第 54 卷 第 1 期 2005 年 1 月
1000-3290/2005/54(01)/0030-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.54, No.1, January, 2005

基于最小二乘支持向量机建模的混沌系统控制*

叶美盈†

(浙江师范大学数理学院,金华 321004)

(2004 年 2 月 13 日收到;2004 年 4 月 26 日收到修改稿)

提出了基于最小二乘支持向量机(LS-SVMs)建模的混沌系统控制方法. 与前向神经网络相比,LS-SVMs 的优点是其训练过程遵循结构风险最小化原则,不易发生过拟合现象;它通过解一组线性方程组可得到全局惟一的最优解;LS-SVMs 的拓扑结构在训练结束时自动获得而不需要预先确定. 该方法不需要被控混沌系统的解析模型,且当测量噪声存在情况下控制仍然有效. 以一维和二维非线性映射为例进行数值仿真,表明该方法是有效和可行的.

关键词:混沌控制, 支持向量机, 建模

PACC:0545

1. 引 言

近年来混沌控制及应用问题受到国内外学者的关注. 作为混沌保密通信的关键技术,同步问题的研究日益受到人们的重视,提出了若干有效的设计方法,如极点配置方法、脉冲控制方法、神经网络方法等[1—6]. 其中神经网络因其有较强的非线性映射能力,在混沌系统控制中得到了较多的应用[4—6],通常的做法是首先以前向神经网络对混沌系统进行学习,得到混沌系统动力学模型较为准确的表述,进而实现对混沌系统的控制. 但因神经网络训练过程遵循经验风险最小化准则,存在过拟合、训练过程受局部极小点的困扰、网络结构的选择过分依赖于经验等固有的缺陷[7],直接影响了建模的精度及可靠性,如何克服这些缺陷一直是神经网络应用中的难题. 因此,有必要寻求新的更为有效的混沌系统控制方法.

Vapnik 等人提出的支持向量机(support vector machines, SVMs)[7]是近年来机器学习领域最有影响的成果之一,其训练过程遵循结构风险最小化原则,结构参数在训练过程中根据样本数据自动确定,无过拟合现象,它通过解一个线性约束的二次规划问题得到全局最优解,不存在局部极小值问题,因此,SVMs 可成功克服神经网络的上述缺陷[8]. 虽然最近 SVMs 已在混沌系统的辨识与预测中得到了一些应用[9,10],但 SVMs 在混沌系统控制中的应用尚属鲜见. 文献[11]提出了用 SVMs 控制混沌动力学系统的方法,该方法将复杂动力学系统的模型分解为线性部分和非线性部分,通过用 SVMs 补偿模型的非线性部分来实现混沌系统的控制,因此该方法仍依赖于对象模型,对于精确模型往往难以得到的实际混沌系统来说,这种方法是难以付诸实际应用的. 本文尝试直接采用支持向量机的最小二乘形式(least squares support vector machines, LS-SVMs)[8]对混沌系统的动力学特性进行学习,以训练好的 LS-SVMs 模型进行混沌系统的控制. 这种控制方法无需被控对象的解析模型,便可以对其进行有效控制,且在有测量噪声情况下控制仍然有效.

2. 混沌系统控制的最小二乘支持向量机方法

训练 SVMs 需解凸二次规划,虽然所得的解是唯一的最优解,但算法的复杂度依赖于样本数据的个数,样本数据量越大,计算速度越慢,占用内存也越大. 一个有效的解决方法是采用 LS-SVMs. LS-SVMs 通过解一组线性方程组取代 SVMs 中的二次规划优化,提高了收敛速度.

* 浙江省自然科学基金(批准号:602145)资助的课题.

† E-mail:ymy@mail.zjnu.net.cn;电话:0579-2298852.

2.1. 回归型最小二乘支持向量机

设训练数据集 $\{x_t, y_t\}_{t=1}^{N}$，$x_t \in R^m$ 是第 t 个样本的输入模式，$y_t \in R$ 是对应于第 t 个样本的期望输出，N 为训练样本数. LS-SVMs 取如下形式：

$$y(x) = w^{\mathrm{T}}\varphi(x) + b, \tag{1}$$

式中非线性变换 $\varphi(x)$ 将输入数据映射到高维特征空间. w 的维数是不需预先指定的(可以是无穷维). 在 LS-SVMs 中,目标函数描述为

$$\min J(w,e) = \frac{1}{2}w^{\mathrm{T}}w + \gamma\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}e_t^2, \tag{2}$$

约束条件

$$y(x) = w^{\mathrm{T}}\varphi(x_t) + b + e_t, t = 1,\cdots,N, \tag{3}$$

只有等式约束,且优化目标中的损失函数是误差 e_t 的二范数,这将简化问题的求解.

