第 53 卷 第 9 期 2004 年 9 月
1000-3290/2004/53(09)/2828-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53,No.9,September,2004

求一类非线性偏微分方程解析解的一种简洁方法*

谢元喜† 唐驾时

(湖南大学工程力学系,长沙 410082)

(2003 年 11 月 13 日收到;2003 年 12 月 19 日收到修改稿)

通过引入一个变换和选准试探函数,进行求偏导数运算,将非线性偏微分方程化为代数方程,然后用待定系数法确定相应的常数,最后得到其解析解.不难看出,这种方法特别简洁.

关键词:非线性偏微分方程,试探函数,待定系数法,解析解

PACC:0340K,0290

1. 引 言

寻求非线性偏微分方程的解析解和数值解一直是广大物理学家和数学家致力于研究的重要课题,目前虽然已经发展了许多比较成熟的方法[1—10],用于求解非线性偏微分方程,但不能说解非线性偏微分方程的任务已经完成,依然还有很多工作要做.

本文通过引入一个变换,只要选准试探函数,就可简洁地求得非线性偏微分方程的解析解.

2. 基本思想

本文基于 Hopf-Cole 变换[11]和文献[12]所提出的'试探函数法'的思想,研究如下一类非线性偏微分方程的解析解:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\gamma\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\cdots=0, \tag{1}$$

为了求解上述方程,引入变换

$$u=\frac{\partial v}{\partial x},\ v=v(y),\ y=y(x,t), \tag{2}$$

其中 $v(y)$ 和 $y(x,t)$ 为试探函数.

只要试探函数 $v(y)$ 和 $y(x,t)$ 选得准确,就可将非线性偏微分方程(1)化为代数方程,从而求解相当简洁.考虑到非线性偏微分方程一般为波动方程,其解含有相位因子($kx-\omega t$),因此,把试探函数 $y(x,t)$ 选为如下形式:

$$y=\mathrm{e}^{(kx-\omega t)}. \tag{3}$$

至于试探函数 $v(y)$ 则应根据具体的方程灵活选择,下面应用这个思想来求解几个非线性偏微分方程.

3. 应用举例

3.1. KdV 方程

考虑 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0, \tag{4}$$

选取试探函数 $v(y)$ 为

$$v=\frac{ay^2}{1+y^2}, \tag{5}$$

其中 a 为待定常数.

由(2),(3),(5)式得

$$u=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2aky^2}{(1+y^2)^2}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{4ak\omega(y^4-y^2)}{(1+y^2)^3}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{4ak^2(y^2-y^4)}{(1+y^2)^3}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{8ak^4(2y^2-22y^4+22y^6-2y^8)}{(1+y^2)^5}. \tag{9}$$

将(6)—(9)式代入(4)式得代数方程

$$(4\beta k^3-\omega)y^2+(2ak^2-\omega-44\beta k^3)y^4+(\omega-2ak^2+44\beta k^3)y^6+(\omega-4\beta k^3)y^8=0. \tag{10}$$

* 湖南省自然科学基金(批准号:01JJY2007)资助的课题.

†E-mail:xie yuan xi 88 @ 163.com

要使(10)式对任意 y 都成立,必有

$$4\beta k^3 - \omega = 0, \tag{11}$$

$$2ak^2 - \omega - 44\beta k^3 = 0. \tag{12}$$

联立(11),(12)式解得

$$\omega = 4\beta k^3, \qquad a = 24\beta k. \tag{13}$$

将(13)式代入(6)式求得

$$u = \frac{48\beta k^2 y^2}{(1+y^2)^2} = \frac{48\beta k^2 e^{2(kx-\omega t)}}{[1+e^{2(kx-\omega t)}]^2}. \tag{14}$$

利用双曲正割函数的定义,可将(14)式化为

$$u = 12\beta k^2 \operatorname{sech}^2(kx-\omega t), \tag{15}$$

由(13)式还可求得波速为

$$c = \frac{\omega}{k} = 4\beta k^2. \tag{16}$$

3.2. Burgers 方程

Burgers 方程的形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{17}$$

选取试探函数 $v(y)$ 为

$$v = a\ln(1+y). \tag{18}$$

由(2),(3),(18)式得

$$u = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{aky}{1+y}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{ak\omega y}{(1+y)^2}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{ak^2 y}{(1+y)^2}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{ak^3(y-y^2)}{(1+y)^3}. \tag{22}$$

