第 53 卷 第 9 期 2004 年 9 月
1000-3290/2004/53(09)/2816-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.9, September, 2004

非完整约束奇异广义力学系统的 Poincaré-Cartan 积分

李爱民 张 莹 李子平

(北京工业大学数理学院, 北京 100022)

(2003 年 8 月 22 日收到; 2003 年 12 月 9 日收到修改稿)

对受高阶微商非完整约束并用奇异 Lagrange 量描述的广义力学系统,基于广义 Apell-Четаев 约束条件,并考虑到系统的内在约束,导出了该非完整约束奇异广义力学系统的广义 Poincaré-Cartan 积分不变量. 并证明了该不变量与非完整约束奇异广义力学系统的广义正则方程等价.

关键词: 广义力学系统, 非完整约束, 奇异 Lagrange 量, Poincaré-Cartan 积分

PACC: 0320, 1110

1. 引 言

Poincaré-Cartan 积分不变量在经典力学和场论中有很重要的地位,它可以作为动力学系统的基本原理. 对正规 Lagrange 量描述的系统,该不变量与系统的正则方程等价[1,2]. 对于用奇异 Lagrange 量描述的系统[3,4], Benavent 等人已给出该系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量[5,6], Sugano 等人讨论了该不变量在杨-Mills 场论等方面的应用[7,8]. Poincaré-Cartan 积分不变量也推广到了一阶微商非完整约束系统[9,10] (包括正规 Lagrange 量, 奇异 Lagrange 量描述的系统), 对高阶微商 Lagrange 量(包括正规 Lagrange 量, 奇异 Lagrange 量)描述的广义力学系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量也有讨论[11,12]. 这里将进一步研究受附加的高阶微商非完整约束奇异 Lagrange 量广义力学系统 Poincaré-Cartan 积分不变量.

本文基于高阶微商外在约束的 Apell-Четаев 条件,从奇异 Lagrange 量广义力学系统的正则形式的作用量出发,导出了用高阶微商奇异 Lagrange 量描述的并受外在非完整约束的广义力学系统(称约束奇异广义力学系统)的广义 Poincaré-Cartan 积分不变量,证明了该不变量与受约束奇异广义力学系统的广义正则方程等价.

2. 非完整约束奇异广义力学系统的广义 Poincaré-Cartan 积分不变量

广义力学系统的 Lagrange 量含广义坐标对时间的高阶微商,记系统的 Lagrange 量为

$$L = L(t; q^i_{(0)}(t), q^i_{(1)}(t), \cdots, q^i_{(N)}(t)),$$

其中 $q^i_{(s)} = \dfrac{d^s}{dt^s}q^i = D^s q^i \quad \left(D = \dfrac{d}{dt}, i = 1,2,\cdots,n\right)$.

设系统的运动受高阶非完整外在约束的限制,其约束条件为

$$G_W(t; q^i_{(0)}(t), q^i_{(1)}(t), \cdots, q^i_{(M)}(t)) = 0,$$

$$(W = 1,2,\cdots,l; M \leqslant N), \tag{1}$$

用 Ostrogradsky 变换引入广义正则动量[13]

$$p_i^{(N-1)} = \frac{\partial L}{\partial q^i_{(N)}}, \tag{2a}$$

$$p_i^{(s-1)} = \frac{\partial L}{\partial q^i_{(s)}} - \dot{p}_i^{(s)} \qquad (s = 1,2,\cdots,N-1), \tag{2b}$$

系统的广义正则 Hamilton 量为[13]

$$H_C = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{N-1} p_i^{(s)} q^i_{(s+1)} - L(t_i; q^i_{(s)}, \cdots, q^i_{(s)})$$

$$= p_i^{(s)} q^i_{(s+1)} - L(t_i; q^i_{(s)}, \cdots, q^i_{(N)}). \tag{3}$$

重复指标代表求和. 对高阶微商奇异 Lagrange 系统,广义 Hess 矩阵 $[\partial^2 L/\partial q^i_{(N)}\partial q^j_{(N)}]$ 退化,由(2a)式不能解出所有 $q^i_{(N)}$,表明该系统在相空间存在固有(内在)约束. 设决定系统运动方程的内在约束记为