定义拉格朗日函数

$$L(w,b,e,\alpha) = J(w,e) - \sum_{t=1}^{N}\alpha_t\{w^{\mathrm{T}}\varphi(x_t) + b + e_t - y_t\}, \tag{4}$$

其中 α_t 是拉格朗日乘子. 根据 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 最优条件,并对于 $t = 1,\cdots,N$ 消去 e_t 和 w 后,得到如下线性方程组

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{1} & \varphi(x_t)^{\mathrm{T}}\varphi(x_l) + \boldsymbol{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}, \tag{5}$$

式中 $y = [y_1;\cdots;y_N]$，$\mathbf{1} = [1;\cdots;1]$，$\alpha = [\alpha_1;\cdots;\alpha_N]$，$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}[\gamma_1;\cdots;\gamma_N]$，则 LS-SVMs 的算法优化问题就转化为以最小二乘法求解(5)式表示的线性方程组.

选择满足 Mercer 条件的核函数

$$\Psi(x_t, x_l) = \varphi(x_t)^{\mathrm{T}}\varphi(x_l), t, l = 1,\cdots,N. \tag{6}$$

最后可得如下回归型 LS-SVM 模型

$$y(x) = \sum_{t=1}^{N}\alpha_t\Psi(x, x_t) + b, \tag{7}$$

其中 α_t，b 是线性方程组的解，$\Psi(x, x_t)$ 表示由输入空间 x 非线性映射而来的高维特征空间. 本文以最常用的径向基函数

$$\Psi(x_t, x_l) = \exp(-\|x - x_t\|_2^2/\sigma^2) \tag{8}$$

作为核函数,式中的 σ 是一正的实常数.

上述回归型 LS-SVMs 可用于动力学系统辨识,建立未知混沌系统模型[9,12].

2.2. 用最小二乘支持向量机实现混沌系统控制

设施加了控制项的未知混沌系统为

$$x(k+1) = F(x(k)) + u(k), \tag{9}$$

式中 $x \in R^n$ 是系统的状态向量，u 为控制项.

若(9)式中的 $u = 0$，则

$$x(k+1) = F(x(k)), \tag{10}$$

根据(10)式的输入输出关系训练 LS-SVMs,可以得到未知混沌系统的 LS-SVMs 模型为

$$\hat{x}(k+1) = \hat{F}(x(k)), \tag{11}$$

由此可预测混沌系统的输出 $\hat{x}(k+1)$[9,12].

定义控制误差

$$e(k+1) = x(k+1) - x_{\mathrm{d}}(k+1), \tag{12}$$

式中 x_{d} 为期望的控制目标.

为了实现对系统的控制,设计下列控制器：

$$u(k) = x_{\mathrm{d}}(k+1) - \hat{F}(x(k)), \tag{13}$$

则受控的混沌系统为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= F(x(k)) + x_{\mathrm{d}}(k+1) - \hat{F}(x(k)) \\ &= x_{\mathrm{d}}(k+1) + (F(x(k)) - \hat{F}(x(k))). \end{aligned} \tag{14}$$

若 LS-SVMs 能很好地逼近(10)式所示混沌系统,则有 $(F(x(k)) - \hat{F}(x(k))) \to 0$. 因此，$x(k+1) \to x_{\mathrm{d}}(k+1)$，$e(k+1) \to 0$. 从而实现对未知混沌系统的控制.

混沌系统的 LS-SVMs 控制框图如 1 所示.

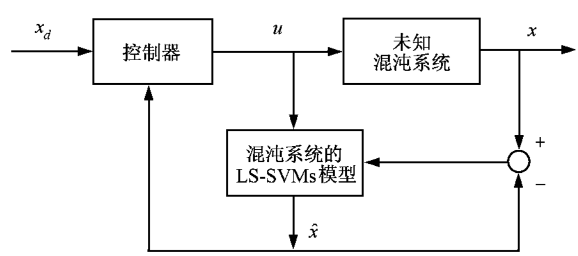

图 1　混沌系统的 LS-SVM 控制框图

3. 数值仿真

下面分别以一维和二维非线性映射为例进行数值仿真,验证上述混沌控制方法的有效性. 仿真时混沌系统均运行 1000 步,去掉前 200 个数据以消除初值的效应,用后 800 个数据训练 LS-SVM,建立混沌系统模型.

