

# 向列液晶表面弹性能 $K_{13}$ 项的物理效应及检验方法<sup>\*</sup>

关荣华<sup>1)†</sup> 淮俊霞<sup>2)</sup> 刘建军<sup>2)‡</sup> 杨国琛<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> 华北电力大学应用物理系, 保定 071003)

<sup>2)</sup> 河北工业大学理学院, 天津 300130)

<sup>3)</sup> 河北师范大学物理学院, 石家庄 050016)

(2003 年 11 月 3 日收到, 2004 年 2 月 17 日收到修改稿)

通过解析推导和数值计算的方法, 得到了平衡态指向矢满足的微分方程和边界条件. 研究了表面弹性能  $K_{13}$  项对磁场作用下的弱锚定向列液晶盒 Fréedericksz 转变性质的影响. 结果表明, 表面弹性能  $K_{13}$  项的存在对液晶系统的自由能有很大的影响, 从而改变转变的性质, 诱导液晶盒在阈值点发生一级 Fréedericksz 转变. 给出了发生一级转变的物理条件, 它除了与液晶的结构和材料有关外, 还依赖于液晶表面弹性能  $K_{13}$  项, 同时给出了由此判断  $K_{13}$  项是否存在的检验方法.

关键词: 表面弹性能  $K_{13}$  项, 弱锚定, Fréedericksz 转变

PACC: 6130, 6470M

## 1. 引 言

液晶的 Frank 曲率弹性理论<sup>[1]</sup>一直用于研究液晶的静态问题, 并被大家公认为是唯象地处理液晶在外场作用下发生畸变问题的经典理论. 但近年来有文献指出, 从分子相互作用的观点出发, Frank 弹性自由能中, 还应包含表面弹性能  $K_{13}$  项<sup>[2]</sup>. 这一问题的提出, 引起了学术界的广泛关注. 目前, 对此问题存在着两种相互争议的理论: 一种是以 Pergamenschik 为代表的肯定理论<sup>[3-6]</sup>, 另一种是以 Faetti 为代表的否定理论<sup>[7-12]</sup>. Pergamenschik 等认为, 对于大形变, 高阶弹性项稳定了指向矢量场, 其作用可以看作是满足指向矢在边界处高阶导数要求的限制条件, 因而液晶的弹性自由能中必须加入含  $K_{13}$  的表面项, 它的存在与在液态 <sup>3</sup>He 的 B 相中引入的散度项同等重要<sup>[13]</sup>. 然而 Faetti 等指出: Pergamenschik 理论引出了作用于向列相液晶分子的各种力矩平衡的问题, 认为依赖于指向矢导数的展-弯曲表面项和稳定的高阶弹性项, 仅导致微观上接近边界的薄区内的液晶指向矢形变, 因此没有  $K_{13}$  项的 Frank 弹性理论才是正确的. 围绕液晶表面

弹性能  $K_{13}$  项是否存在已开展的这些研究工作, 由于理论研究中  $K_{13}$  的引入带来的数学问题, 以及实验上对  $K_{13}$  产生的明显物理效应的合理选择两方面的困难, 使得在允许的误差范围内一直无法给出此问题的确定答案.

仔细分析文献 [1—13] 的工作可知: Frank 弹性系数  $K_{11}$ ,  $K_{22}$ ,  $K_{33}$  等只有  $10^{-15}$  N 量级,  $K_{13}$  也应为这一量级, 因此强锚定液晶盒无法测知这一项是否存在, 只能用弱锚定液晶盒检测. 另外, 由于确定指向矢分布的方程和边界条件都是非线性的, 并且  $K_{13}$  是小量, 因此应当在允许精度内考虑同一量级的物理效应进行判定. 最近, 对液晶取向<sup>[14-18]</sup> 及弱锚定液晶盒的研究及讨论<sup>[19-22]</sup> 使我们得知, 在一定条件下可发生一级 Fréedericksz 转变, 这为我们提供了研究表面弹性能  $K_{13}$  项的新方法.

本文用解析推导和数值计算的方法, 在成功地解决弱锚定液晶盒引入表面弹性能  $K_{13}$  项所带来的数学困难的基础上, 得到了指向矢平衡态满足的微分方程和边界条件, 详细研究了表面弹性能  $K_{13}$  项对磁场作用下的弱锚定向列液晶盒产生的物理效应. 给出了产生此效应的物理条件及由此判断  $K_{13}$  项是否存在的检验方法.