$$\phi_a(t; q^i_{(s)}, p_i^{(s)}) = 0 \quad (a = 1,2,\cdots,k). \tag{4}$$

这里假设外在非完整约束为 $G_W=0(W=1,2,\cdots,l)$ 和内在约束 $\phi_a=0(a=1,2,\cdots,k)$ 是相容的. 受外在非完整约束奇异 Lagrange 量广义力学系统的广义正则方程为[12]

$$\dot{q}^i_{(s)}=\frac{\partial H_C}{\partial p_i^{(s)}}+\mu^a\frac{\partial\phi_a}{\partial p_i^{(s)}}\quad(i=1,2,3,\cdots,n;\ s=0,1,2,3,\cdots,N-1),\tag{5a}$$

$$\dot{p}_i^{(s)}=-\frac{\partial H_C}{\partial q^i_{(s)}}-\mu^a\frac{\partial\phi_a}{\partial q^i_{(s)}}\quad(i=1,2,3,\cdots,n;\ s=1,2,3,\cdots,N-1;s\neq M-1),\tag{5b}$$

$$\dot{p}_i^{(M-1)}=-\frac{\partial H_C}{\partial q^i_{(M-1)}}-\mu^a\frac{\partial\phi_a}{\partial q^i_{(M-1)}}-\lambda^W\frac{\partial G_W}{\partial q^i_{(M)}}\quad(i=1,2,3,\cdots,n;M\leqslant N).\tag{5c}$$

取增广相空间中的无穷小变换

$$\begin{aligned}&t'=t+\Delta t(\theta),\\&q^{i'}_{(s)}(t')=q^i_{(s)}(t)+\Delta q^i_{(s)}(t,\theta),\\&p_i^{(s)'}(t')=p_i^{(s)}(t)+\Delta p_i^{(s)}(t,\theta),\end{aligned}\tag{6}$$

其中 θ 为任意参数,它满足

$$q^{i'}_{(s)}(t,0)=q^i_{(s)}(t),\ p_i^{(s)'}(t,0)=p_i^{(s)}(t).\tag{7}$$

假设外在非完整约束(1)式在(6)式所确定的 M 阶速度空间中等时变分下适合广义 Apell-Четаев 条件[15]

$$\delta G_W=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial G_W}{\partial q^i_{(M)}}\delta q^i_{(M-1)}=0\quad(W=1,2,\cdots,l;M\leqslant N),\tag{8}$$

其中 $\delta q^i_{(M)}$ 为(6)式所确定的等时变分. 又假定内在约束条件(4)在(6)式所确定的总变分下不变,即

$$\Delta\phi_a=\frac{\partial\phi_a}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial\phi_a}{\partial q^i_{(s)}}\Delta q^i_{(s)}+\frac{\partial\phi_a}{\partial p_i^{(s)}}\Delta p_i^{(s)}=0.\tag{9}$$

根据总变分与等时变分的关系[11]以及约束 ϕ_a 自洽性条件可以推得[14]

$$\delta\phi_a=\frac{\partial\phi_a}{\partial q^i_{(s)}}\delta q^i_{(s)}+\frac{\partial\phi_a}{\partial p_i^{(s)}}\delta p_i^{(s)}=0,\tag{10}$$

式中 $\delta q^i_{(s)}$ 和 $\delta p_i^{(s)}$ 为等时变分.

