第 53 卷 第 9 期 2004 年 9 月
1000-3290/2004/53(09)/2846-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53,No.9,September,2004

二重非交换时空与二重复对称引力理论*

吴亚波[1)†] 邵 颖[2)] 董 鹏[1)]

[1)] (辽宁师范大学物理系,大连 116029)

[2)] (大连理工大学物理系,大连 116023)

(2003 年 10 月 16 日收到;2004 年 1 月 16 日收到修改稿)

通过引入二重复对称度规张量,建立了一种二重复对称引力理论. 从一个二重实的作用量出发,导出了静态球对称二重复度规的具体表达式. 该理论扩展了 Moffat 结果,不仅自然地得到了双曲复对称引力理论,而且把著名的 Schwarzschild 解作为特殊情况包含在其中,并且在线性化的弱场近似下自动摆脱了 Moffat 理论中存在的负能鬼态问题. 进一步,通过将二重复坐标推广到满足二重非对易关系以及将 Moyal 星积二重化,由此构造出二重非交换复对称引力场作用量.

关键词:非交换几何,复对称度规,非对易坐标,引力场作用量

PACC:0420C,0420J,0240

1. 引 言

近年来,超弦/M 理论[1—3]中非交换几何[4]的自然出现使得人们不仅能运用非交换几何的概念和定理来有效地分析对偶性、BPS 态以及 D-模(D-brane)动力学[5—7]等,而且更重要的是提出了一种新的物理时空——非交换时空[8,9]. 在非交换时空中,时空坐标是非对易的,满足如下关系[10]:

$$[x^{\mu}, x^{\nu}] = \mathrm{i}\theta^{\mu\nu}, \tag{1}$$

这里 $\theta^{\mu\nu}$ 是反对称实的常数张量(或称形变张量),$\mu, \nu = 0, \cdots, 3$. 目前人们利用 Moyal 实现[11](或称 Moyal 星积)已构建了非交换平直空间上的杨-米尔斯(Yang-Mills)理论以及量子场论[12]. 能否在非交换的时空几何上建立一种新的引力理论——非交换引力理论,这是近年来引力理论领域研究的一个新课题. 目前在此研究方向上已经取得了很多成果[13—17]. 其中 Moffat[15]探讨了对称和非对称复度规理论,利用 Moyal 星积将其推广到非交换时空几何上,建立了一种非交换复引力理论. 不过,Moffat 理论存在一个致命的弱点,即在线性化的弱场近似下,该理论含有非物理的负能鬼态[15]. 为解决此问题,Moffat 引入了双曲复度规替换普通复度规,由此建立的相应理论能摆脱负能鬼态问题. 但是,Moffat 理论中双曲复度规的引入缺少数学上的严谨性,显得很不自然. 于是,我们提出如下问题:能否建立一种新的非交换复引力理论,不仅能将 Moffat 理论作为特殊情况包含其中,而且能通过将普通复度规和双曲复度规的有机结合,自然地得到双曲复引力理论,从而自动摆脱 Moffat 理论中的负能鬼态问题?本文对此问题给出了肯定的回答.

目前,二重复函数理论[18]已经广泛地应用于物理学的各个领域,并已取得若干成果[19—21,23—26]. 本文发现,利用二重复函数理论将二重复流形上的时空坐标推广到满足二重非对易关系,并且将普通的 Moyal 星积二重化,就能将二重复对称度规(非厄米的,即 $g^{\dagger} \neq g$)引力理论推广到二重非交换几何空间,从而建立一种二重非交换的引力理论. 这个理论是 Moffat 理论的扩展,能自然地得到双曲复引力理论. 与 Moffat 理论相比,该理论数学形式简洁,结论自然,自动摆脱了负能鬼态问题.

为下面讨论问题方便,这里简要介绍二重复函数理论和非交换几何的相关内容(详细内容参阅文献[4],[5]和[18]).