<sup>\*</sup> 华北电力大学博士学位指导教师科研基金、河北省自然科学基金(批准号: A2004000140) 和河北省教育厅自然科学基金(批准号: 2003107) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: ronghua\_guan@sohu.com

## 2. 基本方程和边界条件

考虑图 1 所示厚度为  $l$  的弱锚定向列液晶盒, 两基板分别位于  $z=0$  和  $z=l$  处. 设上下基板的物理性质完全相同, 易取方向  $e$  相同且平行于基板沿  $x$  轴方向. 现将一垂直于基板的外磁场  $H$  作用于液晶盒. 外加磁场的方向垂直于液晶的初始排列方向, 其作用是使指向矢  $n$  转向与其相同的  $oz$  方向. 指向矢  $n$  的倾角为  $\theta$ ,  $\theta$  是  $z$  的函数, 记作  $\theta(z)$ .

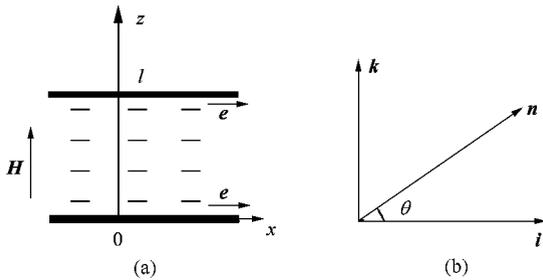


图 1 弱锚定向列液晶盒及其指向矢的描述 (a) 弱锚定向列液晶盒 (b) 指向矢描述

易取方向  $e$ 、指向矢  $n$  和磁场  $H$  可表示为

$$e = (1, 0, 0), \quad (1)$$

$$n = (\cos\theta, 0, \sin\theta), \quad (2)$$

$$H = (0, 0, H). \quad (3)$$

整个系统的自由能密度由弹性自由能密度  $f_{ev}$ 、弹性自由能面密度  $f_{es}$ 、磁场自由能体密度  $f_m$  及锚定能面密度  $g_s$  组成.

(1) 弹性自由能体密度  $f_{ev}$

$$\begin{aligned} f_{ev} &= \frac{1}{2} K_{11} (\nabla \cdot n)^2 + \frac{1}{2} K_{22} (n \cdot \nabla \times n)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} K_{33} (n \times \nabla \times n)^2 \\ &= \frac{1}{2} (K_{11} \cos^2 \theta + K_{33} \sin^2 \theta) \cdot \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2, \quad (4) \end{aligned}$$

式中  $K_{11}$ 、 $K_{33}$  为液晶展曲和弯曲弹性系数.

(2) 弹性自由能面密度  $f_{es}$

$$\begin{aligned} f_{es} &= \iint \{ K_{22} + K_{24} \} (n \cdot \nabla) n - n (\nabla \cdot n) \\ &\quad + K_{13} (n \nabla \cdot n) \cdot V \} ds. \end{aligned}$$

利用高斯定理, 上述的体积分可转化为面积分. 可以算出与  $K_{22}$ 、 $K_{24}$  有关的第一项积分结果为零, 于是, 上式的结果为

$$f_{es} = -K_{13} \cos\theta_0 \sin\theta_0 \left. \frac{d\theta}{dz} \right|_{z=0} \quad (z=0), \quad (5)$$

$$f_{es} = K_{13} \cos\theta_l \sin\theta_l \left. \frac{d\theta}{dz} \right|_{z=l} \quad (z=l), \quad (6)$$

式中  $\theta_0$  和  $\theta_l$  为  $z=0$  及  $z=l$  两基板处的  $\theta$  值,  $K_{13}$  即为所要讨论的表面弹性能项, 它与文献[4] Pergamenschchik 理论中的有效弹性系数等效.

(3) 磁场自由能体密度  $f_m$

$$f_m = -\frac{1}{2} \chi_a (H \cdot n)^2 = -\frac{1}{2} \chi_a H^2 \sin^2 \theta, \quad (7)$$

式中  $\chi_a$  为液晶材料的磁化率各向异性.