正则作用量 $I^p=\int_{t_1}^{t_2}(p_i^{(s)}q^i_{(s+1)}-H_C)\,\mathrm{d}t$ 在(6)式变换下有[10]

$$\begin{aligned}\Delta I^P&=I^{P'}(\theta)\Delta\theta\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\dot{q}^i_{(s)}-\frac{\partial H_C}{\partial p_i^{(s)}}\right)\delta p_i^{(s)}+\left(-\dot{p}_i^{(s)}-\frac{\partial H_C}{\partial q^i_{(s)}}\right)\delta q^i_{(s)}+\mathrm{D}[p_i^{(s)}\delta q^i_{(s)}+(p_i^{(s)}q^i_{(s+1)}-H_C)\Delta t]\right\}\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{11}$$

用 $\lambda^W(t)$ 乘(8)式、$\mu^a(t)$ 乘(10)式并求和,结合(11)式有

$$\begin{aligned}\Delta I^P&=I^{P'}(\theta)\Delta\theta\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\dot{q}^i_{(s)}-\frac{\partial H_C}{\partial p_i^{(s)}}-\mu^a(t)\frac{\partial\phi_a}{\partial p_i^{(s)}}\right)\delta p_i^{(s)}\right.\\&\quad+\left(-\dot{p}_i^{(s)}-\frac{\partial H_C}{\partial q^i_{(s)}}-\mu^a(t)\frac{\partial\phi_a}{\partial q^i_{(s)}}-\lambda^W\frac{\partial G_W}{\partial q^i_{(s)}}\right)\delta q^i_{(s)}+\left(-\dot{p}_i^{(M-1)}-\frac{\partial H_C}{\partial q^i_{(M-1)}}\right.\\&\quad\left.-\mu^a(t)\frac{\partial\phi_a}{\partial q^i_{(M-1)}}-\lambda^W\frac{\partial G_W}{\partial q^i_{(M)}}\right)\delta q^i_{(M-1)}\\&\quad\left.+\mathrm{D}[p_i^{(s)}\delta q^i_{(s)}+(p_i^{(s)}q^i_{(s+1)}-H_C)]\Delta t\right\}\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{12}$$

上式中第二项对 $\delta q^i_{(s)}$ 乘积求和中不含 $s=M-1$ 的项. 利用系统的广义正则运动方程(5),即沿着约束系统运动的轨线,得

$$\begin{aligned}\Delta I^P&=I^{P'}(\theta)\Delta\theta\\&=[p_i^{(s)}\delta q^i_{(s)}+(p_i^{(s)}q^i_{(s+1)}-H_C)\Delta t]_1^2\\&=[p_i^{(s)}\Delta q^i_{(s)}-H_C\Delta t]_1^2,\end{aligned}\tag{13}$$

式中

$$[p_i^{(s)}\Delta q^i_{(s)}-H_C\Delta t]_1^2\equiv[p_i^{(s)}\Delta q^i_{(s)}-H_C\Delta t]_{t=t_2}-[p_i^{(s)}\Delta q^i_{(s)}-H_C\Delta t]_{t=t_1}.\tag{14}$$

在 $t,q^i_{(s)},p_i^{(s)}$ 所张成的增广相空间由约束确定的子空间 Γ_p 中,取一条满足所有约束条件的任意闭曲线 C_1,该曲线以 θ 为参数来描述,并设闭曲线 C_1 的方程为

$$t=t_1(\theta),\ q^i_{(s)}=q^i_{(s)1}(\theta),\ p_i^{(s)}=p_{i1}^{(s)}(\theta),\tag{15}$$

式中 $\theta=0$ 和 $\theta=l$ 代表曲线 C_1 上同一点. 过 C_1 上任一点存在一条系统的运动"轨线",过 C_1 上每一点的运动"轨线"构成"轨线管",即

$$q^i_{(s)}=q^i_{(s)1}(t,\theta),\ p_i^{(s)}=p_{i1}^{(s)}(t,\theta),\tag{16}$$

式中 $q^i_{(s)}(t,0)=q^i_{(s)}(t,l)$, $p_i^{(s)}(t,0)=p_i^{(s)}(t,l)$. 取"轨线管"另一条闭曲线 C_2,它包围"轨线管"并与"轨线管"母线仅相交一次. 设闭曲线 C_2 的方程为

$$t=t_2(\theta),\ q^i_{(s)}=q^i_{(s)2}(\theta),\ p_i^{(s)}=p_{i2}^{(s)}(\theta).\tag{17}$$

将(13)式分别沿闭曲线 C_1 和 C_2 积分,可得

$$J=\oint_{C_k}[p_i^{(s)}\Delta q^i_{(s)}-H_C\Delta t]=\mathrm{inv}\quad(k=1,2).\tag{18}$$