例 1　一维 Logistic 映射的控制

单输入单输出的 Logistic 映射模型为

$$x(k+1) = \mu(1 - x(k)), \tag{15}$$

在无控制时,若 $\mu = 4$,系统呈现混沌形态.

控制输入为

$$u(k) = x_{\mathrm{d}}(k+1) - \hat{F}(x(k)), \tag{16}$$

施加控制后的系统为

$$x(k+1) = \mu(1 - x(k)) + u(k), \tag{17}$$

训练后的 LS-SVMs 模型对训练数据的均方根误差为 2.59×10^{-4}.

在第 200 步时施加控制,若控制目标为 $x_{\mathrm{d}}(k)=0.6$,则结果如图 2(a)所示. 该方法也可用于控制混沌系统跟踪给定的函数,若取控制目标 $x_{\mathrm{d}}(k)=0.6+0.25\sin(k\pi/100)$,则结果如图 2(b)所示.

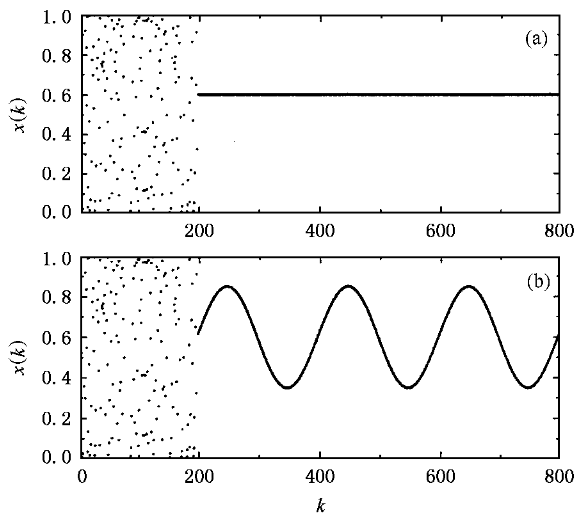

图 2 控制 Logistic 映射的结果

考虑到实际混沌系统不可避免地会受到噪声的污染,故在建模数据中加入幅值为‘干净’信号 5% 的正态分布噪声分量. 用上述含有噪声的数据训练 LS-SVMs 后,建立的 LS-SVMs 模型对训练数据的均方根误差为 4.20×10^{-3},用该 LS-SVM 模型对含噪声一维 Logistic 混沌系统进行控制,假设控制目标为 $x_{\mathrm{d}}(k)=0.6+0.25\sin(k\pi/100)$,控制结果见图 3,此时因 LS-SVMs 模型与混沌系统实际模型的误差增大了,虽然控制精度略微降低,但仍然有效.

例 2 二维非线性映射的控制

设二维非线性映射为

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -ax_1(k) + x_2(k), \\ x_2(k+1) &= x_1(k)^2 - b. \end{aligned} \tag{18}$$

在无控制时,若 $a=0.1$, $b=1.6$,则系统呈现混沌形态,其混沌吸引子如图 4 所示.