(4) 锚定能面密度  $g_s$

同文献[21, 22], 界面锚定能采用 RP 公式的一级修正式, 有

$$g_s^{(0)} = \frac{1}{2} A \sin^2 \theta_0 (1 + \zeta \sin^2 \theta_0) \quad (z=0), \quad (8)$$

$$g_s^{(l)} = \frac{1}{2} A \sin^2 \theta_l (1 + \zeta \sin^2 \theta_l) \quad (z=l). \quad (9)$$

由(4)–(9)式得到整个系统的自由能为

$$\begin{aligned} G &= S \int_0^l \left[ \frac{1}{2} (K_{11} \cos^2 \theta + K_{33} \sin^2 \theta) \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \chi_a H^2 \sin^2 \theta \right] dz \\ &\quad + \frac{1}{2} SA \sin^2 \theta_0 (1 + \zeta \sin^2 \theta_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} SA \sin^2 \theta_l (1 + \zeta \sin^2 \theta_l) \\ &\quad - SK_{13} \cos\theta_0 \sin\theta_0 \left. \frac{d\theta}{dz} \right|_{z=0} \\ &\quad + SK_{13} \cos\theta_l \sin\theta_l \left. \frac{d\theta}{dz} \right|_{z=l}. \quad (10) \end{aligned}$$

这里  $S$  是基板的面积. 在指向矢稳定分布态系统的自由能最小, 所以对(10)式求变分<sup>[23]</sup>并注意到系统的对称性, 可得到指向矢满足的平衡方程为

$$\begin{aligned} &(K_{11} \cos^2 \theta + K_{33} \sin^2 \theta) \frac{d^2 \theta}{dz^2} + \sin\theta \cos\theta (K_{33} - K_{11}) \\ &\times \left( \frac{d\theta}{dz} \right) + \chi_a H^2 \sin\theta \cos\theta = 0. \quad (11) \end{aligned}$$

边界条件为

$$\begin{aligned} &[(K_{11} + K_{13}) \cos^2 \theta_0 + (K_{33} - K_{13}) \sin^2 \theta_0] \left. \frac{d\theta}{dz} \right|_{z=0} \\ &= A \sin\theta_0 \cos\theta_0 (1 + 2\zeta \sin^2 \theta_0) \\ &\quad - \frac{1}{2} K_{13} \sin 2\theta_0 \left. \frac{d}{d\theta} \left( \frac{d\theta}{dz} \right) \right|_{z=0}. \quad (12) \end{aligned}$$

此边界条件与 Stallinga 等<sup>[24]</sup>根据力学平衡条件得到的边界条件相符, 并且满足文献[25]的要求.

方程 (11) 和 (12) 可用来完全确定表面弹性能  $K_{13}$  项存在时液晶平衡态指向矢倾角  $\theta$  的分布.

现在我们讨论方程 (11) 在边界条件 (12) 下的解, 以便研究表面弹性自由能  $K_{13}$  项的物理效应. 显然存在两个平庸解

$$\alpha(z) \equiv 0, \quad (13)$$

$$\alpha(z) \equiv \frac{\pi}{2}. \quad (14)$$

我们称它们分别为均匀解和饱和解, 它们均满足  $\frac{d\theta}{dz} = 0$ .

此外, 还存在第三个非平庸解, 它要求  $\frac{d\theta}{dz} \neq 0$ , 我们称之为畸变解.

为了能够具体求解出畸变解, 我们对方程 (11) 及方程 (12) 做如下处理:

由方程 (11) 可得

$$\frac{d}{dz} \left[ (K_{11} \cos^2 \theta + K_{33} \sin^2 \theta) \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 + \chi_a H^2 \sin^2 \theta \right] = 0, \quad (15)$$

即

$$\frac{d\theta}{dz} = \sqrt{\frac{\chi_a}{K_{11}} H \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta}{1 + \gamma \sin^2 \theta}}} \quad (0 \leq z \leq \frac{l}{2}), \quad (16)$$

式中  $\gamma = \frac{K_{33} - K_{11}}{k_{11}}$ ;  $\theta_m$  是液晶中间层  $z = l/2$  处指向矢  $n$  的倾角, 由液晶上下基板锚定的对称性可知, 在该处  $\theta$  达到最大值, 且满足  $\left. \frac{d\theta}{dz} \right|_{z=\frac{l}{2}} = 0$ .

由平衡态方程 (11) 转化得到的 (16) 式就是畸变解  $\theta$  满足的微分方程, 它反映了畸变态指向矢分布的空间变化率, 该方程可以进一步转化为积分方程,

$$H = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{K_{11}}{\chi_a}} \int_{\theta_0}^{\theta_m} \sqrt{\frac{1 + \gamma \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta}} d\theta. \quad (17)$$

由此得到第三个畸变解满足的平衡方程为 (16) 或 (17) 式 (一个是微分形式, 另一个是积分形式), 边界条件为 (12) 式. 利用这三个方程可具体求解畸变态指向矢分布.

