第 53 卷 第 9 期 2004 年 9 月
1000-3290/2004/53(09)/2843-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.9, September, 2004

Einstein-Maxwell-dilaton 引力模型中的 5 维宇宙膜解*

颜 骏[1)] 陶必友[2)]

[1)](西南交通大学物理研究所，成都 610031)

[2)](成都 77 信箱工学院，成都 610066)

(2003 年 3 月 26 日收到；2003 年 6 月 23 日收到修改稿)

获得了 Einstein-Maxwell-dilaton 引力模型中的一种新型的 5 维宇宙膜解，并分析和讨论了这种解的物理含义.

关键词：Einstein-Maxwell-dilaton 引力模型，5 维时空，宇宙膜解

PACC：0420；9850

N 维时空中的 Einstein 方程的真空解可以靠增加一个平坦方向而扩展为 $N+1$ 维时空中的解. Gibbons，Maeda，Horowitz 和 Strominger 获得了一种带荷扩展体的精确解——P 膜解[1,2]，但这种解是不稳定的[3,4]，并且这种解的荷场和 dilaton 的能量动量张量不具有 boost 对称性，所以有必要寻找具有 boost 对称性而且是稳定 P 膜解，Gregory 首先注意到这一问题[5]，他研究了 N 维时空中的 Einstein-Maxwell-dilaton 模型中的宇宙学 P 膜解，并分析了电荷-磁荷膜解的对偶性和自对偶性质. 众所周知，4 维 Einstein 引力模型中存在黑洞解，而本文研究的是一种 5 维的 $P=1$ 膜解，这种解新的特点是 dilaton 场 ϕ 在两个视界处均发散，研究这一解的目的在于探索 P 膜模型中是否存在奇异解，如黑洞解或裸奇点解，这类解有助于进一步研究高维时空中黑洞的各种物理性质.

弦框架下 N 维时空中的 Einstein-Maxwell-dilaton 引力模型作用量为[5]

$$\tilde{S} = \int \mathrm{d}^N x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \mathrm{e}^{2\phi} [-\tilde{R} - 4(\tilde{\nabla}\phi)^2] (-1)^{D-3} \times \frac{2F^2 \mathrm{e}^{2a\phi}}{(D-2)!} \right\}. \tag{1}$$

这里，ϕ 是 dilaton 场，a 是 dilaton 耦合常数，F 是 $(D-2)$ 形式电磁场强，经过共形变换 $g_{ab} = \mathrm{e}^{-\frac{4\phi}{N-2}} \tilde{g}_{ab}$，(1)式变为 Einstein 框架下的作用量

$$S = \int \mathrm{d}^N x \sqrt{-g} \left\{ -R - \frac{4}{N-2} (\nabla\phi)^2 (-1)^{D-3} \times \frac{2F^2 \mathrm{e}^{2\alpha\phi}}{(D-2)!} \right\}. \tag{2}$$

这里，$\alpha = a + \frac{P+4-D}{N-2}$，$P$ 是膜的维数，N 是时空的维数，$D = N - P$，能量-动量张量为

$$T_{ab} = \frac{4}{N-2} \nabla_a\phi\nabla_b\phi (-1)^{D-3} \frac{2\mathrm{e}^{2\alpha\phi}}{(D-3)!} F_a F_b - g_{ab} \left[\frac{2}{N-2} (\nabla\phi)^2 (-1)^{D-3} \frac{F^2 \mathrm{e}^{2\alpha\phi}}{(D-2)!} \right]. \tag{3}$$

具有 boost 对称性的膜度规选择为

$$\mathrm{d}s^2 = A^2 (\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x^i) - B^2 \mathrm{d}r^2 - C^2 \mathrm{d}\Omega_{D-2}^2, \tag{4}$$

式中，$D = N - P$，$i = 1, \cdots, P$ 遍及整个膜坐标.

由作用量(2)得电磁场 F 和 dilaton 场 ϕ 的耦合方程

$$\nabla_a [\mathrm{e}^{2\alpha\phi} F^a] = 0, \tag{5}$$

$$\Box\phi = (-1)^{D-3} \cdot \frac{\alpha(N-2)}{2(D-2)!} \mathrm{e}^{2\alpha\phi} F^2. \tag{6}$$

根据(5)式得到如下磁荷型解

$$F = Q\varepsilon_{D-2}. \tag{7}$$

这里 Q 是磁荷，ε_{D-2} 是单位$(D-2)$维球面积形式. 现在研究 5 维时空中的宇宙膜解，如果假定度规中 A，B，C 和场 ϕ 仅为位置坐标 r 的函数，并且令 $N=5$，$P=1$，$B=A^{-2}$，这时的 5 维 $P=1$ 膜解也可看作一种等效的宇宙弦解，根据度规(4)和能量-动量张量(3)式可得 Einstein 场方程的分量

$$B^{-2} \left[\frac{A''}{A} - \frac{A'B'}{AB} + \left(\frac{A'}{A} \right)^2 + 2\frac{A'C'}{AC} \right] = \frac{2}{3} \frac{Q^2 \mathrm{e}^{2\alpha\phi}}{C^4}, \tag{8}$$

$$B^{-2} \left[\frac{C''}{C} + \frac{C'}{C} \left(\frac{C'}{C} + 2\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) \right] - \frac{1}{C^2}$$

