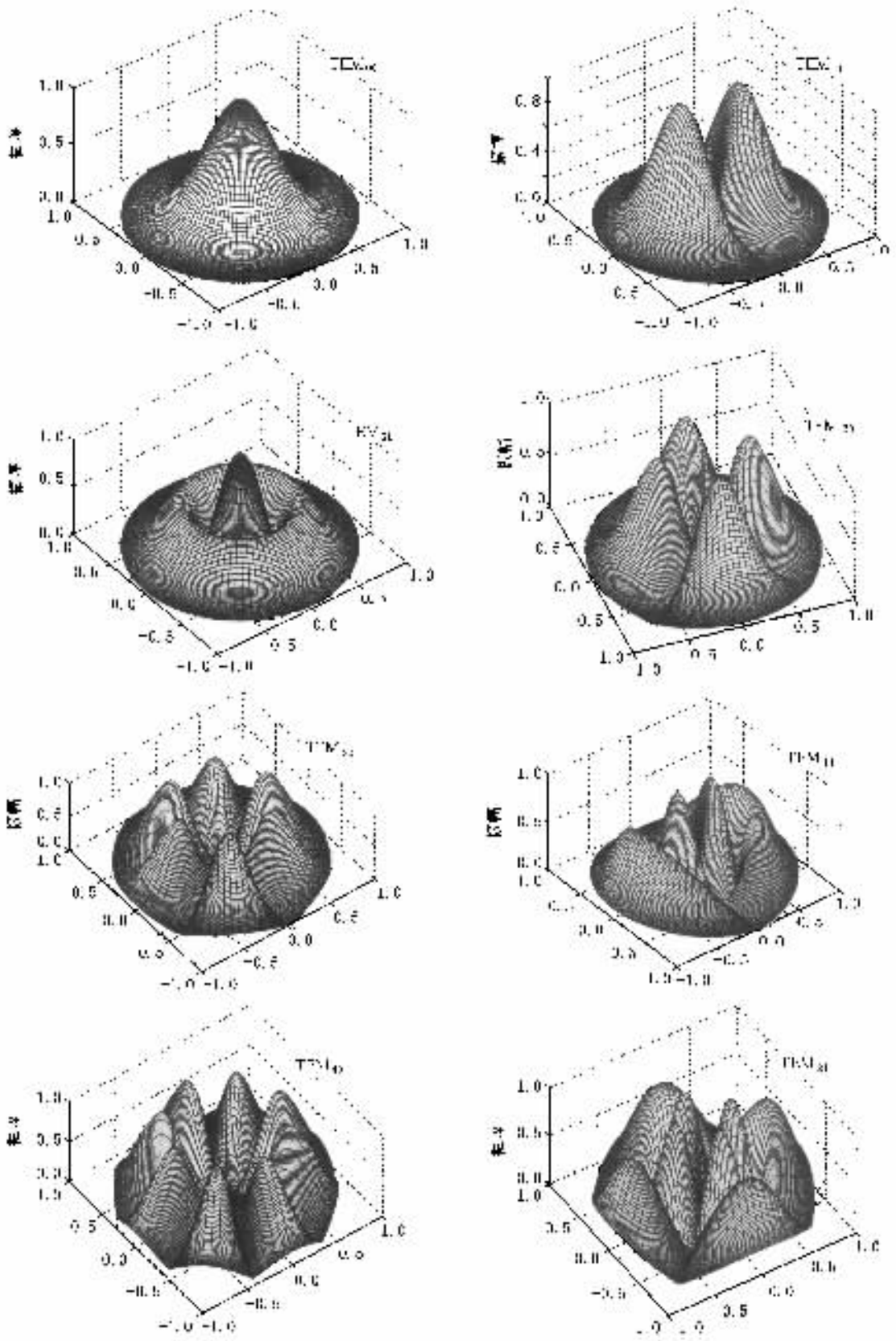


图2 几个典型的光场振幅分布

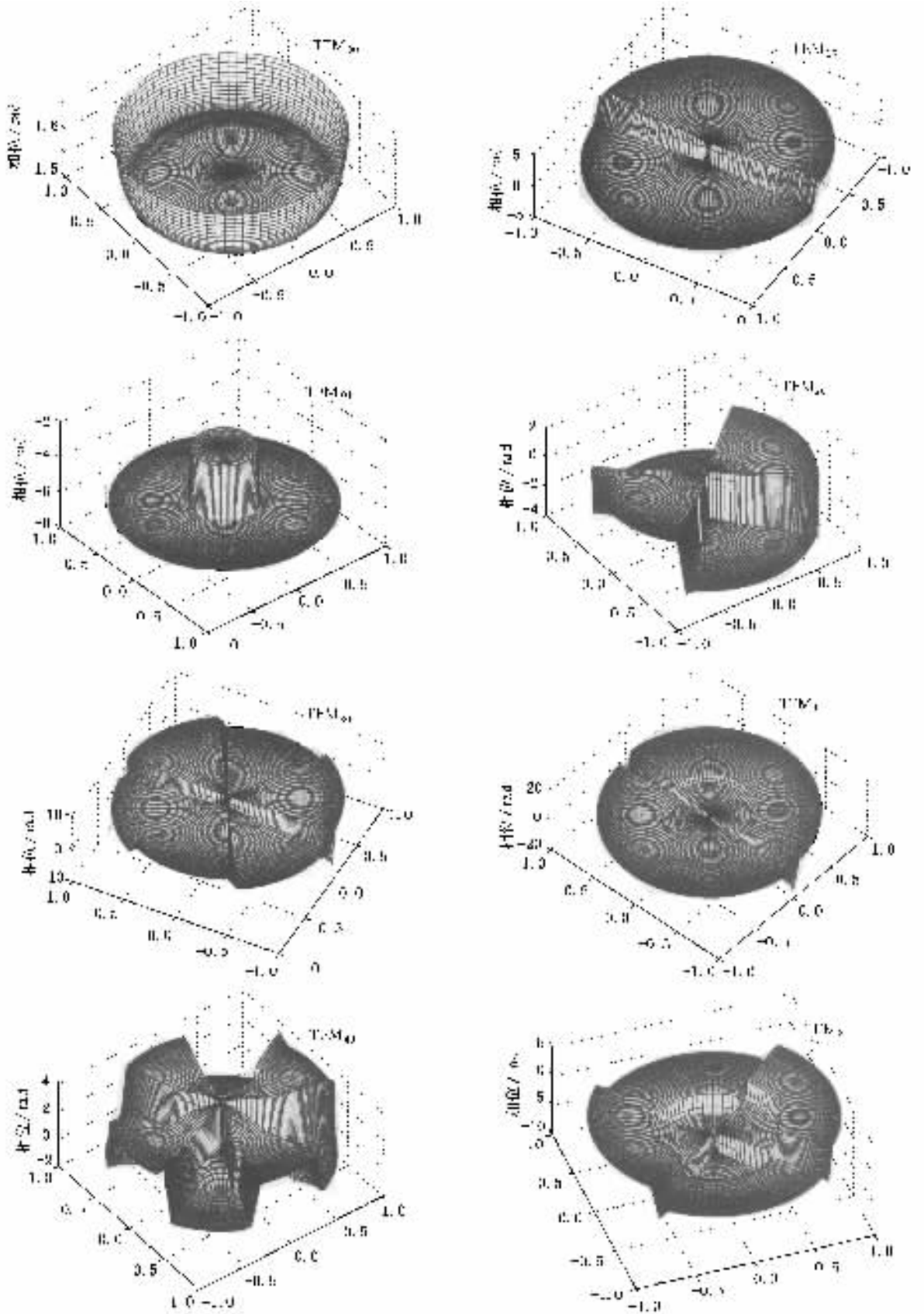


图 3 几个典型的光场相位分布

之中。

(4) 而特征值十分接近的模式将可能同时存在,如小菲涅耳数时的 TEM_{30} 和 TEM_{11} 。

(5) 分析特征值的相位可知,任意两个模式之间的相位差满足等式

$$\Delta\Phi = (\Delta p + 2 \cdot \Delta l) \frac{\pi}{2},$$

式中 p 为圆周方向上的节线, l 为半径方向上的节线。这与拉盖尔-高斯近似法所得到的解析结果或 Fox-Li 迭代法所得到的计算结果^[17]完全一致。这说明:虽然拉盖尔-高斯近似法只是在共焦腔的菲涅耳数 $N \gg 1$ 的条件下所得到的光场分布的解析结果,但其所反映的模式之间的相位关系,在小菲涅耳数的情况下也是适用的。

表 1 绝对值较大的特征值及其所对应的模式

| 特征值 γ | | 模式 |
|--------------|----------|------------|
| 绝对值 | 相位 | |
| 0.9996 | -0.14819 | TEM_{00} |
| 0.99695 | -1.719 | TEM_{10} |
| 0.99595 | 2.9935 | TEM_{01} |
| 0.99383 | 2.9934 | TEM_{20} |
| 0.98585 | 1.4227 | TEM_{30} |
| 0.98583 | 1.4228 | TEM_{11} |
| 0.9672 | -0.14689 | TEM_{40} |
| 0.95379 | -0.1455 | TEM_{21} |

(6) 分析特征值的相位可知,所有 $TEM_{p-2, l+1, q}$ 模都是简并的。

(7) 特征向量法完成一次计算所求得的模式数目是其他数值方法所无法比拟的。如在本例中,所求出的模式数达 4800 个(即为 80×60 单元划分数),每个模式都有确定的特征值和光场分布。这是 Fox-