设 J 为二重纯虚单位,$J = \mathrm{i}$ 为普通(椭圆)复数单位,满足 $\mathrm{i}^2 = -1$;$J = \varepsilon$ 为双曲复数单位,满足 $\varepsilon^2 = 1$ 且 $\varepsilon \neq 1$. $Z(J) = a(J) + Jb(J)$则被称为二重复数,其中 $a(J)$和 $b(J)$都是二重实数,$\bar{Z} = a(J) -$

---

* 辽宁省自然科学基金(批准号:20032102)资助的课题.

† E-mail:zwyb@mail.dlptt.ln.cn

$Jb(J)$被称为二重复数 $Z(J)$的共轭数．$J=\mathrm{i}$ 时，$Z(J=\mathrm{i})=Z_c=a_c+\mathrm{i}b_c$ 为普通复数(或称椭圆复数)，而 $\bar{Z}(J=\mathrm{i})=\bar{Z}_c=a_c-\mathrm{i}b_c$ 为 Z_c 的共轭数；当 $J=\varepsilon$ 时，$Z(J=\varepsilon)=Z_H=a_H+\varepsilon b_H$ 为双曲复数，$\bar{Z}(J=\varepsilon)=\bar{Z}_H=a_H-\varepsilon b_H$ 为 Z_H 的共轭数．二重复数 $Z(J)$的模为

$$\begin{aligned}|Z(J)| &=(|Z(J)\bar{Z}(J)|)^{1/2}\\ &=(|a^2(J)-J^2b^2(J)|)^{1/2}.\end{aligned}$$

可见，与普通复数不同，所有的双曲复数 $a_H+\varepsilon b_H$ (a_H，b_H 为实数)只构成一个交换环(或称双曲复 Clifford 代数)，而不是域．

设 x^μ 代表通常四维几何空间 M 上的时空坐标，则 x^μ 满足$[x^\mu,x^\nu]=0$．但在超微观领域(即普朗克尺度 10^{-35} m 下)时空坐标具有不可对易性，满足非对易关系(1)式，这时相应的空间被称为非交换几何空间，用 M_θ 表示．非交换几何空间具有可结合的非交换代数结构．

令 $f(x)$和 $g(x)$是可交换几何空间 M 上的两个任意连续场函数，则 Moyal 星积定义如下：

$$\begin{aligned}&(f*g)(x):\\ &=\exp\Big[\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\Big]f(x)g(y)\Big|_{x=y=0}\\ &=f(x)g(x)+\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu f(x)\partial_\nu g(x)+O(\theta^2).\end{aligned}\tag{2}$$

若用 Moyal 星积替换空间 M 中场函数的普通乘积，则能构成可结合的非交换代数结构，形成非交换几何空间 M_θ．由此可将传统的可交换空间上的场论推广到非交换空间 M_θ，得到所谓的非交换场论(NCFT)[3,6]．如非交换平直空间上的杨-米尔斯场论就是一个很好的例证[12]．

对于 Einstein 的引力理论，度规张量 $g_{\mu\nu}(x^\mu)$是描述引力场性质的基本张量，它与标架(vierbein) e^a_μ 的关系如下：

$$g_{\mu\nu}=e^a_\mu e^b_\nu\eta_{ab},\tag{3}$$

这里 $a,b=0,1,2,3$ 表示洛仑兹(Lorentz)指标(或称内部指标)，η_{ab}是 Lorentz 度规，即 $\eta_{ab}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$．

利用 Moyal 星积，可将(3)式推广为

$$g_{\mu\nu}=e^a_\mu*e^b_\nu\eta_{ab}.\tag{4}$$

由(4)式可知，描述引力场的度规张量已被复数化(即 $g_{\mu\nu}$变成复度规张量场)，其流形不再是传统的实黎曼(Riemann)流形 M，而是一个具有可结合的非交换代数结构的空间——非交换几何空间 M_θ．

关于复度规(引力)的研究，Moffat 和 Chamseddine[14,15] 探讨并建立了复的对称和非对称引力理论．下面，利用二重复函数方法，深入研究具有复对称度规(非厄米的)的引力理论，并求出相应的静态球对称二重复度规的具体形式．进一步，将其推广到非交换空间 M_θ，建立一个二重非交换复对称的引力理论．

