第 53 卷 第 9 期 2004 年 9 月
1000-3290/2004/53(09)/2964-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.9, September, 2004

开普勒径向方程的赝角动量解法及其归一化本征态和相干态

李文博 李克轩
(北京交通大学物理系,北京 100044)

(2003 年 6 月 10 日收到;2003 年 11 月 18 日收到修改稿)

用赝角动量方法直接求解球坐标下束缚态开普勒径向方程. 给出本征态的解析表达式,其中归一化问题比较特殊,需要格外细致;同时给出相应的相干态.

关键词:开普勒径向方程,赝角动量方法,本征值谱,本征函数,相干态
PACC:4250,0365

1. 引 言

文献[1]提出用赝角动量方法给出同调谐振子的严格解,并澄清以往文献中[2—4]用其他方法求解同调谐振子中的一些基本问题. 同调谐振子在讨论量子光学中的相关问题有较为重要的地位[5—11]. 文献[12]进一步给出同调谐振子的几种变形,其中包括三维各向同性谐振子的径向方程、开普勒问题球坐标下的径向方程、开普勒问题抛物线方程、Morse 势的 s 态问题等,显示了同调谐振子具有一定的普适性.

本文用赝角动量方法直接求解球坐标下束缚态开普勒径向方程. 给出本征态的具体表达式,其中归一化问题比较特殊,需要格外的小心细致,同时给出相应的相干态.

2. 开普勒径向问题的赝角动量算符体系

类氢原子束缚态是典型的开普勒问题,其径向方程为

$$HR(r) = ER(r),$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{r\mathrm{d}r^2}r + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{Ze_s^2}{r},$$

$$E < 0, l = 0,1,2,\cdots \tag{1}$$

其中 $e_s^2 = e^2/4\pi\varepsilon_0$,$m$ 和 Z 分别是类氢原子电子的质量、核电荷数,e 为电子电量的绝对值,ε_0 为真空电容率,l 为角动量量子数.

我们的目的是求解本征值 E 和束缚态 $R(r)$. 为了使方程(1)无量钢化,设

$$n = \sqrt{-mZ^2e_s^2/2E\hbar^2},$$

$$\alpha \equiv \sqrt{-8mE/\hbar^2}, \xi = \alpha r, \tag{2}$$

方程(1)可化为

$$A_3R(r) = nR(r),$$

$$A_3 = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\xi + \frac{1}{4}\xi + \frac{l(l+1)}{\xi}. \tag{3}$$

方程(3)和方程(1)是等价的. 求解本征值 E 归于求 n,使用赝角动量方法的关键是引入算符 A_1 和 A_2 并定义 A^2 为

$$A_1 = \mathrm{i}\left(A_3 - \frac{1}{2}\xi\right),$$

$$A_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi,$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2. \tag{4}$$

不难证明 A_1, A_2, A_3 具有类似角动量分量的对易关系.

$$[A_1, A_2] = \mathrm{i}A_3, [A_2, A_3] = \mathrm{i}A_1,$$

$$[A_3, A_1] = \mathrm{i}A_2, [A^2, A_k] = 0;$$

$$(k = 1,2,3). \tag{5}$$

构造广义产生算符 A^+ 和广义湮没算符 A 为

$$A^+ = -\mathrm{i}A_1 + A_2, A = -\mathrm{i}A_1 - A_2, \tag{6}$$

则有关系式

$$A^+A = A_3(A_3 - 1) - A^2,$$

$$AA^+ = A_3(A_3 + 1) - A^2. \tag{7}$$

我们只给出(5)式中第一式的证明,其余证明留给有兴趣的读者,然后具体计算一下(4)式中的

A^2.