---

* 西南交通大学基础科学专项基金资助的课题.

$$= -\frac{4}{3}\frac{Q^2 e^{2\alpha\phi}}{C^4}, \tag{9}$$

$$B^{-2}\left[2\frac{A''}{A}+2\frac{C''}{C}-2\frac{B'}{B}\left(\frac{A'}{A}+\frac{C'}{C}\right)\right]$$

$$= -\frac{4\phi'^2}{3B^2}+\frac{2}{3}\frac{Q^2 e^{2\alpha\phi}}{C^4}. \tag{10}$$

dilaton 方程为

$$\left(\frac{A^2C^2\phi'}{B}\right)' = \frac{3}{2}\alpha\frac{Q^2e^{2\alpha\phi}A^2B}{C^2}. \tag{11}$$

将方程(11)代入(8),(9)式后积分得

$$(A^4)'C^2 = \frac{16}{9\alpha}A^4C^2\phi' + 4a_0, \tag{12}$$

$$A^4(C^2)' = 2r + 2c_0 - \frac{16}{9\alpha}A^4C^2\phi', \tag{13}$$

式中 a_0,c_0 是积分常数. 根据(12),(13)式得

$$A^4C^2 = r^2 + 2(c_0+2a_0)\cdot r + b_0$$

$$= (r-r_+)(r-r_-), \tag{14}$$

b_0 为积分常数,引入函数 $f = A^4C^2\phi'$,再根据(10),(11)式得

$$f' = \frac{\beta\cdot f^2 + 4a_0 f + v}{(r-r_+)(r-r_-)}. \tag{15}$$

这里设 $\beta = \alpha + \frac{8}{9\alpha} > 0$,$v = -\frac{3}{2}\alpha(c_0^2 + a_0^2 + 4a_0c_0 - b_0)$. Gregory 研究了 $v=0$ 的宇宙膜解,本文假定 $v\neq 0$,再设 $\beta f = F$,则

$$F^2 + 4a_0F + v\beta = \beta(\beta f^2 + 4a_0 f + v), \tag{16}$$

而 $F_\pm = -2a_0 \pm\sqrt{4a_0^2-\beta v}$ 是方程

$$F^2 + 4a_0F + v\beta = 0$$

的两个根,且有 $F_+ - F_- = 2\sqrt{4a_0^2-\beta v}$. 于是方程(15)化为

$$\frac{dF}{(F-F_+)(F-F_-)} = \frac{dr}{(r-r_+)(r-r_-)}. \tag{17}$$

(17)式从 r 至 ∞ 积分后求出

$$\frac{\beta f - F_+}{\beta f - F_-} = \frac{\beta f(\infty) - F_+}{\beta f(\infty) - F_-}\cdot\left(\frac{r-r_+}{r-r_-}\right)^k, \tag{18}$$

式中,$k = \sqrt{\frac{4a_0^2-\beta v}{3a_0^2+\omega}}$,$\omega = -\frac{2}{3\alpha}v$,如令 $\beta f(\infty) = F_0$,$(r-r_+)^k = m$,$(r-r_-)^k = n$,则(18)式解出

$$F = \frac{nF_+(F_0-F_-) - mF_-(F_0-F_+)}{n(F_0-F_-) - m(F_0-F_+)}. \tag{19}$$

又由 $\phi' = \frac{f}{A^4C^2}$ 可得 $\phi' = \frac{F}{\beta(r-r_+)(r-r_-)}$,于是

$$\phi'(r) = \frac{1}{\beta}\frac{1}{(r-r_+)(r-r_-)} \times\frac{nF_+(F_0-F_-) - mF_-(F_0-F_+)}{n(F_0-F_-) - m(F_0-F_+)}. \tag{20}$$

经过详细计算后发现(20)式的解为

$$\phi(r) = \frac{1}{\beta}\left\{\ln\left[(F_0-F_-) - (F_0-F_+)\left(\frac{r-r_+}{r-r_-}\right)^k\right]^{\frac{F_-}{F_+-F_-}} - \ln\left[-(F_0-F_+) + (F_0-F_-)\left(\frac{r-r_-}{r-r_+}\right)^k\right]^{\frac{F_+}{F_+-F_-}}\right\}. \tag{21}$$