2. 二重复对称引力理论

2.1. 二重复对称引力场方程

设 $M(J)=(M_c,M_H)$代表一个二重复 Riemann 流形，其上的二重复对称度规表示为

$$g_{\mu\nu}(J)=A_{\mu\nu}(J)+JB_{\mu\nu}(J),\tag{5}$$

其中 $A_{\mu\nu}(J)$和 $B_{\mu\nu}(J)$都是二重实的对称张量．于是，标准 Riemann 几何的实微分同胚对称性在二重复坐标 $Z^\mu(J)=x^\mu(J)+Jy^\mu(J)$变换下被扩展到复的微分同胚对称性上．

若用 $e^a_\mu(J)$表示二重复标架，

$$e^a_\mu(J)=\mathrm{Re}(e^a_\mu(J))+J\mathrm{Im}(e^a_\mu(J)),$$

则 $g_{\mu\nu}(J)$可表示成

$$g_{\mu\nu}(J)=e^a_\mu(J)e^b_\nu(J)\eta_{ab}.\tag{6}$$

相应的二重复对称联络为

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(J)=\Delta^\lambda_{\mu\nu}(J)+J\Omega^\lambda_{\mu\nu}(J),\tag{7}$$

其中 $\Delta^\lambda_{\mu\nu}(J)$和 $\Omega^\lambda_{\mu\nu}(J)$是二重实的对称张量．进一步，由二重曲率张量的定义

$$\begin{aligned}R^\lambda_{\mu\nu\sigma}(J)=&-\partial_\sigma\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(J)+\partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}(J)+\Gamma^\lambda_{\rho\nu}(J)\Gamma^\rho_{\mu\sigma}(J)\\ &-\Gamma^\lambda_{\rho\sigma}(J)\Gamma^\rho_{\mu\nu}(J)\},\end{aligned}\tag{8}$$

并通过指标收缩可得到如下的二重 Ricci 曲率张量：

$$R_{\mu\nu}(J):=R^\sigma_{\mu\nu\sigma}(J)=Q_{\mu\nu}(J)+JP_{\mu\nu}(J),\tag{9}$$

我们能得到四个二重复的 Bianchi 恒等式：

$$\Big(R^{\mu\nu}(J)-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(J)R\Big)_{;\nu}=0.\tag{10}$$

选择如下的二重实作用量：

$$\begin{aligned}S_g(J)&=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4x(J)\Big[\mathscr{G}^{\mu\nu}(J)R_{\mu\nu}(J)\\ &\quad+(\mathscr{G}^{\mu\nu}(J)R_{\mu\nu}(J))^\dagger\Big]\\ &=\int\mathrm{d}^4x(J)\Big[\mathscr{A}^{\mu\nu}(J)Q_{\mu\nu}(J)\\ &\quad+J^2\mathscr{B}^{\mu\nu}(J)P_{\mu\nu}(J)\Big],\end{aligned}\tag{11}$$

其中 $\mathscr{G}^{\mu\nu}(J):=\sqrt{-g(J)}\,g^{\mu\nu}(J)=\mathscr{A}^{\mu\nu}(J)+J\mathscr{B}^{\mu\nu}$

(J)，符号'$\dagger$'表示复共轭. 通过 $S_g(J)$ 对 $\mathscr{A}^{\mu\nu}(J)$ 和 $\mathscr{B}^{\mu\nu}(J)$ 变分，可得到真空场方程如下：

$$Q_{\mu\nu}(J)=0,\ P_{\mu\nu}(J)=0, \tag{12}$$

这等价于复场方程

$$R_{\mu\nu}(J)=0. \tag{13}$$

2.2. 静态球对称线元的二重实解

设静态球对称二重复引力场中的线元取如下二重实形式：

$$\mathrm{d}S^2(J)=\alpha(r,J)\mathrm{d}t^2-\eta(r,J)\mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2), \tag{14}$$