$$
\begin{aligned}
[A_1, A_2] &= \mathrm{i}\left[A_3 - \frac{1}{2}\xi, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi\right] \\
&= \mathrm{i}\left[A_3, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi\right] - \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\xi, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi\right] \\
&= \mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi, \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\xi\right] \\
&\quad + \mathrm{i}\left[\frac{\xi}{4} + \frac{l(l+1)}{\xi}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi\right] + \frac{\mathrm{i}}{2}\xi \\
&= -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\xi - \frac{\mathrm{i}}{4}\xi + \mathrm{i}\frac{l(l+1)}{\xi} + \frac{\mathrm{i}}{2}\xi \\
&= \mathrm{i}A_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^2 &= -A_3^2 - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{2}(A_3\xi + \xi A_3) \\
&\quad + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi + A_3 \\
&= -\frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\xi^2 + \xi\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\xi\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}\xi^2 + l(l+1) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi \\
&= l(l+1) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\xi, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right]\xi \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}, \xi\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi \\
&= l(l+1).
\end{aligned} \tag{8}
$$

将(4)式的头两式代入(6)式构造了产生算符和湮没算符的具体形式

$$
\begin{aligned}
A^+ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi - \frac{1}{2}\xi + A_3, \\
A &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi - \frac{1}{2}\xi + A_3.
\end{aligned} \tag{9}
$$

由(3)式,设 A^+ 和 A 只作用于本征态 $R_n(\xi)$ 上,则(9)式化为

$$
\begin{aligned}
A_n^+ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi - \frac{1}{2}\xi + n, \\
A_n &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi - \frac{1}{2}\xi + n.
\end{aligned} \tag{10}
$$

注意,(9)式的算符可以作用于任意态函数上,而(10)式的算符只能作用于本征态 $R_n(\xi)$ 上,(9)式使用的范围更广. A^+ 和 A 将根据它们作用的本征态而自动显示下标,例如

$$
\begin{aligned}
AR_n(\xi) &= A_nR_n(\xi), \\
A^+R_{n+1}(\xi) &= A_{n+1}^+R_{n+1}(\xi), \\
A(R_n + R_{n+1}) &= A_nR_n(\xi) + A_{n+1}R_{n+1}(\xi)
\end{aligned}
$$

等等. 将(7)式的两边同时作用于本征态 $R_n(\xi)$ 上,同时考虑到(3)式和(8)式,则有

$$
\begin{aligned}
AA^+R_n(\xi) &= [n(n+1) - l(l+1)]R_n(\xi), \\
A^+AR_n(\xi) &= [n(n-1) - l(l+1)]R_n(\xi),
\end{aligned} \tag{11}
$$

这两个方程与方程(1)和(3)等价.

3. 本征值及本征态的递推关系

由(11)式显然可以推知

$$
\begin{aligned}
A_n^+R_n(\xi) &= a_n^+R_{n+1}(\xi), \\
A_nR_n(\xi) &= a_nR_{n-1}(\xi),
\end{aligned} \tag{12}
$$

其中 a_n^+ 和 a_n 是为了保证(12)式两边的本征函数均归一化而配置的待定常数. 通常人们也把 A^+ 和 A 称为本征值和本征函数的升降算符. 由(12)式可见本征值 n 是逐一变动的,即有

$$
n = n_0,\ n_0 + 1, n_0 + 2, \cdots \tag{13}
$$

由于(2)式中 $n > 0$,可见 n 有下限,(13)式已经取 n 的最小值为 n_0. 设属于本征值 n_0 的本征态为 $R_{n_o}(\xi)$,显然 $R_{n_0-1}(\xi)$ 恒为零,即

$$
A_{n_0}R_{n_0}(\xi) = 0. \tag{14}
$$

此式右边的零表示恒为零,表示不存在的状态;而这里的 $R_{n_o}(\xi)$ 不恒为零. 显然把(14)式进一步写成 $A^+A_{n_0}R_{n_0}(\xi) = 0$ 仍成立,将(11)式的第二式中的 n 换成 n_0,有