施加控制后,系统为

$$x_1(k+1) = -ax_1(k) + x_2(k) + u_1(k),$$

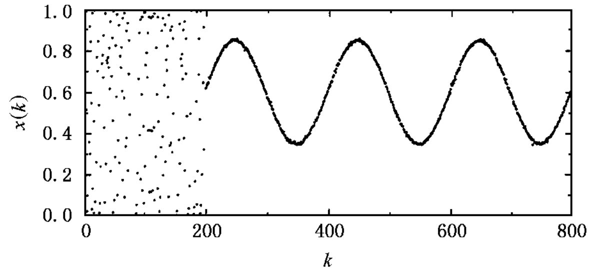

图 3 加噪声后控制 Logistic 映射的结果

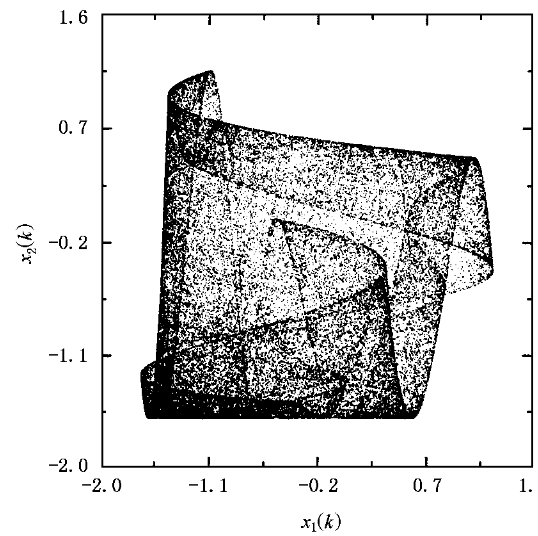

图 4 二维非线性映射的混沌吸引子

$$x_2(k+1) = x_1(k)^2 - b + u_2(k). \tag{19}$$

根据(18)式训练 LS-SVMs,建立模型

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \hat{F}_1(x_1(k), x_2(k)), \\ x_2(k+1) &= \hat{F}_2(x_1(k), x_2(k)). \end{aligned} \tag{20}$$

训练后的 LS-SVMs 模型对训练数据 $x_1(k)$, $x_2(k)$ 的均方根误差分别为 6.36×10^{-4}, 2.70×10^{-3}.

控制输入为

$$\begin{aligned} u_1(k) &= x_{1\mathrm{d}}(k+1) - \hat{F}_1(x_1(k), x_2(k)), \\ u_2(k) &= x_{2\mathrm{d}}(k+1) - \hat{F}_2(x_1(k), x_2(k)). \end{aligned} \tag{21}$$

在第 100 步时施加控制,控制目标分别为 $x_{1\mathrm{d}}(k)=-0.5$ 和 $x_{2\mathrm{d}}(k)=0.7$,控制结果分别如图 5(a)及(b)所示. 该方法也可用于控制混沌系统跟踪给定的函数,若控制目标分别改为跟踪 $x_{1\mathrm{d}}(k)=0.6+0.25\sin(k\pi/100)$, $x_{2\mathrm{d}}(k)=-0.6-0.25\sin(k\pi/100)$,则结果如图 6(a)及(b)所示.

为了进一步验证本方法的有效性,在建模数据中加入与例 1 相同的噪声,用含噪数据建立 LS-

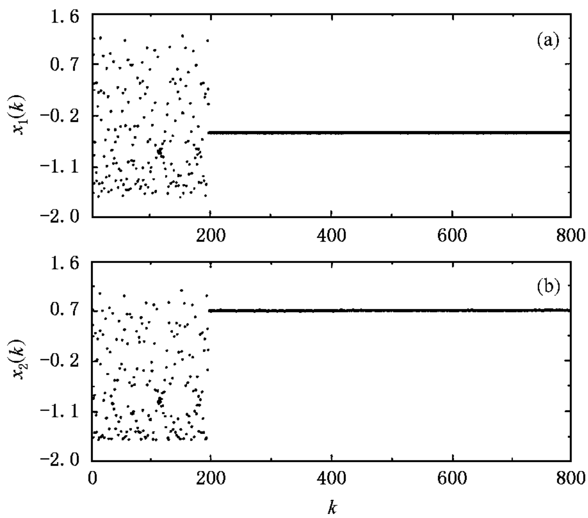

图 5　控制二维非线性映射的结果

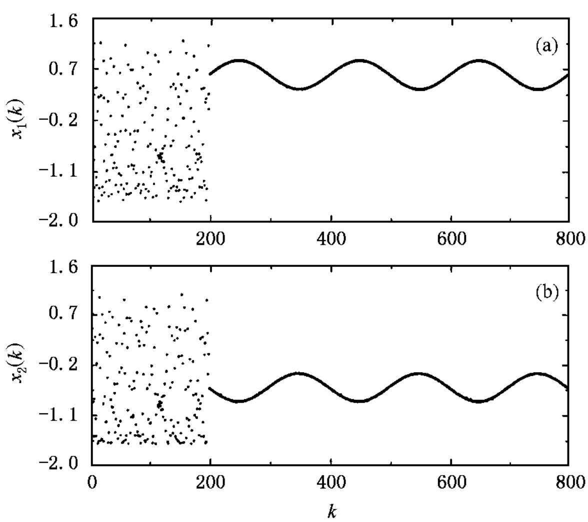

图 6　控制二维非线性映射跟踪正弦信息的结果

SVMs 模型,训练后的 LS-SVMs 模型对训练数据 $x_1(k)$,$x_2(k)$的均方根误差分别为 2.50×10^{-3},3.80×10^{-3}. 用上述 LS-SVMs 模型对该含有测量噪声的噪混沌系统进行控制,控制目标为 $x_{1\mathrm{d}}(k)=0.5$ 和 $x_{2\mathrm{d}}(k)=-0.6-0.25\sin(k\pi/100)$ 控制结果分别见图 7(a)和(b)所示.