其中 $\alpha(r,J)$ 和 $\eta(r,J)$ 只是 r 的二重实函数，而相应的二重复度规张量 $g_{\mu\nu}(J)$ 由下式决定：

$$\begin{aligned}
g_{00}(J)&=g_{00}(r,J)=\alpha(r,J)+J\beta(r,J),\\
g_{11}(J)&=g_{11}(r,J)=-[\eta(r,J)+J\xi(r,J)],\\
g_{22}(J)&=g_{22}(r)=-r^2,\\
g_{33}(J)&=g_{33}(r,\theta)=-r^2\sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{15}$$

将(14)和(15)式代入场方程中，求解后可得

$$\begin{aligned}
\alpha(r,J)&=\alpha(r)=1-\frac{2m_{(J)}}{r},\\
\beta(r,J)&=\beta(r)=\frac{2\sigma_{(J)}}{r},
\end{aligned} \tag{16}$$

其中 $m_{(J)}$ 和 $\sigma_{(J)}$ 是二重实的积分常数. 进一步，利用渐近平直条件

$$r\to\infty,\ \alpha(r)\to 1,\ \eta(r,J)\to 1,\ \beta(r)\to 0,\ \xi(r,J)\to 0,$$

并经过繁琐的计算得到

$$\begin{aligned}
\eta(r,J)&=\frac{1-\frac{2m_{(J)}}{r}}{\left(1-\frac{2m_{(J)}}{r}\right)^2-J^2\frac{4\sigma_{(J)}^2}{r^2}},\\
\xi(r,J)&=\frac{-\frac{2\sigma_{(J)}}{r}}{\left(1-\frac{2m_{(J)}}{r}\right)^2-J^2\frac{4\sigma_{(J)}^2}{r^2}}.
\end{aligned} \tag{17}$$

于是，我们得到二重复引力场静态球对称二重实线元以及二重复度规分量的具体形式如下：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S^2(J)&=\left(1-\frac{2m_{(J)}}{r}\right)\mathrm{d}t^2\\
&\quad-\frac{1-\frac{2m_{(J)}}{r}}{\left(1-\frac{2m_{(J)}}{r}\right)^2-J^2\frac{4\sigma_{(J)}^2}{r^2}}\mathrm{d}r^2\\
&\quad-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)
\end{aligned} \tag{18}$$

和

$$\begin{aligned}
g_{00}(r,J)&=\left(1-\frac{2m_{(J)}}{r}\right)+J\frac{2\sigma_{(J)}}{r},\\
g_{11}(r,J)&=-\frac{1-\frac{2m_{(J)}}{r}}{\left(1-\frac{2m_{(J)}}{r}\right)^2-J^2\frac{4\sigma_{(J)}^2}{r^2}}\\
&\quad+J\frac{\frac{2\sigma_{(J)}}{r}}{\left(1-\frac{2m_{(J)}}{r}\right)^2-J^2\frac{4\sigma_{(J)}^2}{r^2}},\\
g_{22}(r)&=-r^2,\\
g_{33}(r,\theta)&=-r^2\sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{19}$$

当 $J=\mathrm{i}$ 时，(18)和(19)式变成

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S^2(J=\mathrm{i})&=\mathrm{d}S_C^2\\
&=\left(1-\frac{2m_C}{r}\right)\mathrm{d}t^2\\
&\quad-\frac{1-\frac{2m_C}{r}}{\left(1-\frac{2m_C}{r}\right)^2+\frac{4\sigma_C^2}{r^2}}\mathrm{d}r^2\\
&\quad-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)
\end{aligned} \tag{18a}$$

和

$$\begin{aligned}
g_{00}(r,C)&=\left(1-\frac{2m_C}{r}\right)+\mathrm{i}\frac{2\sigma_C}{r},\\
g_{11}(r,C)&=-\frac{1-\frac{2m_C}{r}}{\left(1-\frac{2m_C}{r}\right)^2+\frac{4\sigma_C^2}{r^2}}\\
&\quad+\mathrm{i}\frac{\frac{2\sigma_C}{r}}{\left(1-\frac{2m_C}{r}\right)^2+\frac{4\sigma_C^2}{r^2}},\\
g_{22}(r)&=-r^2,\\
g_{33}(r,\theta)&=-r^2\sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{19a}$$

这正是文献[15]给出的结果. 由(18a)和(19a)式容易看出，当 $\sigma_C=0$ 时，它就自然退化为 Einstein 理论中著名的 Schwarschild 解.