$$
[n_0(n_0 - 1) - l(l+1)]R_{n_0}(\xi) = 0,
$$

由于 $R_{n_0}(\xi)$ 不恒为零,此式成立的必要条件是 $n_0(n_0 - 1) - l(l+1) = 0$,可解出

$$
n_0 = l + 1 \text{ 和 } n_0 = -l(\text{舍去}). \tag{15}
$$

将后一个可能值舍去,是因为(2)式中 $n_0 > 0$ 的物理要求. 于是我们得出 $n = l+1, l+2, \cdots$

由(1)式知 $l = 0,1,2,3,\cdots$,因此可有

$$
n = 1,2,3,\cdots;\quad l = 0,1,2,3,\cdots, n-1. \tag{16}
$$

代入(2)式的第一式和第二式即得类氢原子的玻尔能级

$$
\begin{aligned}
E_n &= -\frac{Z^2e_s^2}{2an^2}, \\
a &= \frac{\hbar^2}{me_s^2}, \\
\xi &= \frac{2Z}{na}r.
\end{aligned} \tag{17}
$$

为了下文的方便,这里顺便给出玻尔半径 a 和参数 ξ 的表示.

至此,我们应明确一下有关算符和函数的下标.

例如 $R_n(\xi)=R_{nl}(\xi)$，$A_n=A_{nl}$，$A_n^+=A_{nl}^+$，$a_n^+=a_{nl}^+$，$a_n=a_{nl}$，由于本文中 l 的值是给定的，因此有时下标 l 并不明显标出. 由于(16)式，可将(11)式写成

$$A_{n-1}^+A_nR_{nl}(\xi)=(n+l)(n-l+1)R_{nl}(\xi),$$
$$A_{n+1}A_n^+R_{nl}(\xi)=(n-l)(n+l+1)R_{nl}(\xi).\quad(18)$$

4. 归一化本征态的解析表达式

为了下文的方便，将(11)式写成

$$A_n^+=\mathrm{e}^{\xi/2}\xi^{-n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi^{n+1}\mathrm{e}^{-\xi/2},$$
$$A_n=-\mathrm{e}^{-\xi/2}\xi^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi^{-(n-1)}\mathrm{e}^{\xi/2}.\quad(19)$$

这种写法与(10)式写法的等效性，请读者自己证明. 由于(15)式 $n_0=l+1$，则(14)式可写成 $A_{l+1}R_{l+1,l}(\xi)=0$，考虑到(19)式的第二式有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi^{-l}\mathrm{e}^{\xi/2}R_{l+1,l}(\xi)=0.\quad(14')$$

由此可解出

$$R_{l+1,l}(\xi)=N_{l+1,l}\xi^l\mathrm{e}^{-\xi/2},$$
$$N_{l+1,l}=\left[\frac{2Z}{(l+1)a}\right]^{3/2}\frac{1}{\sqrt{(2l+2)!}},\quad(20)$$

其中 $N_{l+1,l}$ 为已经算出的归一化常数，当 $l=0$ 时，即为基态. 强调一下，本文中出现的本征态均为已经归一化的，即

$$\int R_{nl}^2(\xi)r^2\mathrm{d}r=1$$

或

$$\int R_{nl}^2(\xi)\xi^2\mathrm{d}\xi=\left(\frac{2Z}{na}\right)^3,$$
$$\xi=\xi_n=\frac{2Z}{na}r.\quad(21)$$

本文的积分限皆为从 0 到 ∞. 这里的最后一式要细心，若本征态有变化，其自变量将自动随之变化，例如，$R_{n+1,l}(\xi_{n+1})$ 等等.