以上诸方程是我们讨论表面弹性自由能  $K_{13}$  项物理效应的基本方程.

### 3. 表面弹性自由能 $K_{13}$ 项对阈值点 Fréedericksz 转变性质的影响

由第 2 节的讨论可知, 在边界条件 (12) 式下, 平

衡态方程 (11) 有三个解. 均匀解 (13) 式与指向矢保持初始空间排列的状态对应; 饱和解 (14) 式与指向矢全部沿外磁场方向排列的饱和状态对应; 满足方程 (16) 或 (17) 的解则对应着指向矢畸变的空间分布. 外场一定时, 液晶分子的实际排列由系统的自由能最小值对应的解决定. 因均匀解  $\alpha(z) \equiv 0$ , 饱和解  $\alpha(z) \equiv \frac{\pi}{2}$ , 所以与它们对应的自由能由 (10) 式可以方便地求出.

现在讨论畸变解, 为此需引入一个新的状态参量  $u$  和另一变量  $v$ , 令

$$u = \sin^2 \theta_m, \quad (18)$$

$$v = \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta_m}. \quad (19)$$

这里的  $u$  相当于 Frisken 和 Palfy-Muhoray 工作中引用的 Landau-de Gennes 理论中的序参量<sup>[26]</sup>. 现在再引入约化锚定强度  $\alpha$ , 约化自由能密度  $g$  及约化磁感应强度  $h$

$$\alpha = \frac{Al}{2K_{11}}, \quad (20)$$

$$g = \frac{lG}{2K_{11}S}, \quad (21)$$

$$h = \frac{H}{H_c^0}, \quad (22)$$

其中  $H_c^0 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{K_{11}}{\chi_a}}$  是强锚定无表面弹性能  $K_{13}$  项的 Frank 理论下阈值磁感应强度的计算公式. 利用以上诸式, 经繁杂的代换, 可得到畸变解满足的积分方程 (17), 边界条件 (12) 及三种解对应的自由能  $G_0, G_s, G_\theta$  用状态参量  $u$  表示的形式.

方程:

$$\frac{\pi}{2} h = I_1. \quad (23)$$

边界条件:

$$\begin{aligned} & I_1 \left( 1 + \frac{K_{13}^*}{1 + K_{13}^*} \frac{v_0}{1 - u + (1 + r_1)uw_0} \right) \\ & \times \left[ \frac{1}{1 - v_0} \frac{1 - I_3}{I_3} - \frac{ru(1 - u)}{1 - u + (1 + r)uw_0} \right] \\ & = \alpha \frac{1}{1 + K_{13}^*} \frac{1 - u + (1 + 2\zeta)uw_0}{1 - u + uw_0} \\ & \times \frac{\sqrt{1 - u + (1 + r)uw_0}}{1 - u + (1 + r_1)uw_0} \sqrt{\frac{v_0}{1 - v_0}}. \end{aligned} \quad (24)$$

自由能:

$$g_0 = 0, \quad (25)$$

$$g_s = - \left( \frac{\pi}{2} h \right)^2 + \alpha (1 + \zeta), \quad (26)$$

$$g_\theta = u \left\{ I_1^2 - 2I_1 I_2 - 2K_{13}^* \frac{1-u}{1-u+uw_0} \times \sqrt{\frac{v_0(1-v_0)}{1-u+(1+\gamma)uw_0}} I_1 + \alpha \frac{v_0[1-u+(1+\zeta)uw_0]}{(1-u+uw_0)^2} \right\}. \quad (27)$$

这里

$$I_1 = \int_{v_0}^1 \frac{1}{2\sqrt{v(1-v)}} \frac{\sqrt{1-u+(1+\gamma)uw}}{1-u+uw} dv \quad (28)$$

$$I_2 = \int_{v_0}^1 \frac{v}{2\sqrt{v(1-v)}} \frac{\sqrt{1-u+(1+\gamma)uw}}{(1-u+uw)^2} dv \quad (29)$$

$$I_3 = \int_{v_0}^1 \frac{1}{2\sqrt{v(1-v)}} \times \frac{(1-u+uw)[1-(1+\gamma)v] + 2\gamma v}{(1-u+uw)^2 \sqrt{1-u+(1+\gamma)uw}} dv, \quad (30)$$

$$\gamma_1 = \frac{K_{33} - K_{11} - 2K_{13}}{K_{11} + K_{33}}, \quad (31)$$

$$K_{13}^* = \frac{K_{13}}{K_{11}}. \quad (32)$$

$I_1, I_2$  及  $I_3$  都是  $u, v_0$  的函数, 而由(24)式可知,  $v_0$  是  $u$  的隐函数, 因此以上各方程实际上只有一个自变量  $u$ . 通过方程(23)~(27)并借助于(28)~(32)式, 可以具体讨论表面弹性能  $K_{13}$  项对阈值点 Fréedericksz 转变性质的影响.