J 称为非完整约束奇异广义力学系统的 Poincaré-Cartan 积分. 它表明,在增广相空间中所有约束(处在约束和内在约束)确定的超曲面 Γ_p 上,取一条闭曲线 C,如果内在约束条件 $\phi_a = 0$ 在(6)式确定的总变分下不变,以及外在非完整约束条件 $G_W = 0$ 在(6)式确定的 M 阶速度的等时变分适合广义 Apell-Четаев 条件(8)式,那么沿着约束奇异广义力学系统运动的"轨线",Poincaré-Cartan 积分沿闭曲线 C 的积分为不变量. (18)式称为非完整约束奇异 Lagrange 量广义力学系统的广义 Poincaré-Cartan 积分不变量.

3. 非完整束奇异广义力学系统的广义 Poincaré-Cartan 积分不变量与广义正则方程

上面,我们利用非完整约束奇异广义力学系统的广义正则方程导出了该系统的广义 Poincaré-Cartan 积分. 现在,反过来从非完整约束奇异广义力学系统的广义 Poincaré-Cartan 积分出发,证明该非完整约束奇异广义力学系统的运动方程是广义正则方程.

对非完整约束奇异广义力学系统,由于 Lagrange 量是奇异的,系统的运动被限制在相空间的约束超曲面 Γ_P 上;同时,设系统的运动受高阶非完整外在约束(1)式的限制. 这里同样假设外在非完整约束为 $G_W = 0$ 和内在约束 $\phi_a = 0$ 是相容的. 设非完整约束奇异广义力学系统在相空间中的动力学轨线由一组微分方程

$$\dot{q}^i_{(s)} \approx f^i_{(s)}(t;q^i_{(s)},p^i_{(s)},\nu_{a'}),$$
$$\dot{p}^{(s)}_i \approx g^{(s)}_i(t;q^i_{(s)},p^i_{(s)},\nu_{a'}) \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{19}$$

确定,其中 $\nu_{a'}(t)(a' = 1,2,\cdots,k)$ 为相应函数. 设在方程组(19)式的解所确定的"轨线管"上,沿包围此"轨线管"的闭曲线 C 的广义 Poincaré-Cartan 积分为不变量,从而可以证明,该非完整约束奇异广义力学系统在相空间的运动方程是广义正则方程.

引入辅助参量 μ,

$$\frac{\mathrm{d}q^1_{(s)}}{f^1_{(s)}} = \cdots = \frac{\mathrm{d}q^n_{(s)}}{f^n_{(s)}} = \frac{\mathrm{d}p^{(s)}_1}{g^{(s)}_1} = \cdots \frac{\mathrm{d}p^{(s)}_n}{g^{(s)}_n} = \mathrm{d}t = \pi\mathrm{d}\mu, \tag{20}$$

π 是增广相空间中的任意函数,积分(20)式得

$$q^i_{(s)} = q^i_{(s)}(\mu;t_0;q^i_{(s)0},p^{(s)}_{i0}), \tag{21a}$$

$$p^{(s)}_i = p^{(s)}_i(\mu;t_0;q^i_{(s)0},p^{(s)}_{i0}), \tag{21b}$$

$$t = t(\mu;t_0;q^i_{(s)0},p^{(s)}_{i0}). \tag{21c}$$

这里 $t_0,q^i_{(s)0},p^{(s)}_{i0}$ 是初始条件,它们对应于 $\mu = 0$. 为了获得动力学轨线(21)所确定的轨线管,我们选择初始点在闭曲线上,该曲线位于 Γ_P 上,轨线管的动力学轨线参数方程为

$$q^i_{(s)} = q^i_{(s)}(\mu,\alpha), \quad p^{(s)}_i = p^{(s)}_i(\mu,\alpha),$$
$$t = t(\mu,\alpha) \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant l). \tag{22}$$