实际上需要十分细致，稍有疏忽就很容易出毛病，下面马上就会遇到这样的情况. 为了计算归一化 $R_{nl}(\xi)$ 的一般表达式，将(18)式的第二式两边左乘以 $\xi^2R_{nl}(\xi)$，

$$\xi^2R_{nl}(\xi)A_{n+1}A_n^+R_{nl}(\xi)$$
$$=(n-1)(n+l+1)\xi^2R_{nl}^2(\xi),$$

考虑到(12)式的第一式，上式化为

$$a_n^+\xi^2R_{nl}(\xi)A_{n+1}R_{n+1,l}(\xi)$$
$$=(n-l)(n+l+1)\xi^2R_{nl}^2(\xi),\quad(22)$$

然后再将(22)式两边对 ξ 积分，这就需要对 $\mathrm{d}\xi$ 有个基本的判断，是 $\mathrm{d}\xi_n$ 还是 $\mathrm{d}\xi_{n+1}$. 很明显右边需要的是 $\mathrm{d}\xi_n$，而左边尚不明显. 下面的演化将明示左边需要的是 $\mathrm{d}\xi_{n+1}$. 对(22)式积分时两边的微分如果都写成 $\mathrm{d}\xi_n$，则为

$$a_n^+\int\xi^2R_{nl}(\xi)A_{n+1}R_{n+1,l}(\xi)\mathrm{d}\xi_n$$
$$=(n-l)(n+l+1)\int\xi^2R_{nl}^2(\xi)\mathrm{d}\xi_n,\quad(23)$$

显然(23)式右边为

$$\text{右边}=\left(\frac{2Z}{na}\right)^3(n-1)(n+l+1).\quad(24)$$

下面处理(23)式左边，必须注意到由(17)式有

$$n\mathrm{d}\xi_n=(n+1)\mathrm{d}\xi_{n+1},\quad(25)$$

并考虑到(19)式的第二式

$$\text{左边}=a_n^+\int\xi^2R_{nl}(\xi)\left[-\mathrm{e}^{-\xi/2}\xi^{n+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi^{-n}\mathrm{e}^{\xi/2}\right]$$
$$\times R_{n+1,l}(\xi)\frac{n+1}{n}\mathrm{d}\xi_{n+1}$$
$$=a_n^+\frac{n+1}{n}\int\xi^2R_{n+1,l}(\xi)$$
$$\times\left[\mathrm{e}^{\xi/2}\xi^{-(n+2)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\xi^{n+3}\mathrm{e}^{-\xi/2}R_{nl}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi$$
$$=a_n^+\frac{n+1}{n}\int\xi^2R_{n+1,l}(\xi)$$
$$\times[A_{n+2}^+R_{nl}(\xi)]\mathrm{d}\xi,\quad(26)$$

由 A^+ 和 A 的(10)式构造形式，显然有

$$A_{n+k}^+=A_n^++k,$$
$$A_{n+k}=A_n+k,\quad(27)$$

于是(26)式为

$$\text{左边}=a_n^+\frac{n+1}{n}\int\xi^2R_{n+1,l}(\xi)[A_n^+R_{nl}(\xi)]\mathrm{d}\xi$$
$$+2a_n^+\int\xi^2R_{nl}(\xi)R_{n+1,l}(\xi)\mathrm{d}\xi$$
$$=a_n^+a_n^+\frac{n+1}{n}\int\xi^2R_{n+1,l}(\xi)\mathrm{d}\xi+0$$
$$=(a_n^+)^2\frac{n+1}{n}\left[\frac{2Z}{(n+1)a}\right]^3.\quad(28)$$

这里实际上明示了前面提到的一个问题：升降算符会随着它所作用的本征态而自动选择其下标，使其下标与它所作用的本征态的下标相一致，由(28)式可见，这个性质与本征函数集的正交性有密切联系. (28)式的中间一步的后一项积分为零，是由于本征函数的正交性. 从最后一步明显看出这里的 $\mathrm{d}\xi=\mathrm{d}\xi_{n+1}$，此式与(25)式相一致，得到

$$a_n^+ = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \sqrt{(n-l)(n+l+1)},$$

$$A_n^+ R_n(\xi) = a_n^+ R_{n+1}(\xi), \tag{29}$$

于是(12)式的第一式表为

$$R_{nl}(\xi) = \frac{A_{n-1}^+}{a_{n-1}^+} R_{n-1,l}(\xi)$$

$$= \frac{A_{n-1}^+ A_{n-2}^+ \cdots A_{l+1}^+}{a_{n-1}^+ a_{n-2}^+ \cdots a_{l+1}^+} R_{l+1,l}(\xi). \tag{30}$$