将(19)—(22)式代入(17)式得

$$-(\omega+\alpha k^2)y + (ak^2+\alpha k^2-\omega)y^2 = 0. \tag{23}$$

要使(22)式对任意 y 都成立,必有

$$\omega + \alpha k^2 = 0, \tag{24}$$

$$ak^2 + \alpha k^2 - \omega = 0. \tag{25}$$

联立(24),(25)式解得

$$\omega = -\alpha k^2, \qquad a = -2\alpha. \tag{26}$$

将(26)式代入(19)式得

$$u = -\frac{2\alpha k e^{(kx-\omega t)}}{1+e^{(kx-\omega t)}}. \tag{27}$$

利用双曲正切函数的定义,可将(27)式化为

$$u = -\alpha k\left[1 + \tanh\frac{1}{2}(kx-\omega t)\right], \tag{28}$$

由(26)式还可求得波速为

$$c = \frac{\omega}{k} = -\alpha k. \tag{29}$$

3.3. KdV-Burgers 方程

KdV-Burgers 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{30}$$

选取试探函数 $v(y)$ 为

$$v(y) = \frac{ay}{1+y} + b\ln(1+y), \tag{31}$$

仿照前面相同的方法可求得

$$\omega = -\alpha k^2 + \beta k^3, \quad a = 12\beta, \quad b = -\frac{12}{5}\alpha,$$

$$c = -\alpha k + \beta k^2, \tag{32}$$

$$u = \frac{3\alpha^2}{25\beta}\left\{4 - \left[1 + \tanh\frac{\alpha}{10\beta k}(kx-\omega t)\right]^2\right\}, \tag{33}$$

不再赘述.

以上一些结果与文献[11]的结果完全一样,说明本文的方法是可行的.

4. 结　论

本文将 Hopf-Cole 变换法和‘试探函数法’的思想结合起来,通过选取准确的试探函数,简洁地求得了一类非线性偏微分方程解析解. 这种方法是否适用于求解其他非线性偏微分方程,试探函数的选取是否有规律可循,值得今后进一步探索.

[1] Zhang J F 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 1416 (in Chinese) [张解放 1998 物理学报 **47** 1416]

[2] Yan Z Y and Zhang H Q 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1962 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆 1999 物理学报 **48** 1962]

[3] Li H B *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 837 (in Chinese) [李华兵等 2001 物理学报 **50** 837]

[4] Liu S K *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2068 (in Chinese) [刘式适等 2001 物理学报 **50** 2068]

[5] Zhang J F 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 425

[6] Tang J S *et al* 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 522 (in Chinese) [唐驾时等 物理学报 **52** 522]

[7] Li D S and Zhang H Q 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1569 (in Chinese) [李德生、张鸿庆 2003 物理学报 **52** 1569]

[8] Li S K *et al* 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1842 (in Chinese) [刘式适等 2003 物理学报 **52** 1842]

[9] Fu Z T *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2949 (in Chinese) [付遵涛等 2003 物理学报 **52** 2949]

[10] Cheng Y *et al* 2003 *Chin. Phys.* **12** 1

[11] Liu S K and Liu S D 2000 *Nonlinear Equations in Physics* (Beijing: Peking University Press) p281—294 (in Chinese) [刘式适、刘式达 2000 物理学中的非线性方程(北京大学出版社)第 281—294 页]

[12] Li S K *et at* 2001 *Appl. Math. Mech.* **22** 281 (in Chinese) [刘式适 等 应用数学和力学 **22** 281]

A simple fast method in finding the analytical solutions to a class of nonlinear partial differential equations*

Xie Yuan-Xi Tang Jia-Shi

(*Department of Engineering Mechanics*, *Hunan University*, *Changsha*, 410082, *China*)

(Received 13 November 2003; revised manuscript received 19 December 2003)

Abstract

By introducing, a new transformation and selecting appropriate trial functions, nonlinear partial differential equations can be converted to algebraic equations, and their related coefficients can be easily determined by making use of the method of undetermined coefficients. Finally, the analytical solutions to a class of nonlinear partial differential equations are successfully derived. One can easily see that this method used herein is particularly simple.

Keywords: nonlinear partial differential equations, trial function, method of undetermined coefficient, analytical solution

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant No. 01JJY2007).