对于一个给定的 α 值它相应于一确定的"轨线管"母线,而参数 μ 的值决定了这条"母线"上的一个定点. 令 $\mu = \mathrm{const}$,方程(22)式确定了"轨线管"上的一条闭曲线 C. 当 Poincaré-Cartan 积分(18)式中的 $q^i_{(s)},p^{(s)}_i,t$ 用(22)式代入,沿闭曲线 C 积分可得 J 为参数 μ 的函数,即 $J = J(\mu)$. 根据 Poincaré-Cartan 积分 J 的不变性得

$$\mathrm{d}J = 0, \tag{23}$$

式中字母 d 表示对参数 μ 的微分,用字母 Δ 表示对 α 的微分,在积分号下取微分得

$$\mathrm{d}J = \oint_C \Big[\mathrm{d}p^{(s)}_i \Delta q^i_{(s)} + p^{(s)}_i \mathrm{d}\Delta q^i_{(s)} - \mathrm{d}H_C \Delta t - H_C \mathrm{d}\Delta t\Big] = 0, \tag{24}$$

逐项除以 $\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}t/\pi$,并用方程(19)可得

$$\oint_C \left[\left(g^{(s)}_i + \frac{\partial H_C}{\partial q^i_{(s)}}\right)\Delta q^i_{(s)} + \left(-f^i_{(s)} + \frac{\partial H_C}{\partial p^{(s)}_i}\right)\Delta p^{(s)}_i + \left(-\frac{\mathrm{d}H_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H_C}{\partial t}\right)\Delta t\right]\pi\mathrm{d}\mu = 0. \tag{25}$$

因为 π 是任意函数,得

$$\left(g^{(s)}_i + \frac{\partial H_C}{\partial q^i_{(s)}}\right)\Delta q^i_{(s)} + \left(-f^i_{(s)} + \frac{\partial H_C}{\partial p^{(s)}_i}\right)\Delta p^{(s)}_i + \left(-\frac{\mathrm{d}H_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H_C}{\partial t}\right)\Delta t = 0. \tag{26}$$

由于存在约束,$q^i_{(s)},p^{(s)}_i$ 是不独立的,假设 $\Delta q^i_{(s)}$,$\Delta p^{(s)}_i$ 决定的等时变分 $\delta q^i_{(s)},\delta p^{(s)}_i$ 适合(10)式,且外在非完整约束适合条件(8)式,分别引入 Lagrange 乘子 $\mu^a(t)$和 $\lambda^W(t)$,用 μ^a 乘(10)式,用 λ^W 乘(8)式并求和,结合(26)式,对非完整约束奇异 Lagrange 量广义力学系统得

$$\dot{q}^i_{(s)} \approx f^i_{(s)} \approx \frac{\partial H_C}{\partial p^{(s)}_i} + \mu^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p^{(s)}_i}$$

$$(i = 1,2,3,\cdots,n;s = 0,1,2,3,\cdots,N-1), \tag{27a}$$

$$\dot{p}^{(s)}_i \approx g^{(s)}_i \approx -\frac{\partial H_C}{\partial p^i_{(s)}} - \mu^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q^i_{(s)}}$$

$(i = 1,2,3,\cdots,n;s = 1,2,3,\cdots,N-1;$
$s \neq M-1)$, (27b)

$$\dot{p}_i^{(M-1)} \approx g_i^{(s)} \approx -\frac{\partial H_C}{\partial q^i_{(M-1)}} - \mu^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q^i_{(M-1)}} - \lambda^W \frac{\partial G_W}{\partial q^i_{(M)}}$$

$(i = 1,2,3,\cdots,n;M \leqslant N)$. (27c)

(27)式为高阶微商外在非完整约束奇异 Lagrange 量广义力学系统的广义正则方程. 可见,对非完整约束奇异 Lagrange 量广义力学系统,如果在相空间有含相应函数的运动微分方程,且沿动力学"轨线管"上闭曲线 C 的广义 Poincaré-Cartan 积分为不变量时,该运动方程必具有非完整约束奇异广义力学系统的广义正则方程的形式. 由此可见,非完整约束奇异 Lagrange 量广义力学系统的广义 Poincaré-Cartan 积分不变量和该系统的广义正则方程等价.