仔细地计算

$$A_{n-1}^+ A_{n-2}^+ \cdots A_{l+1}^+$$

$$= \left[\xi^{-(n-1)} e^{\xi/2} \frac{d}{d\xi} e^{-\xi/2} \xi^n\right]$$

$$\times \left[\xi^{-(n-2)} e^{\xi/2} \frac{d}{d\xi} e^{-\xi/2} \xi^{n-1}\right] \cdots$$

$$\times \left[\xi^{-(l+1)} e^{\xi/2} \frac{d}{d\xi} e^{-\xi/2} \xi^{l+2}\right]$$

$$= e^{\xi/2} \xi^{-n} \left(\xi \frac{d}{d\xi} \xi\right)^{n-l-1} \xi^{l+1} e^{-\xi/2}, \tag{31}$$

$$a_{n-1}^+ a_{n-2}^+ \cdots a_{l+1}^+$$

$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \sqrt{(n-l-1)(n+1)}$$

$$\times \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^2 \sqrt{(n-l-2)(n+l+1)} \cdots$$

$$\times \left(\frac{l+2}{l+1}\right)^2 \sqrt{2l+2}$$

$$= \left(\frac{n}{l+1}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{n}{l+1} \frac{(n-l-1)!(n+l)!}{(2l+1)!}}. \tag{32}$$

将(31),(32)和(20)式代入(30)式整理得到归一化的本征态函数

$$R_{nl}(\xi) = \left(\frac{2Z}{na}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2n(n-l-1)!(n+l)!}}$$

$$\times e^{\xi/2} \xi^{-n} \left(\xi \frac{d}{d\xi} \xi\right)^{n-l-1} \xi^{2l+1} e^{-\xi},$$

$$\xi = \frac{2Z}{na} r. \tag{33}$$

由(29)式和(12)式,可推得 a_n 的表达式,可将(12)式具体表成

$$A^+ R_{nl}(\xi) = a_n^+ R_{n+1,l}(\xi),$$

$$a_n^+ = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \sqrt{(n-l)(n+l+1)},$$

$$A R_{nl}(\xi) = a_n R_{n-1,l}(\xi),$$

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \sqrt{(n+l)(n-l-1)}. \tag{34}$$

至此我们完成了开普勒径向方程的本征值问题,我们没有使用大家熟知的方法,而是采用赝角动量方法,这种方法有显然的诸多优点.例如,可以避免求解二阶微分方程,我们只遇到一个简单的一阶微分方程(14),可以给出本征函数的解析表达式,可以很准确地处理归一化问题.更有意义的是,我们得到了一对广义产生算符和广义湮没算符,可以用来研究相干态等光场的量子统计特性,下面就是一例.

5. 相干态

按照相干态的定义

$$A|z\rangle = z|z\rangle, \tag{35}$$

其中湮没算符 A 按照(10)式的一般形式给出, z 为复变量, $|z\rangle$为相干态,为给出$|z\rangle$的表达,将$|z\rangle$用本征态 $R_{nl}(\xi)$的叠加态表出

$$|z\rangle = \sum_{n=l+1}^{\infty} C_n |n\rangle,\text{其中}\langle r|n\rangle = R_{nl}(\xi). \tag{36}$$

这里的量子数 l 没有在$|n,l\rangle$中表出,只把$|n,l\rangle$表示为$|n\rangle$,其中 C_n 待定.为了确定 C_n,将(36)式分别代入(35)式的两边.