Li 法很难达到的。当然,在实用中,通常只需参考前面 10—20 个模式就足以满足要求。

综上所述,特征向量法比拉盖尔-高斯函数近似解析法更具有普遍意义,后者只是在菲涅耳数 $N \gg 1$ 条件下共焦腔的近似描述,不能用来分析模式的损耗,即缺乏模式鉴别能力,但在特征向量法中均可以得到圆满解答。而且,特征向量法对圆形镜共焦腔的计算结果与已有共焦腔的解析或数值计算结果完全相符。这些均证明了特征向量法的合理性和有效性。

出于验证特征向量法有效性的目的,以上仅以共焦腔为算例进行了比较分析。事实上,特征向量法可用于任何结构谐振腔的模式计算或光束传输模拟,这将另文报道,不再赘述。

4. 结 论

本文根据 FEM 单元划分的思想,提出了一种新颖的模拟光腔模式及光束传输的特征向量法。该方法的关键之处在于基于衍射积分理论构造了一种新的光腔传输矩阵,通过求解特征矩阵方程可一次性得到谐振腔的一系列特征向量,每一列特征向量即代表了腔镜上光场的一个确定模式的振幅及相位分布。腔镜上的模式一旦确定,采用该方法进行光束传输模拟,就可求得谐振腔内或腔外任意地方的模式分布。该方法的特点主要在于:将传统方法中大量的迭代过程转化为本征矩阵方程特征向量的求解过程,计算过程与初值选择无关,而且可一次性求得多个模式分布,可方便判断谐振腔的模式鉴别能力。特征向量法对圆形镜共焦腔的计算结果与已有共焦腔的解析或数值计算结果完全相符,这些均表明特征向量法的合理性和有效性。

[1] Boyd G D, Kogelnik H 1962 *Bell Syst. Techn. J.* **41** 1347
 [2] Gorgon J P, Kogelnik H 1964 *Bell Syst. Techn. J.* **43** 2873
 [3] Flammer C 1957 *Spheroidal Wave Functions* (California: Stanford University Press)
 [4] Heurtley J C, Streifer W 1965 *J. Opt. Soc. Am.* **55** 1472
 [5] Fox A G, Li T Y 1961 *BSTJ* **40** 453
 [6] Siegman A E, Miller H Y 1970 *Appl. Opt.* **9** 2729
 [7] Sziklas E A, Siegman A E 1974 *Appl. Opt.* **13** 2275
 [8] Sziklas E A, Siegman A E 1975 *Appl. Opt.* **14** 1874

[9] Liu Z Y, Wu X Y, Fan D Y 1998 *Opt. Comm.* **155** 7
 [10] Helefert S F, Pregla R 2000 *Opt. Quant. Electron.* **23** 681
 [11] Lüsse P, Ramm K, Unger H G et al 1997 *Opt. Quant. Electron.* **29** 115
 [12] Stoffer R, Hoekstra H J W M 1998 *Opt. Quant. Electron.* **30** 375
 [13] Vassallo C 1997 *Opt. Quant. Electron.* **29** 95
 [14] Polychronopoulos S J, Athanasoulas G B, Uzunoglu N K 1997 *Opt. Quant. Electron.* **29** 127
 [15] Selleri S, Vincetti L, Cucinotta A et al 2001 *Opt. Quant. Electron.* **33** 359

[16] Manenkov A B Rozhnev A G 1998 *Opt. Quant. Electron.* **30** 31

Press)(in Chinese] 周炳琨等 1983 激光原理 (北京 : 国防工业

[17] Zhou B K *et al* 1983 *Theory of Lasers* (Beijing : Defense Industry

出版社)]

A novel eigenvector method for calculation of optical resonator modes and beam propagation

Cheng Yuan-Ying Wang You-Qing Hu Jin Li Jia-Rong

(*State Key Laboratory of Laser Technology ,Huazhong University of Science and Technology ,Wuhan 430074 ,China*)

(Received 29 August 2003 ; revised manuscript received 21 November 2003)

Abstract

In this paper , a novel eigenvector method (EM) for calculation of optical resonator modes and beam propagation is introduced , in which the new transit matrix of an optical resonator is obtained by dividing the mirror into finite grids based on Fresnel-Kirchhoff diffracted integral equation . Then , the eigenvectors of the transit matrix , representing the multi-mode characteristics of the resonator , can be calculated by solving the matrix eigen-equation . The field distributions inside or outside the resonator , resulting from the known eigenvectors on the resonator mirror , can be derived by EM . The merits of EM include that the considerably simpler procedure for solution of eigenvectors of the matrix eigen-equation replaces the complicated iteration in traditional methods , and there is no dependence on the initial field distribution , and a number of modes can be derived once and the discrimination capability of the resonator can be evaluated easily . The example of using EM to simulate the confocal resonator is given , and the calculated results , well matched with the Fox-Li method and Laguerre-Gaussian approximate analytical solution , prove that EM is highly effective and reasonable .

Keywords : laser resonator , eigenvector method , mode distribution

PACC : 4260D , 6180B , 0260