

俘获电子效应对低杂波电流驱动的影响*

焦一鸣¹⁾²⁾ 龙永兴²⁾ 董家齐²⁾ 石秉仁²⁾ 高庆弟²⁾

¹⁾ (电子科技大学光电信息学院, 成都 610054)

²⁾ (核工业西南物理研究院, 成都 610041)

(2004 年 1 月 14 日收到, 2004 年 4 月 5 日收到修改稿)

利用的程序是基于 FASTFP 开发的 RFP 准线性 Fokker-Planck 程序, 该程序适用于各种辅助加热和电流驱动的动力学计算. 利用开发的编码对低杂波在托卡马克等离子体中的吸收和驱动效率进行了 Fokker-Planck 计算, 考查了环形托卡马克装置的纵横比对波功率沉积和电流驱动效率产生的作用. 研究表明, 俘获电子效应对低杂波电流驱动的影响与波驱动的功率谱结构有关. 俘获电子的平行速度较低, 优化的功率谱可以在共振的电子数和俘获电子之间取得折中. 俘获电子效应可以使低杂波电流驱动效率减小 30%.

关键词: Fokker-Planck 方程, 俘获电子效应, 低杂波电流驱动

PACC: 5250, 5255, 5265

1. 引 言

低杂波电流驱动是磁约束聚变装置中等离子体电流驱动和剖面控制的重要方法. 在上世纪 80 年代, 实验和理论研究就奠定了低杂波电流驱动 (LHCD) 的物理基础^[1]. 目前的低杂波电流驱动实验已在数 MW 和数 MA 水平上实际证明了接近堆芯要求的高电流驱动效率和堆相关的密度 ($1 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$) 下的低杂波电流驱动.

在理论上, 射线追踪技术和 Fokker-Planck 方程的不同复杂形式的数值代码已成功地用于模拟波在等离子体中的功率沉积和驱动电流分布^[1-6]. 功率沉积物理首先与波相速度和电子热速度之间的谱耦合有关. 理论上认为托卡马克的环形效应引起的俘获电子效应可能对波功率沉积和电流驱动效率产生作用. 为确定波功率的吸收剖面, 一般是将波束轨迹计算与波的衰减计算结合起来. 初始等离子体具有 Maxwell 分布, 只需对局部色散关系进行计算. 但由于波吸收主要通过波与电子的朗道共振, 实际过程与波的偏振特性及电子分布函数的非麦氏演变有密切关系. 准线性吸收的计算能够确定诸如波的非线性衰减、等离子体压强的各向异性、高能电子尾部的形成等重要问题. 本文通过 Fokker-Planck 程序的模

拟结合托卡马克等离子体中电子与波共振条件的分析, 研究了托卡马克装置的俘获电子效应对低杂波电流驱动的影响.

2. 托卡马克装置的俘获电子效应

在托卡马克环形几何位形中, 按照带电粒子导向中心的漂移运动, 可以划分为通行粒子和俘获粒子. 托卡马克几何位形在环的外侧形成了类似于磁镜的俘获区, 俘获粒子的导向中心划出了‘香蕉轨道’. 托卡马克装置的极向磁场远小于纵向磁场 ($B_\theta \ll B_\phi$), 纵向磁场沿大半径方向由内向外减弱,

$$B_\phi = B_0(1 - \epsilon \cos\theta), \quad (1)$$

这里 $\epsilon = \frac{r}{R_0}$ 为半径 r 处的逆纵横比, B_0 为小截面中心点的磁场, R_0 为大环中心到小截面中心的距离, r 为小半径, θ 为小半径与水平面的夹角. 速度 $v < (\frac{2}{m}\mu_m B_M)^{1/2}$ 的粒子将被俘获在 $B < B_M$ 的外侧区域, $v > \sqrt{\frac{2}{m}\mu_m B_0(1 + \epsilon)}$ 的粒子成为通行粒子, 其中 $\mu_m = \frac{mv_\perp^2}{2B}$ 为磁矩不变量. 带电粒子成为俘获粒子的条件也可以写成

* 国家自然科学基金(批准号: 10075016, 10275018 和 10135020)资助的课题.