但当 $J=\varepsilon$ 时，(18)和(19)式变为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S^2(J=\varepsilon)&=\mathrm{d}S_H^2\\
&=\left(1-\frac{2m_H}{r}\right)\mathrm{d}t^2\\
&\quad-\frac{1-\frac{2m_H}{r}}{\left(1-\frac{2m_H}{r}\right)^2-\frac{4\sigma_H^2}{r^2}}\mathrm{d}r^2\\
&\quad-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)
\end{aligned} \tag{18b}$$

和

和

$$g_{00}(r,H) = \left(1 - \frac{2m_H}{r}\right) + \varepsilon\frac{2\sigma_H}{r},$$

$$g_{11}(r,H) = -\frac{1-\frac{2m_H}{r}}{\left(1-\frac{2m_H}{r}\right)^2 - \frac{4\sigma_H^2}{r^2}} + \varepsilon\frac{\frac{2\sigma_H}{r}}{\left(1-\frac{2m_H}{r}\right)^2 - \frac{4\sigma_H^2}{r^2}},$$

$$g_{22}(r) = -r^2,$$

$$g_{33}(r,\theta) = -r^2\sin^2\theta. \tag{19b}$$

这是我们给出的新结果,在这里称其为双曲复对称引力场的静态球对称解. 由上述讨论不难看出:

1)此解是将二重复函数方法应用于复对称度规引力场中,而自然得到的一个新解,它是对 Moffat 结果(文献[15])的一个扩展.

2)该解的表达式(18b)和(19b)表明,这种双曲复对称时空度规具有两个引力"荷"$2m_H$ 和 $2\sigma_H$. 虽然其值与 Moffat 结果不同,但它同样能自然地过渡到广义相对论中标准的 Schwarschild 解. 可见,引力荷 m_H 为天体的质量,而 σ_H 的物理意义目前尚不清楚,有待进一步研究.

3)由于该解的双曲复性质 $g_{\mu\nu}(H) = A_{\mu\nu}(H) + \varepsilon B_{\mu\nu}(H)$,使得它在线性化的弱场近似下度规可表示为 $g_{\mu\nu}(H) = \eta_{\mu\nu}(H) + h_{\mu\nu}(H)$,其中 $h_{\mu\nu}(H) = p_{\mu\nu}(H) + \varepsilon k_{\mu\nu}(H)$. 于是,由文献[15]可知此时相应的线性化作用量 $S_g(H)$ 不再含有负能项[15],从而自动摆脱了引力场潜在的负能鬼态问题.

3. 二重非交换复对称引力理论

3.1. Moyal 星积的二重化

设 $x^\mu(J) = \{x_C^\mu, x_H^\mu\}$ 是二重四维空间 $M(J) = \{M_C, M_H\}$ 上的二重时空坐标,即满足 $[x^\mu(J), x^\nu(J)] = 0$. 若将上式推广为

$$[x^\mu(J), x^\nu(J)] = J\theta^{\mu\nu}(J). \tag{20}$$

则这时 $x^\mu(J)$ 代表二重非交换时空 $M_\theta(J)$ 上的"时空坐标",而 $\theta^{\mu\nu}(J)$ 是一个二重反对称实的常数张量 $\theta^{\mu\nu}(J) = -\theta^{\nu\mu}(J)$(或称二重形变张量). 容易看出,当二重纯虚单位 J 分别取 $J=\mathrm{i}$ 和 $J=\varepsilon$ 时,上式变成

$$[x_C^\mu, x_C^\nu] = \mathrm{i}\theta_C^{\mu\nu} \tag{20a}$$

和

$$[x_H^\mu, x_H^\nu] = \varepsilon\theta_H^{\mu\nu}. \tag{20b}$$

可见,(20a)式就是非交换时空 $M_\theta(c) = M_\theta$ 上普通(或椭圆)复坐标 x_C^μ 满足的非对易关系(1)式,而(20b)式表示非交换时空 $M_\theta(H)$ 上双曲复坐标 x_H^μ 具有的非对易性. 于是,根据前面的讨论可知二重非交换时空 $M_\theta(J)$ 上的场论可通过如下定义的二重 Moyal 星积"$*_{(J)}$"得到实现.