对于(35)式左边

$$A|z\rangle = \sum_{n=l+2}^{\infty} C_n A|n\rangle$$

$$= \sum_{n=l+1}^{\infty} C_n a_n |n-1\rangle$$

$$= \sum_{n=l+2}^{\infty} C_{n+1} a_{n+1} |n\rangle, \tag{37}$$

对于(35)式右边,有

$$z|z\rangle = \sum_{n=l+2}^{\infty} C_n z |n\rangle. \tag{38}$$

比较(37)和(38)式,得到 C_n 的递推关系,在此一并递推到底.

$$C_n = \frac{z}{a_n} C_{n-1}$$

$$= \frac{z^{n-l-1}}{a_n a_{n-1} \cdots a_{l+2}} C_{l+1} \tag{39}$$

代入(36)式并考虑到(34)式中 a_n 的具体表达式,得到

$$|z\rangle = D_l \sum_{n=l+2}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{\sqrt{(n+l)!(n-l-1)!}} |n\rangle,$$

$$D_l = \frac{\sqrt{(2l+1)!}}{(l+1)^2 z^{l+1}} C_{l+1}, \tag{40}$$

其中 D_l 或 C_{l+1}由归一化$\langle z|z\rangle = 1$确定.即 D_l 满足

$$|D_l|^2 = \Gamma^{-1},$$

$$\Gamma = \sum_{n=l+2}^{\infty} \frac{n^4 x^n}{(n+l)!(n-l-1)!}, x = |z|^2. \quad (41)$$

在相干态$|z\rangle$中 A_3 的期望值为

$$\overline{A_3} = \langle z|A_3|z\rangle$$
$$= \frac{1}{\Gamma}\sum_{n=l+2}^{\infty} \frac{n^5 x^n}{(n+l)!(n-l-1)!}$$
$$= \frac{\partial(\ln\Gamma)}{\partial(\ln x)}. \quad (42)$$

事实上$\overline{A_3}$可以理解成在相干态$|z\rangle$中的平均粒子数.

下面证明这里的相干态$|z\rangle$也是最小不确定态.为此先计算出

$$\bar{A} = \langle z|A|z\rangle = z,$$
$$\overline{A^+} = \langle z|A^+|z\rangle = z^*; \quad (43)$$
$$[A, A^+] = 2A_3.$$

下面计算共轭量 $P = A^+ + A$ 和 $Q = \mathrm{i}(A^+ - A)$的不确定度

$$\bar{P} = z^* + z,$$
$$\bar{Q} = \mathrm{i}(z^* - z),$$
$$\overline{p^2} = \overline{(A^+ + A)^2}$$
$$= \overline{A^{+2}} + \overline{A^2} + \overline{A^+A + AA^+}$$
$$= z^{*2} + z^2 + 2\overline{A^+A} + 2\overline{A_3}$$
$$= z^{*2} + z^2 + 2|z|^2 + 2\overline{A_3},$$
$$\overline{(\Delta P)^2} = \overline{P^2} - \bar{p}^2$$
$$= 2\overline{A_3},$$
$$\overline{(\Delta Q)^2} = \overline{Q^2} - \bar{Q}^2$$
$$= 2\overline{A_3},$$
$$\Delta P \Delta Q = 2\overline{A_3}. \quad (44)$$

由于

$$[P, Q] = [A^+, Q] + [A, Q]$$
$$= \mathrm{i}[A^+, A^+ - A] + \mathrm{i}[A, A^+ - A]$$
$$= \mathrm{i}[A, A^+] + \mathrm{i}[A, A^+] = \mathrm{i}4A_3,$$

按照不确定关系,应有

$$\Delta P \Delta Q \geqslant 2\overline{A_3}. \quad (45)$$

(44)式的计算结果显示,在上式中应取等号,因此上述相干态也是最小不确定态.

顺便给出 A 的相干态的另一种表达式

$$|z\rangle = C_{l+1}(2l+1)!$$
$$\times \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{(zA)^n}{(n+l)!(n-l-1)!}|l+1\rangle. \quad (46)$$

无论是这里的相干态还是 A_3 的期望值以及不确定度,不仅都与复变量 z 有关,而且也与量子数 l 有关.这是值得研究的.

