第 53 卷 第 9 期 2004 年 9 月
1000-3290/2004/53(09)/2807-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.9, September, 2004

变质量单面完整约束系统的 Mei 对称性

李 红† 方建会

(石油大学应用物理系，东营 257061)

(2003 年 10 月 20 日收到；2003 年 12 月 24 日收到修改稿)

研究变质量单面完整约束系统的 Mei 对称性. 给出变质量单面完整约束系统 Mei 对称性的定义和判据，得到 Mei 对称性的结构方程和守恒量，并举例说明结果的应用.

关键词：变质量，单面完整约束，Mei 对称性，守恒量
PACC：0320

1. 引 言

对称性原理是物理学中更高层次的法则，用对称性理论来研究力学系统的守恒量是数学物理学科的一个近代发展方向，主要包括 Noether 对称性[1]，Lie 对称性[2] 和 Mei 对称性(又称形式不变性)[3]. Mei 对称性是最近梅凤翔教授提出一种新的对称性方法，它是利用动力学方程在无限小变换下的形式不变性寻求系统的守恒量. 文献[4—14]研究了双面约束力学系统的 Mei 对称性. 实际上，单面约束系统更为普遍，研究起来也更为困难. 本文研究变质量单面完整约束系统的 Mei 对称性和守恒量，给出系统 Mei 对称性的定义和判据，得到 Mei 对称性的结构方程和守恒量形式，并举例说明结果的应用.

2 系统的运动微分方程

研究 N 个质点组成的力学系统，在 t 时刻第 i 个质点的质量为 $m_i(i=1,\cdots,N)$，在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻由质点分离(或并入)的微粒的质量为 $\mathrm{d}m_i$. 设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 确定，m_i 是 t，$\boldsymbol{q}$，$\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数，即

$$m_i = m_i(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \qquad (i=1,\cdots,N), \tag{1}$$

系统的运动受有 g 个理想单面完整约束

$$f_\alpha(t,\boldsymbol{q}) \geqslant 0, \qquad (\alpha=1,\cdots,g), \tag{2}$$

则系统的运动微分方程可表为[15]

$$E_s(L) = Q_s'' + P_s + \sum_{\alpha=1}^{g}\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_s} \qquad (s=1,\cdots,n),$$
$$\lambda_\alpha \geqslant 0,\ \lambda_\alpha f_\alpha = 0, \qquad (\alpha=1,\cdots,g), \tag{3}$$

其中

$$E_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s} \tag{4}$$

为 Euler 算子，L 为系统的 Lagrange 函数，Q_s'' 为非势广义力，λ_α 为约束乘子，

$$P_s = \sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i(\boldsymbol{u}_i+\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial q_s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s} \tag{5}$$

为广义反推力，$\boldsymbol{r}_i$，$\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 分别为第 i 个质点的位矢和速度，$\boldsymbol{u}_i$ 为微粒 $\mathrm{d}m_i$ 相对于 m_i 的速度. 在一般情况下 P_s 对 $\ddot{q}$ 是线性的，记作[16]

$$P_s = \sum_{k=1}^{n}W_{sk}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\ddot{q}_k + W_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s=1,\cdots,n). \tag{6}$$

若系统处于约束上，即约束(2)取等号，可将 λ_α 表为 t，$\boldsymbol{q}$，$\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数，方程(3)成为

$$E_s(L) = Q_s'' + P_s + \Lambda_s, \tag{7}$$

其中广义约束反力 $\Lambda_s = \Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \sum_{\alpha=1}^{g}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_s}$.

若系统脱离约束，即约束(2)中不等号严格成立，则方程(3)成为

† E-mail：dayang@mail.edu.cn

$$E_s(L)=Q_s''+P_s. \tag{8}$$

3. 系统的 Mei 对称性

取无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{9}$$

其中 ε 为小参数,ξ_0,ξ_s 为无限小单参数群变换的生成元. 在无限小变换(9)下

$$L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$Q_s''=Q_s''(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$P_s=P_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}),$$
$$\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$f_\alpha=f_\alpha(t,\boldsymbol{q})$$

变为

$$L^*=L\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right),$$
$$Q_s''^*=Q_s''\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right),$$
$$P_s^*=P_s\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*},\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^{*2}}\right),$$
$$\Lambda_s^*=\Lambda_s\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right),$$
$$f_\alpha^*=f_\alpha(t^*,\boldsymbol{q}^*).$$

定义 在无限小变换(9)下,若方程(7),(8)的形式保持不变,即

当 $f_\alpha=0$ 时,

$$E_s(L^*)=Q_s''^*+P_s^*+\Lambda_s^*,(s=1,\cdots,n), \tag{10a}$$

$$f_\alpha^*=f_\alpha(t^*,\boldsymbol{q}^*)=0,\quad(\alpha=1,\cdots,g). \tag{10b}$$

当 $f_\alpha>0$ 时,

$$E(L^*)=Q_s''^*+P_s^*,\quad(s=1,\cdots,n). \tag{11}$$

则称这种不变性为变质量单面完整约束系统的 Mei 对称性.