对给定的  $u$ , 由(24)式通过(28)(30)(31)式可以求得  $v_0$ ; 将  $u, v_0$  代入(23)式可求得  $h$ , 代入(28)(29)式可得到  $I_1, I_2$ ; 然后由(27)式可得到  $g_\theta$ . 设在阈值点  $u$  的值为  $u_c$ , 则有

$$g_\theta(u_c) = 0. \quad (33)$$

$u_c$  可由(33)式确定. Fréedericksz 转变性质取决于  $u_c$  是否为零. 若  $u_c = 0$ , 则在阈值点的转变是二级转变, 若  $u_c \neq 0$  则为一级转变.

以液晶材料 MBBA 为例, 按以上分析过程进行数值计算. 其弹性系数  $K_{11} = 5.8 \times 10^{-12}$  N,  $K_{33}/K_{11} \approx 1.25$ ,  $K_{22}/K_{11} \approx 0.67^{[27]}$ ; 锚定强度  $A \approx 2 \times 10^{-7}$  J·m<sup>-2</sup><sup>[28]</sup>, 液晶盒厚度  $l = 5.8 \mu\text{m}^{[22]}$ , 且  $\zeta = 0.2$ . 我们研究  $K_{13}$  对 Fréedericksz 转变的影响, 所以选取不同  $K_{13}^*$  值作曲线进行比较. 经大量的计算, 可将结果归结为图 2 中四种典型的情况.

图 2 表明, 表面弹性能  $K_{13}$  项对约化自由能  $g_\theta$

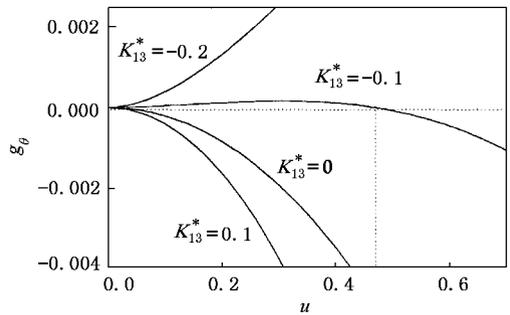


图 2 由不同的  $K_{13}^*$  值得出的约化畸变解自由能  $g_\theta$  和状态参数  $u$  的关系图

有很大的影响, 它导致  $g_\theta$  曲线有很大的差别. 这可以从  $g_\theta$  表示式中找到原因. (27) 式中除了  $I_1, I_2, v_0$  与  $K_{13}^*$  有关以外, 还有直接与  $K_{13}$  有关的项

$$- 2K_{13}^* \frac{1-u}{1-u+uw_0} \sqrt{\frac{v_0(1-v_0)}{1-u+(1+\gamma)uw_0}} I_1.$$

由于  $K_{13}$  项的存在, 引起自由能的这种变化, 将有可能导致 Fréedericksz 转变性质的变化. 从图 2 可见, 当  $K_{13}^* = 0$  及  $K_{13}^* = 0.1$  时, 相应的  $g_\theta-u$  曲线在  $u = 0$  处与横轴相切, 然后单调下降, 并且在  $0 < u < 1$  的范围内, 始终有  $g_\theta < g_u$ . 因此在  $u = u_c = 0$  处发生 Fréedericksz 转变, 这是二级转变. 而  $K_{13}^* = -0.1$  时,  $g_\theta-u$  曲线也在  $u = 0$  处与横轴相切, 但随着  $u$  的增大, 先是上升, 然后下降, 与横轴交于  $u_c = 0.46$  处, 只有  $u \geq u_c$ , 才有  $g_\theta \leq g_u$ , 因此在  $u = u_c = 0.46$  点发生从均匀解到畸变解的 Fréedericksz 转变, 这是一级转变. 再考察图 2 中  $K_{13}^* = -0.2$  的情况,  $g_\theta-u$  曲线也在  $u = 0$  处与横轴相切, 但当  $u > 0$ , 曲线单调上升, 始终有  $g_\theta > g_u$ , 因此不可能由均匀态转变为畸变态, 它将直接转变为饱和态, 这也是一级转变. 转变时的约化场强可由  $g_u = g_s$  求出. 由(25)和(26)式得

$$h = \frac{2}{\pi} \sqrt{\alpha(1+\zeta)}. \quad (34)$$

均匀态跳跃地转变为畸变态与均匀态直接转变为饱和态, 都是一级转变.