4. 结论和讨论

综合上面的讨论,我们得到了受高阶微商外在非完整约束奇异 Lagrange 量广义力学系统的广义 Poincaré-Cartan 积分不变量,并且证明了非完整约束奇异 Lagrange 量广义力学系统的广义 Poincaré-Cartan 积分不变量和该系统的广义正则方程等价. 类似讨论可得:对受完整外在约束的广义力学系统,保持系统所有约束条件不变的变换能够导出广义 Poincaré-Cartan 积分不变量. 但对受非完整外在约束的奇异 Lagrange 量广义力学系统,即使保持系统的约束方程不变的变换,也不能够导出广义 Poincaré-Cartan 积分不变量,只有变换所确定的 M 阶速度空间的等时变分满足广义 Apell-Четаев 条件(8)式,才能够导致广义 Poincaré-Cartan 积分不变量. 因为对于受完整外在约束的奇异 Lagrange 量广义力学系统,变换(6)保证了约束加在虚位移上的条件,对该系统能得到无约束情形下广义 Poincaré-Cartan 积分不变量的形式;而对受非完整外在约束的奇异 Lagrange 量广义力学系统,变换(6)式不能导致外在约束满足广义 Apell-Четаев 条件,从而得不到该系统无约束时的广义 Poincaré-Cartan 积分不变量的形式.

[1] Mei F X *et al* 1991 *Advanced analytical mechanics* (Beijing:Beijing Science and polytechnic university press) (in Chinese) [梅凤翔等 1991 高等分析力学(北京:北京理工大学出版社)]
[2] Gantmacher F 1960 *Lecture in Analytical Mechanics* (Moscow:Mir)
[3] Li A M, Jiang J H and Li Z P 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 5 (in Chinese) [李爱民、江金环、李子平 2002 物理学报 **51** 5]
[4] Li A M, Zhang X P and Li Z P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 5 (in Chinese) [李爱民、张晓沛、李子平 2003 物理学报 **52** 5]
[5] Benavent F 1980 *Gomis J. Ann. Phys.* (N Y) **21** 2124
[6] Dominic D, Gomis J 1980 *J Math Phys.* **21** 2124
[7] Sugano R, Kamo H 1982 *Ppog Theor Phys.* **69** 1966
[8] Sugano R 1982 *Ppog Theor Phys.* **68** 1377
[9] Li Z P and Li X 1990 *Int J. Theor Phys.* **29** 765
[10] Li Z P and Wu B C 1994 *Int J. Theor Phys.* **33** 1063
[11] Li Z P 1999 *Constrained Hamilton Systems and Their Symmetry Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1999 约束哈密顿系统及其对称性质(北京:北京工业大学出版社)]
[12] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetry Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1993 约束系统的经典和量子对称性质(北京:北京工业大学出版社)]
[13] Li Z P and Jiang J H 2002 *Symmetries in Constrained Canonical System* (Beijing:Science Press)
[14] Li A M, Jiang J H and Li Z P 2003 *Chin. Phys.* **12** 5
[15] Mei F X 1987 *The researches on non-holonomic dynamics* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [梅凤翔 1987 非完整动力学研究(北京:北京工业大学出版社)]

Poincaré-Cartan integral invariant of a nonholonomic constrained generalized mechanical system

Li Ai-Min Zhang Ying Li Zi-Ping

(*College of Applied Sciences*, *Beijing Polytechnic University*, *Beijing* 100022, *China*)

(Received 22 August 2003; revised manuscript received 9 December 2003)

Abstract

Based on generalized Apell-Четаев constrained conditions and taking into account the inherent higher-order nonholonomic constraints, the generalized Poincaré-Cartan integral invariant for a generalized mechanical system with higher-order subsidiary nonholonomic constraints is formulated. We can show that the existence of Poincaré-Cartan integral invariant for such a system is equivalent to the generalized canonical equation of a nonholonomic constrained generalized mechanical system.

Keywords: generalized mechanics, nonholonomic constrains, singular Lagrangian, Poincaré-Cartan integral invariant

PACC: 0320, 1110