定义:

$$\begin{aligned}(F *_{(J)} G)[x(J)] :=& \exp\left[\frac{J}{2}\theta^{\mu\nu}_{(J)}\frac{\partial}{\partial x^\mu_{(J)}}\frac{\partial}{\partial y^\nu_{(J)}}\right] \\ &\times F[x(J)]G[y(J)]|_{x(J)=y(J)=0} \\ =& F[x(J)]G[x(J)] + \frac{J}{2}\theta^{\mu\nu}(J) \\ &\times \frac{\partial F[x(J)]}{\partial x^\mu_{(J)}}\frac{\partial G[x(J)]}{\partial x^\nu_{(J)}} \\ &\times F[x(J)]G[x(J)] \\ &+ \mathscr{O}(\theta^2(J)),\end{aligned} \tag{21}$$

其中 $F[x(J)]$ 和 $G[x(J)]$ 为二重四维空间 $M(J)$ 上的两个任意二重连续场函数.

当 $J=\mathrm{i}$ 时,(21)式变为

$$\begin{aligned}(F_C *_C G_C)(x) :=& F_C(x)G_C(x) \\ &+ \frac{\mathrm{i}}{2}\theta_C^{\mu\nu}\partial_\mu F_C(x)\partial_\nu G_C(x) \\ &+ \mathscr{O}(\theta_C^2),\end{aligned} \tag{21a}$$

其中 $F_C(x) := F[x(J=\mathrm{i})] = F(x_C)$, $G_C(x) := G[x(J=\mathrm{i})] = G(x_C)$,而 $*_C := *_{(J=\mathrm{i})}$ 正是通常的 Moyal 星积,即 $*_C = *$.

当 $J=\varepsilon$ 时,(21)式变为

$$\begin{aligned}(F_H *_H G_H)(x) :=& F_H(x)G_H(x) \\ &+ \frac{\varepsilon}{2}\theta_H^{\mu\nu}\partial_\mu F_H(x)\partial_\nu G_H(x) \\ &+ \mathscr{O}(\theta_H^2),\end{aligned} \tag{21b}$$

这里 $F_H(x) := F[x(J=\varepsilon)] = F(x_H)$, $G_H(x) := G[x(J=\varepsilon)] = G(x_H)$,而 $*_H := *_{(J=\varepsilon)}$ 是对 Moyal 星积的推广,在这里称 $*_H$ 为双曲 Moyal 星积. 可见,定义式(21)是 Moyal 星积的二重化形式.

3.2. 二重非交换复对称引力理论

首先利用二重 Moyal 星积 $*_{(J)}$ 来定义二重非交换时空 $M_\theta(J)$ 上的二重复对称度规如下:

$$g_{\mu\nu}(J) := e_{\mu}^{a}(J) *_{(J)} e_{\nu}^{b}(J)\eta_{ab}, \tag{22}$$

其中 $e_{\mu}^{a}(J)$代表二重复标架，

$$e_{\mu}^{a}(J) = \mathrm{Re}(e_{\mu}^{a}(J)) + J\mathrm{Im}(e_{\mu}^{a}(J)).$$

其次，设 $\omega_{\mu}(J)$和 $R_{\mu\nu}(J)$分别代表与 $g_{\mu\nu}(J)$相应的二重复自旋联络和二重复曲率，而 $SO_{*}(1,3,J)$代表二重非交换复正交变换群，即 $J=\mathrm{i}$ 时，$SO_{*}(1,3,J=\mathrm{i}) = SO_{*}(1,3,C) \equiv SO_{*}(1,3)$. 它正是 Moffat 理论[15]中的非交换普通复 Lorentz 群;而 $J=\varepsilon$ 时，$SO_{*}(1,3,J=\varepsilon) = SO_{*}(1,3,H)$是非交换双曲复正交群[15].