由方程(12),(13)又得如下解:

$$Ae^{-\frac{4\phi}{9\alpha}} = \left(\frac{r-r_+}{r-r_-}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}, \tag{22}$$

$$Ce^{\frac{8\phi}{9\alpha}} = (r-r_+)^{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}(r-r_-)^{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}. \tag{23}$$

将 $\phi(r)$ 代入上式求得度规分量

$$A^2 = g_{tt} = \left(\frac{r-r_+}{r-r_-}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{\left[(F_0-F_-) - (F_0-F_+)\left(\frac{r-r_+}{r-r_-}\right)^k\right]^{\frac{F_-}{F_+-F_-}}}{\left[-(F_0-F_+) + (F_0-F_-)\left(\frac{r-r_-}{r-r_+}\right)^k\right]^{\frac{F_+}{F_+-F_-}}}\right)^{\frac{8}{9\alpha\beta}}, \tag{24}$$

$$C^2 = g_{\theta\theta} = (r-r_+)^{2-\frac{4}{\sqrt{3}}}(r-r_-)^{2+\frac{4}{\sqrt{3}}}\left(\frac{\left[(F_0-F_-) - (F_0-F_+)\left(\frac{r-r_+}{r-r_-}\right)^k\right]^{\frac{F_-}{F_+-F_-}}}{\left[-(F_0-F_+) - (F_0-F_-)\left(\frac{r-r_-}{r-r_+}\right)^k\right]^{\frac{F_+}{F_+-F_-}}}\right)^{-\frac{16}{9\alpha\beta}}. \tag{25}$$

当 $r\to\infty$，$\phi(r)\to\frac{1}{\beta}\ln(F_{+}-F_{-})^{-1}$有限，而当 $r\to r_{\pm}$ 时 $\phi(r)\to\infty$．因此，无论度规在 $r_{\pm}$ 的性态如何，物质场 $\phi(r)$ 都会发散，这不同于一般的 dilaton 黑洞模型，如 2 维带荷 dilaton 引力模型中，Mann 证明了 dilaton 场在原点有限，在一视界处发散[6]．这一解又类似于 2 维 dilaton 引力中的裸奇点解，如 2 维引力耦合非线性的 sinh-Gordon 物质场后，dilaton 场定义在时空带（space-time ribbon）上，在边界上 dilaton 场发散[7,8]．最近 Cotsakis 等人研究了带有荷的 P 膜黑洞解[9]，本文中的解不同于这些高维时空中的黑洞解，是一种 5 维时空中的裸奇点解．另外，已有文献研究具有电磁场和标量场作用的共形平直解[10,11]，以及分析 Einstein-Maxwell-dilaton 黑膜的粒子辐射[12]．本文获得的宇宙膜解有助于进一步研究一般的 P 膜解的经典与量子性质，本文的解还可以推广至 $N>5$ 的情况中．

[1] Gibbons G and Maeda K 1988 *Nucl*. *Phys*. B **298** 741
[2] Horowitz G and Strominger A 1991 *Nucl*. *Phys*. B **360** 197
[3] Gregory R and Laffamme R 1993 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **70** 2837
[4] Gregory R and Laffamme R 1994 *Nucl*. *Phys*. B **428** 399
[5] Gregory R 1996 *Nucl*. *Phys*. B **467** 159
[6] Mann R 1994 *Phys*. *Rev*. D **47** 4438
[7] Yan J，Qiu X M 1998 *Gen*. *Rel*. *Grav* **30** 1319
[8] Yan J，Wang S J and Tao B Y 2001 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **35** 19
[9] Cotsakis S，Ivashchuk V，Melinkov V，P-brane Black-holes and Post-Newtonian Approximation，Prinpint 1998
[10] Zhang J Y 1997 *Acta Phys*. *Sin*. **46** 2294（in Chinese）[张靖仪 1997 物理学报 **46** 2294]
[11] Chen G 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 992（in Chinese）[陈　光 1999 物理学报 **48** 992]
[12] Cao J L and Peng F Z 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 177（in Chinese）[曹江陵、彭方志 1998 物理学报 **47** 177]

A five-dimensional cosmic branes solution in Einstein-Maxwell-dilaton gravity model*

Yan Jun[1)]　Tao Bi-You[2)]

1)（*Institute of Physics*，*Southwest Jiaotong University*，*Chengdu* 610031，*China*）

2)（*Technology Institute of Box*77，*Chengdu* 610066，*China*）

（Received 26 March 2003；revised manuscript received 23 June 2003）

Abstract

A new five-dimensional cosmic branes solution in Einstein-Maxwell-dilaton gravity model is obtained in this paper，the physical meanings of this solution are analyzed and discussed.

Keywords：Einstein-Maxwell-dilaton gravity model，five-dimensional space-time，cosmic branes solution

PACC：0420，9850

* Project supported by the Basic Science Foundation of Southwest Jiaotong University.