$$\frac{\nu_{\parallel}^2}{\nu_{\perp}^2} < \frac{2\epsilon}{1-\epsilon}, \quad (2)$$

俘获粒子占全部粒子的份额为

$$f_T = \sqrt{\frac{2\epsilon}{1+\epsilon}}. \quad (3)$$

3. 俘获电子的环向漂移对电流驱动效率的影响

俘获电子在极向上的效应对低杂波电流驱动没有明显的作用.但是,俘获电子在大环方向的“漂移”对电流驱动起阻碍作用.这部分俘获电子在进行磁面平均(反跳平均)后环向漂移速度减小,将吸收更多的入射波能量,不利于等离子体电流驱动.

3.1. 俘获电子的环向漂移和平行速度

利用纵向绝热不变量 $J = \oint m\nu_{\parallel} dl$ 可以得到托卡马克环形系统中“香蕉轨道”的环向漂移速度^[7]

$$\begin{aligned} v_{\varphi} = \frac{\Delta R_0 \varphi}{\tau_b} = \frac{m\nu_{\perp}^2 q}{eB_{\varphi} r} \left[\left(\frac{E(k)}{K(k)} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2q'r}{q} \left(\frac{E(k)}{K(k)} - 1 + k^2 \right) \right], \quad (4) \end{aligned}$$

其中 $q = \frac{rB_{\varphi}}{RB_0}$ 为安全因子, $K(k)$, $E(k)$ 分别是第一, 第二完全椭圆积分

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1-k^2 \sin^2 x)^{1/2}}, \\ E(k) &= \int_0^{\pi/2} (1-k^2 \sin^2 x)^{1/2} dx, \\ k^2 &= \frac{W - \mu B_0(1-\epsilon)}{2\epsilon \mu B_0}. \end{aligned} \quad (5)$$

将(5)式的椭圆积分按级数展开有

$$\begin{aligned} K(k) &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k^4 + \dots + \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \right]^2 k^{2n} + \dots \right\}, \\ E(k) &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{k^4}{3} - \dots - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} - \dots \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

对于俘获粒子有: $k^2 \approx \frac{1}{2\epsilon} \frac{\nu_{\parallel}^2}{\nu_{\perp}^2} < 1$. 俘获粒子反转角 θ_M 满足 $|\cos \theta_M| = 1 - k^2$, 因而 k^2 越小对应的俘获粒

子反转角 θ_M 越小, ν_{φ} 也越小. 当 $k^2 \rightarrow 0$ 时, ν_{φ} 趋于一个给定值 $\frac{m\nu_{\perp}^2 q}{2eB_{\varphi} r}$. 对于俘获粒子, 其环向漂移速度总是小于其热速度. 在一个漂移周期中, 回抽的半个周期对于电流驱动起阻碍作用(见图1), 这部分俘获粒子将要消耗入射的低杂波能量.

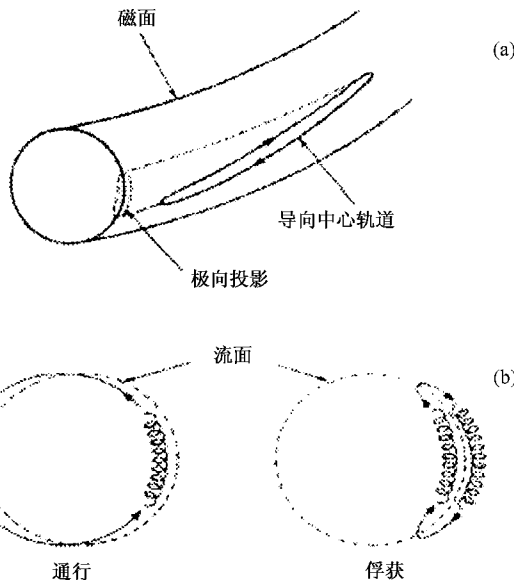


图1 (a)俘获粒子的环向漂移 (b)通行粒子和俘获粒子的极向示图

3.2. 共振区中的俘获电子份额和俘获电子在低杂波作用下的去俘获

首先,考察一下在低杂波电流驱动情形共振区 ($\nu_{\parallel 1}, \nu_{\parallel 2}$) 中的俘获粒子份额. 在共振区 ($\nu_{\parallel 1}, \nu_{\parallel 2}$) 中满足(2)式的俘获粒子数可以写成

$$n_{\text{trap}} = 2\pi \int_{\nu_{\parallel 1}}^{\nu_{\parallel 2}} \int_{\sqrt{\frac{1-\epsilon}{2\epsilon}} \nu_{\parallel}}^{\infty} \nu_{\perp} f(\nu_{\parallel}, \nu_{\perp}) d\nu_{\perp} d\nu_{\parallel} \quad (7)$$