为了进一步了解表面弹性能  $K_{13}$  项对 Fréedericksz 转变性质的影响, 我们还做出了不同  $K_{13}^*$  取值时, 均匀解自由能  $g_0$ 、饱和解自由能  $g_s$  以及畸变解自由能  $g_\theta$  随状态参数  $u$  的变化曲线, 结果如图 3、图 4 及图 5 所示.

图 3 中畸变解自由能  $g_\theta$  在三个自由能中始终

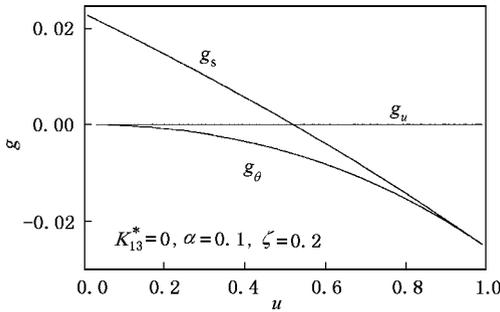


图3 自由能随状态参数  $u$  的变化曲线 所用参数为  $K_{13}^* = 0, \alpha = 0.1, \zeta = 0.2$

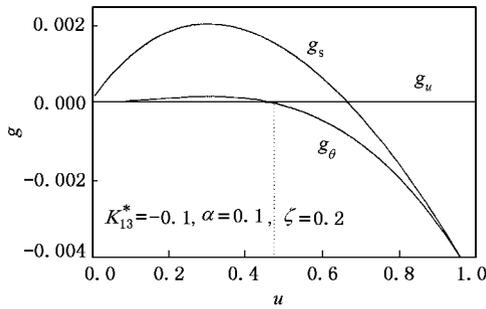


图4 自由能随状态参数  $u$  的变化曲线 所用参数为  $K_{13}^* = -0.1, \alpha = 0.1, \zeta = 0.2$

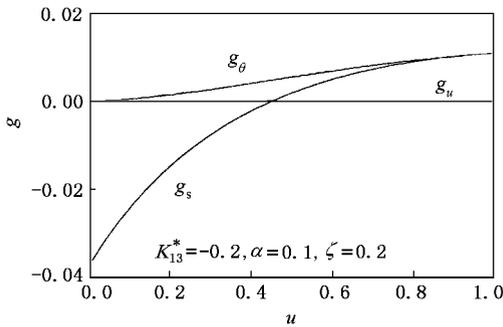


图5 自由能随状态参数  $u$  的变化曲线 所用参数为  $K_{13}^* = -0.2, \alpha = 0.1, \zeta = 0.2$

为最小,变化是连续的,故为二级转变;在图4中, $u$ 在  $0.00-0.46(u_c)$  的范围内均匀解  $g_u$  最小,但当  $u$  在  $0.46-1.00$  的范围内畸变解  $g_\theta$  为最小,在阈值点发生了不连续的跳变,故为一级 Fréedericksz 转变;图4中,三个自由能中  $g_s$  始终最小,所以在阈值点就直接达到饱和态,此转变也为 Fréedericksz 一级转变.这一结果与上述结论相符.

### 4. 一级 Fréedericksz 转变条件

从上述数值计算可以看到,表面弹性能  $K_{13}$  项对液晶系统的自由能有很大的影响,有可能导致一级 Fréedericksz 转变的发生,从而改变转变的性质.下面将讨论发生一级转变的物理条件,并给出由此条件判断  $K_{13}$  项是否存在的方法.