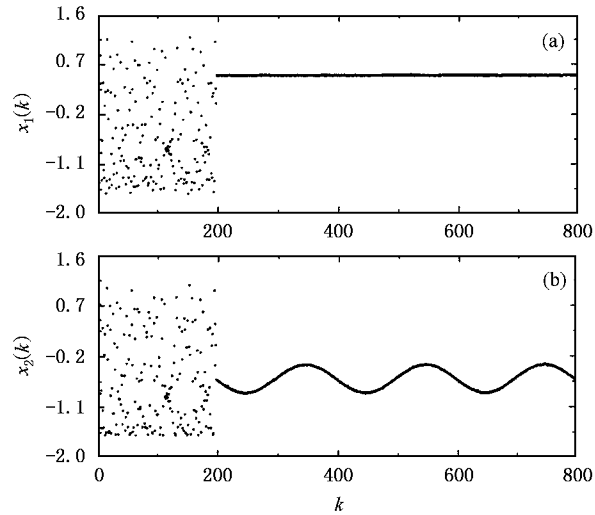

图 7　加噪后控制二维非线性映射跟踪正弦信号的结果

从上述例子可知,用 LS-SVMs 可以有效地实现对混沌系统的控制,即使系统含有测量噪声也是如此.

4. 结　　论

由于 LS-SVMs 的训练过程遵循结构风险最小化原则,不易发生过拟合现象,它通过解一组线性方程组可得到全局唯一的最优解,且 LS-SVMs 的拓扑结构在训练结束时自动获得而不需要预先确定,因此本文提出的基于 LS-SVMs 建模的混沌系统控制方法有较高的可靠性. 该方法不需要被控混沌系统的解析模型,可以跟踪给定的函数,且当存在测量噪声情况下控制仍然有效.

[1] Tanaka K, Ikeda T and Wang H O 1998 *IEEE Trans. Circuits Syst.* I **10** 1021

[2] Yang L B and Yang T 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 33 (in Chinese) [杨林保、杨　涛 2000 物理学报 **49** 33]

[3] Giuseppe G and Saverio M 1999 *Int. J. Bifure. Chaos* **9** 705

[4] Guan X P, Tang Y G, Fan Z P and Wang Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2112 (in Chinese) [[illegible]平、唐英干、范正平、王益群 2001 物理学报 **50** 2112]

[5] Liu D, Ren H P and Kong Z Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 531 (in Chinese) [刘　丁、任海鹏、孔志强 2003 物理学报 **52** 531]

[6] Tan W, Wang Y N, Liu Z R and Zhou S W 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2463 (in Chinese) [谭　文、王耀南、刘祖润、周少武 2002 物理学报 **51** 2463]

[7] Vapnik V N 2000 *The Nature of Statistical Learning Theory* (New York: Springer)

[8] Suykens J A K 2000 *Neural Network World* **10** 29

[9] Ye M Y and Wang X D 2004 *Chin. Phys.* **13** 454
[10] Kim K 2003 *Neurocomputing* **55** 307
[11] Kulkarni A, Jayaraman V K and Kulkarni B D 2003 *Phys. Lett.* A **317** 429
[12] Ye M Y and Wang X D 2004 *Acta. Opt. Sin.* **24** 953(in Chinese) [叶美盈、汪晓东 2004 光学学报 **24** 953]

Control of chaotic system based on least squares support vector machine modeling*

Ye Mei-Ying
(*College of Mthematics and Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua* 321004, *China*)
(Received 13 February 2004; revised manuscript received 26 April 2004)

Abstract

A new approach to control chaotic systems is presented. This control approach is based on least squares support vector machines (LS-SVMs) modeling. Compared with the feed-forward neural networks, the LS-SVM possesses prominent advantages: over fitting is unlikely to occur by employing structural risk minimization criterion, the global optimal solution can be uniquely obtained owing to the fact that its training is performed through the solution of a set of linear equations. Also, the LS-SVM need not determine its topology in advance, which can be automatically obtained when the training process ends. Thus the effectiveness and feasibility of this method are found to be better than those of the feed-forward neural networks. The method does not needs an analytic model, and it is still effective when there are measurement noises. The chaotic systems with one-and two-dimensional nonlinear maps are used as examples for demonstration.

Keywords: chaos control, support vector machines, modeling
PACC: 0545

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. 602145).