引入无限小变换生成元向量

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{s=1}^n\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{12}$$

其一次扩展

$$X^{(1)}=X^{(0)}+\sum_{s=1}^n(\dot\xi_s-\dot q_s\dot\xi_0)\frac{\partial}{\partial\dot q_s}, \tag{13}$$

二次扩展

$$X^{(2)}=X^{(1)}+\sum_{s=1}^n((\dot\xi_s-\dot q_s\dot\xi_0)^{\cdot}-\ddot q_s\dot\xi_0)\frac{\partial}{\partial\ddot q_s}. \tag{14}$$

将 $L^*,Q_s''^*,P_s^*,\Lambda_s^*,f_\alpha^*$ 在无限小变换(9)下展开得

$$L^*=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon(X^{(1)}(L))+O(\varepsilon^2), \tag{15}$$
$$Q_s''^*=Q_s''(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon(X^{(1)}(Q_s''))+O(\varepsilon^2), \tag{16}$$
$$P_s^*=P_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon(X^{(2)}(P_s))+O(\varepsilon^2), \tag{17}$$
$$\Lambda_s^*=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon(X^{(1)}(\Lambda_s))+O(\varepsilon^2), \tag{18}$$
$$f_\alpha^*=f_\alpha(t,\boldsymbol{q})+\varepsilon(X^{(0)}(f_\alpha))+O(\varepsilon^2), \tag{19}$$

由(6)式知

$$X^{(2)}(P_s)=\sum_{k=1}^n X^{(1)}(W_{sk})\ddot q_k+\sum_{k=1}^n(\ddot\xi_k-2\ddot q_k\dot\xi_0-\dot q_k\ddot\xi_0)W_{sk}+X^{(1)}(W_s). \tag{20}$$

判据 对变质量单面完整约束系统(7),(8),若无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_s 满足

1)系统处于约束上

$$E_s(X^{(1)}(L))-X^{(1)}(Q_s''+\Lambda_s)-X^{(2)}(P_s)=0, \tag{21}$$

$$X^{(0)}(f_\alpha(t,\boldsymbol{q}))=0. \tag{22}$$

2)系统脱离约束

$$E_s(X^{(1)}(L))-X^{(1)}(Q_s'')-X^{(2)}(P_s)=0, \tag{23}$$

则相应的不变性是系统的 Mei 对称性.

证明 将 E_s 作用于(15)式,去掉 ε^2 及其更高阶小项,得

$$E_s(L^*)=E_s(L)+\varepsilon E_s(X^{(1)}(L)), \tag{24}$$

将(7)和(10a)式代入上式,得

$$Q_s''^*+P_s^*+\Lambda_s^*=Q_s''+P_s+\Lambda_s+\varepsilon E_s(X^{(1)}(L)). \tag{25}$$

将(16)—(18)式代入(25)式,便可证得(21)式. (23)式的证明与上类似. 当系统处于约束上时,$f_\alpha(t,\boldsymbol{q})=0$,注意到(10b)和(19)式,可证得(22)式.

4 结构方程与守恒量

变质量单面完整约束系统的 Mei 对称性在一定条件下可导致守恒量.

定理　在无限小变换(9)下,若变质量单面完整约束系统(7),(8)是 Mei 对称性的,且存在规范函数 $G_F = G_F(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程.

1) 系统处于约束上

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + \sum_{s=1}^{n}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) \times (Q_s'' + P_s + \Lambda_s) + \dot{G}_F = 0, \tag{26}$$

2)系统脱离约束

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + \sum_{s=1}^{n}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) \times (Q_s'' + P_s) + \dot{G}_F = 0, \tag{27}$$

则系统存在如下守恒量

$$I = L\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_F = \text{const}. \tag{28}$$

证明　对(28)式求导,得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \dot{L}\xi_0 + L\dot{\xi}_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0 - \ddot{q}_s\xi_0) + \dot{G}_F, \tag{29}$$

若系统处于约束上,由方程(7)和结构方程(26),得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s - X^{(0)}(L) = 0, \tag{30}$$

若系统脱离约束,由方程(8)和结构方程(27),得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s - X^{(0)}(L) = 0, \tag{31}$$

则(28)式得证.