采用文献 [22] 的方法,把  $g_\theta$  对  $u$  作泰勒展开,

$$g_\theta = Au + Bu^2 + \alpha(u^3). \tag{35}$$

经复杂的计算得到

$$A = 0, \\ B = 2\alpha v_0^0 \left\{ \frac{1 + \gamma}{8} \left[ 2v_0^0 - \frac{(1 + 2K_{13}^* \chi(1 - v_0^0) + \alpha)}{(1 + 2K_{13}^* \chi(1 - v_0^0))} \right] - \zeta v_0^0 - \frac{\chi(1 + \gamma)K_{13}^*}{\chi(1 + 2K_{13}^*)} - \frac{(1 + \gamma)}{4(1 + 3K_{13}^*)} \right\} \times [(1 + 2K_{13}^* \chi(1 - v_0^0) + \alpha)] \tag{36}$$

式中  $v_0^0$  为  $u = 0$  时  $v_0$  的值.由上述分析可知,发生一级转变时要求  $g_\theta \geq 0$ ,因此得到一级转变条件为

$$B \geq 0. \tag{37}$$

由 (36) 和 (37) 式可以看出,液晶盒是否发生一级转变,决定于四个参量:  $\alpha, \zeta, \gamma$  和  $K_{13}^*$ .前三个参量决定于液晶盒的结构和材料的 Frank 弹性系数  $K_{11}, K_{33}$ , 最后一个参量决定于表面弹性项  $K_{13}$ .  $K_{13}$  值的正负及其绝对值对转变的性质将起重要的作用.我们由此可用来判断  $K_{13}$  是否为零.

下面用具体例子来说明判断  $K_{13}$  是否存在的方法.取  $\gamma = 0.25$  根据 (36) 和 (37) 式,在  $\alpha-\zeta$  图中,作出  $B = 0$  的曲线,如图6所示.这些曲线就是一级转变区和二级转变区的分界线.图6画出了相应于  $K_{13}^* = 0, K_{13}^* = 0.1, K_{13}^* = -0.1$  时的三条曲线.这三

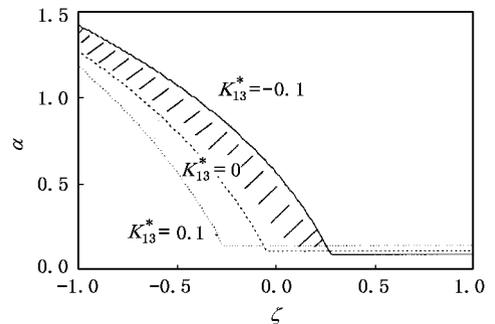


图6 取  $\gamma = 0.25$  时,由不同的  $K_{13}^*$  值得出的  $\alpha$  和  $\zeta$  关系图 各条曲线的上方是二级转变区,下方是一级转变区

条曲线不重合,因而一级转变区与二级转变区不重合.如图 6 中阴影部分,对于  $K_{13}^* = 0$  情形,属于二级转变区;对于  $K_{13}^* = -0.1$  情形,却属于一级转变区.即:在此区域内选取  $\alpha$  和  $\zeta$  值(例如  $\alpha = 1.0$ ,  $\zeta = -0.5$ ),如测得的是一级转变,则证明  $K_{13} \neq 0$ ;如测得的是二级转变,则证明  $K_{13}$  项不存在.

## 5. 结 论

本文在成功地解决了弱锚定液晶盒引入表面弹性能  $K_{13}$  项所带来数学上变分问题的基础上,通过

解析推导和数值计算的方法,得到了平衡态指向矢满足的微分方程和边界条件,详细研究了表面弹性能  $K_{13}$  项对磁场作用下的弱锚定向列液晶盒 Fréedericksz 转变性质的影响.结果表明,表面弹性能  $K_{13}$  项的存在对液晶系统的自由能有很大的影响,可诱导液晶盒在阈值点发生一级 Fréedericksz 转变,从而改变转变的性质.给出了发生一级转变的物理条件,它除了与液晶的结构和材料有关外,还依赖于液晶表面弹性能  $K_{13}$  项,文中同时给出了由此判断  $K_{13}$  项是否存在的检验方法.