6. 结 论

用赝角动量方法求解本征值问题,有诸多优点.首先这种方法避开了求解二阶微分方程,只解一个简单的一阶微分方程,使整个求解过程代数化;可以得到本征函数的解析表达式,也避免了使用不尽人意的级数形式.本文研究的开普勒径向问题就是一个具体的模型.其次,可以揭示体系中的诸多对称性.更重要的是,得到了一种广义产生算符和广义湮没算符,可以用来研究相干光场的量子统计行为.本文给出了相应的相干态,展示一下这方面可开展的工作.Perelomov 和 Gerry 等人,已经从群理论的角度研究过 $SU(1,1)$代数之下的本征值问题和相干态问题,例如文献[13—18]等,然而这些研究无法给出态的具体的解析表达式,而且尚没有涉及到开普勒问题.赝角动量方法是 $SU(1,1)$代数的一种具体的表示,可以简洁并直截了当地解决一些具体体系,本文涉及的开普勒问题就是一个具体的体系.

[1] Li W B 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2356(in Chinese)[李文博 2001 物理学报 **50** 2356]

[2] Zhu D P 1987 *J*. *Phys*. A **20** 4331

[3] Landau L D and Lifshitz E M 1958 *Quantum Mechanics*(Oxford: Pergamon) p5

[4] Zhang J L *et al* 2000 *Acta Quantum Opt*. *Sin*. **6** 18(in Chinese)[章介伦 等 2000 量子光学学报 **6** 18]

[5] Ni Z X 1997 *Acta Phys*. *Sin*. **46** 1687(in Chinese)[倪致祥 1997 物理学报 **246** 1687]

[6] Yu Z X *et al* 1997 *Acta Phys*. *Sin*. **46** 1693(in Chinese)[于肇贤 等 1997 物理学报 **46** 1693]

[7] Liu Y W *et al* 1999 *Acta Quantum Opt*. *Sin*. **5** 73 (in Chinese)[刘友文 等 1999 量子光学学报 **5** 73]

[8] Chen C Y *et al* 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 536(in Chinese)[陈昌远 等 1998 物理学报 **47** 536]

[9] Xu Z W 1996 *Acta Phys*. *Sin*. **45** 1807(in Chinese)[徐子玟 1996 物理学报 **45** 1807]

[10] Chen C Y 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 607 (in Chinese) [陈昌远 2000 物理学报 **49** 607]

[11] Hou C F *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 385 (in Chinese) [侯春风等 1999 物理学报 **48** 385]

[12] Li W B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 547 (in Chinese) [李文博 2002 物理学报 **51** 547]

[13] Perelomov A M 1972 *Commun. Math. Phys.* **26** 222

[14] Gerry C C 1986 *Phys. Rev.* A **35** 2146

[15] Gerry C C 1985 *Phys. Rev.* A **31** 2721

[16] Gerry C C and Silverman S 1982 *J. Math. Phys.* **23** 1995

[17] Gerry C C 1984 *Phys. Lett.* **142 B**, 391

[18] Gerry C C 1986 *Phys. Rev.* A **33** 2207

Solution of radial equation of Kepler's problem by pseudo-angular-momentum method and normalization of eigenstate and coherent state

Li Wen-Bo Li Ke-Xuan

(*Department of Physics, Beijing Jiaotong University, Beijing* 100044, *China*)

(Received 10 June 2003; revised manuscript received 18 November 2003)

Abstract

By using the pseudo-angular-momentum method, the radial equation for bound state of Kepler's problem is solved and the analytic expression for eigenstate is derived. The result shows that the normalization of eigenfunction that should be done carefully is quite peculiar. The corresponding coherent state is also discussed.

Keywords: Kepler radial equation, pseudo-anqular-momentum method, eigenvalue spectra, eigenfunction, coherent state

PACC: 4250, 0365