5. 算　例

一变质量质点的质量为 $m(t) = m_0(1 - t)$(m_0 为常数),微粒分离质点的相对速度为

$$\boldsymbol{u} = -\dot{\boldsymbol{r}} = -\dot{q}_1\boldsymbol{i} - \dot{q}_2\boldsymbol{j}, \tag{32}$$

质点受有单面完整约束

$$f = q_2 - q_1 \geqslant 0, \tag{33}$$

系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - mgq_2, \tag{34}$$

非势力不存在. 试研究系统的 Mei 对称性.

由(5)式知,$P_1 = P_2 = 0$. 则系统的运动微分方程为

$$m\ddot{q}_1 - m_0\dot{q}_1 = -\lambda,$$
$$m\ddot{q}_2 - m_0\dot{q}_2 + mg = \lambda. \tag{35}$$

若系统处于约束上

$$f = q_2 - q_1 = 0, \tag{36}$$

由(35)和(36)式,得

$$\lambda = \frac{mg}{2}, \tag{37}$$

则其约束反力

$$\Lambda_1 = -\frac{mg}{2}, \quad \Lambda_2 = \frac{mg}{2}. \tag{38}$$

取

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 1, \tag{39}$$

则有

$$E_s(X^{(1)}(L)) = 0, \quad X^{(1)}(\Lambda_s) = 0. \tag{40}$$

可见(21)—(23)式满足,因此该变换是系统的 Mei 对称性变换.

对生成元(39),由(26),(27)式可求得

$$G_F = mgt + \frac{1}{2}m_0gt^2, \tag{41}$$

由(28)式可得系统 Mei 对称性导致的守恒量

$$I = m_0(1 - t)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + gt) + \frac{1}{2}m_0gt^2 = \text{const}. \tag{42}$$

[1] Noether A E 1918 *Math*. *Phys*. KI II 235

[2] Lutzky M 1979 *J*. *Phys*. *A*:*Math*. *Gen*. **12** 973

[3] Mei F X 2000 *J*. *Beijing Inst*. *Technol*. **9** 120

[4] Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 177

[5] Wang S Y and Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 373

[6] Wang S Y and Mei F X 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 5

[7] Li R J, Qiao Y F and Meng J 2002 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **51** 1 (in Chinese) [李仁杰、乔永芬、孟军 2001 物理学报 **51** 1]

[8] Luo S K 2002 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[9] Ge W K 2002 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **51** 939 (in Chinese) [葛伟宽 2002 物理学报 **51** 939]

[10] Fang J H, Xue Q Z and Zhao S Q 2002 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **51** 2183 (in Chinese) [方建会、薛庆忠、赵嵩卿 2002 物理学报 **51** 2183]

[11] Chen P S and Fang J H 2003 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **52** 1044 (in Chinese) [陈培胜、方建会 2003 物理学报 **52** 1044]

[12] Qiao Y F, Zhang Y L and Han G C 2003 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **52** 1051 (in Chinese) [乔永芬、张耀良、韩广才 2003 物理学报 **52** 1051]

[13] Ge W K and Zhang Y 2003 *Acta. Phys. Sin.* **52** 2105 (in Chinese) [葛伟宽、张毅 2003 物理学报 **52** 2105]

[14] Zhang Y and Mei F X 2003 *Chin. Phys.* **12** 1058

[15] Mei F X 1990 *J. Beijing Inst. Technol.* **10** 1 (in Chinese) [梅凤翔 1990 北京理工大学学报 **10** 1]

[16] Wang S Y and Mei F X 2002 *Jiangxi Sci.* **20** 63 (in Chinese) [王树勇、梅凤翔 2002 江西科学 **20** 63]

Mei symmetry of variable mass systems with unilateral holonomic constraints

Li Hong Fang Jian-Hui

(*Department of Applied Physics*, *University of Petroleum*, *Dongying* 257061, *China*)

(Received 20 October 2003; revised manuscript received 24 December 2003)

Abstract

In this paper, the Mei symmetry of variable mass systems with unilateral holonomic constraints is studied. The definition and criterion of the Mei symmetry of variable mass systems with unilateral holonomic constraints are given. The structure equation and conserved quantity of the Mei symmetry are obtained. An example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: variable mass, unilateral holonomic constraints, Mei symmetry, conserved quantity

PACC: 0320