设 $M_{*}(J)$是 $SO_{*}(1,3,J)$中任一元素，即 $M_{*}(J)\in SO_{*}(1,3,J)$，则可证明在 $M_{*}(J)$变换下，$\omega_{\mu}(J)$和 $R_{\mu\nu}(J)$具有如下的变换规律：

$$\omega_{\mu}(J) \to \omega'_{\mu}(J) = M_{*}(J) *_{(J)} \omega_{\mu}(J) *_{(J)} M_{*}^{-1}(J) - \partial_{\mu}M_{*}(J) *_{(J)} M_{*}^{-1}(J),$$

$$R_{\mu\nu}(J) \to R'_{\mu\nu}(J) = M_{*}(J) *_{(J)} R_{\mu\nu}(J) *_{(J)} M_{*}^{-1}(J), \tag{23}$$

其中 $R_{\mu\nu}(J)$与 $\omega_{\mu}(J)$之间的关系为

$$R_{\mu\nu}(J) = \partial_{[\mu}\omega_{\nu]}(J) + [\omega_{\mu}(J), \omega_{\nu}(J)]_{*(J)}, \tag{24}$$

这里$[\omega_{\mu}(J), \omega_{\nu}(J)]_{*(J)} := \omega_{\mu}(J) *_{(J)} \omega_{\nu}(J) - \omega_{\nu}(J) *_{(J)} \omega_{\mu}(J)$. 于是，能构造出相应的二重非交换引力场的实作用量为

$$S_{*g(J)} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4 x(J)\Big[e(J) *_{(J)} e_{a}^{\mu}(J) *_{(J)} \times R_{\mu\nu a}^{b}(J) *_{(J)} e^{\nu b}(J) + \mathrm{compl.conj.}\Big], \tag{25}$$

其中 $e(J) = \sqrt{-g(J)}$，而‘compl. conj.’代表中括号里第一项的普通复共轭.

当 $J=\mathrm{i}$ 时，$S_{g(J=\mathrm{i})} = S_{g(C)}$，这与 Moffat 给出的结果一致. 而对于 $J=\varepsilon$ 时的情况，二重复作用量 $S_{*g(J)}$化为

$$S_{g(J=\varepsilon)} = S_{g(H)} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4 x_H\Big[e_H *_H e_{a}^{\mu}(H) *_H R_{\mu\nu a}^{b}(H) *_H e^{\nu b}(H) + \mathrm{hyper.compl.conj.}\Big], \tag{26}$$

其中‘hyper. compl. conj.’代表中括号里第一项的双曲复共轭.(26)式是本文给出的非交换双曲复对称引力场的作用量.

Bonora 等人[22]指出若对引力规范势强加某些约束条件，则在形变参量 $\theta(J)\to 0$ 时，由作用量 $S_{g(C)}$导出的非交换引力场方程能退化到标准的经典引力理论. 由此表明由二重作用量 $S_{*g(J)}$建立的二重非交换复对称引力理论已将经典的引力理论作为极限包含其中.

可见，利用二重复函数理论[19,20]，通过将 Moyal 星积二重化，我们能构造出二重化的非交换复对称引力作用量，从而可建立相对应的非交换二重复对称引力理论. 可以证明该理论在非交换二重复正交群 $SO_{*}(1,3,J)$变换下具有局域不变性.

4. 结 论

利用二重复函数理论，通过引入二重复对称度规(5)式，我们建立了二重复对称引力理论. 具体地，从一个二重实的作用量(14)出发，求出了静态球对称二重复度规的具体形式. 该理论中存在两种引力‘荷’$2m_{(J)}$和 $2\sigma_{(J)}$. 当 $\sigma_{(J)}=0$ 时，它自动退化为 Einstein 理论中著名的 Schwarzschild 解. 并且，该理论当取 $J=\mathrm{i}$ 时与 Moffat 给出的结果相一致;而当取 $J=\varepsilon$ 时就自然地得到了双曲复引力理论. 由于度规的双曲复性质，在线性化的弱场近似下，该理论自动摆脱了 Moffat 理论中存在的负能鬼态问题.