- [ 1 ] Frank F C 1958 *Disc. Faraday Soc.* **25** 19
- [ 2 ] Nehring J, Saupe A 1971 *J. Chem. Phys.* **54** 337
- [ 3 ] Pergamenschik V M 1993 *Phys. Rev. E* **48** 1254
- [ 4 ] Pergamenschik V M, Žumer S 1999 *Phys. Rev. E* **59** 2531
- [ 5 ] Teixeira P I C, Pergamenschik V M, Sluckin T J 1993 *Mol. Phys.* **80** 1339
- [ 6 ] Lavrentovich O D, Pergamenschik V M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 979
- [ 7 ] Oldano C, Barbero G 1985 *Phys. Lett. A* **110** 213
- [ 8 ] Oldano C, Barbero G 1985 *J. Phys. Lett. (France)* **46** 451
- [ 9 ] Faetti S 1994 *Phys. Rev. E* **49** 4192
- [ 10 ] Faetti S 1994 *Phys. Rev. E* **49** 5332
- [ 11 ] Barbero G, Faetti S 1996 *Phys. Rev. E* **54** 5866
- [ 12 ] Faetti S 1993 *Liq. Cryst.* **15** 807
- [ 13 ] Anderson P W, Brinkman W F 1975 *The Helium Liquids* (New York: Academic)
- [ 14 ] Li J J, Wang Z K, Ling Z H *et al* 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1311 (in Chinese)[ 李建军、王宗凯、凌志华等 1998 物理学报 **47** 1311 ]
- [ 15 ] Xu Z D, Liu Y F, Xiang Y *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2283 (in Chinese)[ 徐则达、刘焰发、项颖等 1999 物理学报 **48** 2283 ]
- [ 16 ] Lü R B, Xu K S, Zhang S Y *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2289 (in Chinese)[ 吕瑞波、徐克书、张舒雁等 1999 物理学报 **48** 2289 ]
- [ 17 ] Liang Z Y, Yan S, Xuan L *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1114 (in Chinese)[ 梁兆颜、闫石、宣丽等 2000 物理学报 **49** 1114 ]
- [ 18 ] Wang Q, He S L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 926 (in Chinese)[ 王谦、何赛灵 2001 物理学报 **50** 926 ]
- [ 19 ] Guan R H, Yong G C 2003 *Chin. Phys.* **12** 1283
- [ 20 ] Zhang Z D, Yu H, Li L 2001 *Chin. Phys.* **10** 645
- [ 21 ] Yang G C, Zhang S H 2002 *Liq. Cryst.* **29** 641
- [ 22 ] Yang G C, Shi J R, Liang Y 2000 *Liq. Cryst.* **27** 875
- [ 23 ] Jeffreys H, Jeffreys B S 1950 *Methods of Mathematical Physics* (Cambridge: Cambridge University Press) p318
- [ 24 ] Stallinga S, van Haaren J A M M, van den Eerenbeemd J M A 1996 *Phys. Rev. E* **53** 1701
- [ 25 ] Pergamenschik V M 1998 *Phys. Rev. E* **58** 16
- [ 26 ] Frisken B J, Palfy-Muhoray P 1989 *Phys. Rev. A* **40** 6099
- [ 27 ] Jérôme B 1991 *Rep. Prog. Phys.* **54** 391
- [ 28 ] Marusiy T Y, Reznikov Y A, Reshetnyak V Y 1987 *Cryst. Liq. Cryst.* **152** 495

# Physical effects caused by surface elastic term $K_{13}$ on nematic-liquid-crystal cells and the detecting scheme about $K_{13}$ \*

Guan Rong-Hua<sup>1)</sup> Huai Jun-Xia<sup>2)</sup> Liu Jian-Jun<sup>2B)</sup> Yang Guo-Chen<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>( Department of Applied Physics , North China Electric Power University , Baoding 071003 , China )

<sup>2)</sup>( Institute of Physics , Hebei University of Technology , Tianjin 300130 , China )

<sup>3)</sup>( College of Physics , Hebei Normal University , Shijiazhuang 050016 , China )

( Received 3 November 2003 ; revised manuscript received 17 February 2004 )

## Abstract

Base on successful solution of the problems in judging whether the surface elastic term  $K_{13}$  of nematic liquid crystal exists or not , the equilibrium equation and boundary condition of the director have been obtained by the methods of analytical derivation and numerical calculation. The influence of the surface elastic energy term  $K_{13}$  on the properties of Fréedericksz transition of weak anchoring nematic liquid crystal cell under a magnetic field has been investigated in detail. The results show that the existence of  $K_{13}$  has influence on the free energy of the liquid crystal system so great as to change the property of the transition and induce a first-order Fréedericksz transition. The conditions for this transition are obtained. They depend on the surface elastic energy term  $K_{13}$  besides the structure and material of the system. The method of judging whether  $K_{13}$  term exists or not by Fréedericksz transition has been given.

**Keywords** : surface elastic energy term  $K_{13}$  , weak anchoring , Fréedericksz transition

**PACC** : 6130 , 6470M

\* Project supported by the Doctoral Foundation of North China Electric Power University , China , the Natural Science Foundation of Hebei Province , China ( Grant No. A2004000140 ) , and the Natural Science Foundation of Education Bureau of Hebei Province , China ( Grant No. 2003107 ).