进一步，通过将二重复坐标推广到满足非对易关系(20)式，并将 Moyal 星积化为二重形式，我们得到了二重非交换几何空间 M_{θ} 上具有 $SO_{*}(1,3,J)$局域不变性的二重非交换复对称引力理论.

然而，如何能运用上述二重非交换复引力理论，构造出一个简化的非交换引力模型，并给出相对应的二重非交换变换群的具体表示？这正是我们下一步深入探讨的研究内容.

[1] Schwarz J H 1997 *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **55** B 1

[2] Lizzi F 2000 *Inter. J. Mod. Phys.* **14** 2383

[3] Ho P M and Wu Y S 1998 *Phys. Rev.* D**58** 066003

[4] Connes A 1994 *Noncommutative Geometry* (Academic press, Paris)

[5] Chu C S and Ho P M 1999 *Nucl. Phys.* B **550** 151

[6] Ho P M and Wu Y S 1997 *Phys. Lett.* B **398** 52

[7] Yoneya T 1989 *Mod. Phys. Lett.* A **4** 1587
[8] Li M 2001 *Phys. Rev.* D **63** 086002
[9] Brandenberger R and Ho P M 2002 *Phys. Rev.* D **66** 023517
[10] Chen G H 2001 *Phys. Rev.* D **63** 086003
[11] Moyal J E 1949 *Proc. Camb. Phil. Soc.* **45** 99
[12] Li M and Wu Y S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2084
[13] Douglas M R and Nekrasov N A 2002 *Rev. Mod. Phys.* **73**
[14] Chamseddine A H 2001 *Int. J. Mod. Phys.* A **16**
[15] Moffat J W 2000 *Phys. Lett.* B **491** 345
[16] Grandi N and Silva G A 2001 *Phys. Lett.* B **507**
[17] Cacciatori S *et al* 2002 *Class. Quant. Grav.* **19** 4029
[18] Zhong Z Z 1985 *J. Math. Phys.* **26** 2589
[19] Wu Y B and Gui Y X 1999 *Gen. Rel. Grav.* **31** 165
[20] Wu Y B 1998 *Int. J. Theor. Phys.* **37** 2127
[21] Wu Y B and Guo Y X 2002 *Commun. Theor. Phys.* **37** 663
[22] Bonora L, Schnabel M, Sheik-Jabbari M M and Tomasiello A 2000 *Nucl. Phys.* B **589** 461
[23] Chen J H, Jing J L and Wang Y J 2001 *Chin. Phys.* **10** 1071
[24] Zhao Z, Liu W B and Jiang Y L 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 591 (in Chinese) [赵 峥、刘文彪、蒋亚铃 2000 物理学报 **49** 591]
[25] Wang Y J and Tang Z M 2001 *Chin. Phys.* **10** 679
[26] Gao Y J and Gui Y X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 420 (in Chinese) [高亚军、桂元星 2000 物理学报 **49** 420]

The double noncommutative spacetime and the double complex symmetric gravitational theory*

Wu Ya-Bo[1)] Shao Ying[2)] Dong Peng[1)]
[1)] (*Department of Physics, Liaoning Normal University, Dalian* 116029, *China*)
[2)] (*Department of Physccs, Dalian University of Science and Technology, Dalian* 116023, *China*)
(Received 16 October 2003; revised manuscript received 16 January 2004)

Abstract

In this paper, the double complex symmetric gravitational theory is established and the concrete expression of the static spherically symmetric double complex metrics is derived by introducing the double complex symmetric metric tensors. In this theory the Moffat's results are extended, the hyperbolic complex symmetric gravitational theory is naturally obtained and the famous Schwarzchild solution is contained as the special case. Moreover, in the linearized weak field approximation the hyperbolic complex symmetric gravitational theory can automatically free from the potential problem of negative energy ghost states. Furthermore, the double complex symmetric gravitational action in the double noncommutative spacetime can be constructed by extending the double complex coordinates to the double noncommutative relation satisfied and doubling the Moyal star product.

Keywords: noncommutative geometry, complex symmetric metrics, noncommutative coordinates, action of gravitational fields
PACC: 0420C, 0420J, 0240

* Project supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20032102).