共振区 ($\nu_{\parallel 1}, \nu_{\parallel 2}$) 中总的粒子数为

$$n_{\text{res}} = 2\pi \int_{\nu_{\parallel 1}}^{\nu_{\parallel 2}} \int_0^{\infty} \nu_{\perp} f(\nu_{\parallel}, \nu_{\perp}) d\nu_{\perp} d\nu_{\parallel}. \quad (8)$$

这里已经对分布函数进行了密度归一, 速度也用热速度进行了归一.

表1给出了共振区 ($\nu_{\parallel 1}, \nu_{\parallel 2}$) 中俘获粒子所占份额 ($T_e = 1\text{keV}, \epsilon = 0.4$). 表中第一行给出了麦克斯韦分布情形俘获粒子所占份额, 与(3)式得到的结果基本相同. 由表1可以看到, 随着共振区下限下移俘获粒子所占份额快速增加, 低杂波驱动电子以后 (D_0 正比于低杂波功率) 俘获粒子所占份额减少, 表示部分的俘获粒子吸收了波能变成了通行粒子. 从

表 2 可看到俘获电子效应与各参量的关系. 提高驱动效率和减小俘获效应是一个矛盾.

表 1 共振区($\nu_{//1}, \nu_{//2}$)中俘获粒子所占份额 $T_e = 1\text{keV}, \epsilon = 0.4$

[$\nu_{//1}, \nu_{//2}$]	D_0	n_{trap}	n_{res}	$n_{\text{trap}}/n_{\text{res}}$
[0.0 ,15]	0.0	0.3630	0.4960	0.7310
[1.0 ,15]	0.0	0.0688	0.1560	0.4410
[1.0 ,15]	1.0	0.1130	0.4250	0.2660
[2.0 ,15]	0.0	0.0036	0.0226	0.1570
[2.0 ,15]	1.0	0.0066	0.0767	0.0860
[3.0 ,15]	0.0	3.66×10^{-5}	0.0014	0.0266
[3.0 ,15]	1.0	1.09×10^{-4}	0.0055	0.0197

4. Fokker-Planck 分析

描述等离子体带电粒子之间相互作用的动力学方程是带有 Fokker-Planck 碰撞项的玻尔兹曼方程. 本文所使用的编码可用于描述托卡马克辅助加热情形的多分量等离子体粒子的动力学过程, 是一个反跳平均的两维动量空间的多分量准线性 Fokker-Planck 程序包, 能够计算环形几何下电子和离子的分布函数, 包含了波加热, 中性束注入, 粒子损失等效应.

4.1. 准线性扩散系数与朗道共振吸收

关于波加热的 Fokker-Planck 方程的一般形式为^[11]

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c + Q + S. \tag{9}$$

通常的准线性算子的形式以速度变数 $\nu_{//}, \nu_{\perp}$ 表示为

$$Q = \frac{1}{\nu_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \nu_{\perp}} \left[\nu_{\perp} \left(D_{22} \frac{\partial f}{\partial \nu_{\perp}} + D_{21} \frac{\partial f}{\partial \nu_{//}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \nu_{//}} \left[D_{12} \frac{\partial f}{\partial \nu_{\perp}} + D_{11} \frac{\partial f}{\partial \nu_{//}} \right], \tag{10}$$

其中 $D_{12} = D_{21}$. 为了与 Fokker-Planck 程序中的速度变数 ν, θ 一致, 可以利用速度变量($\nu_{//}, \nu_{\perp}$) \rightarrow (ν, θ)的变换关系:

$$\begin{cases} \nu = \sqrt{\nu_{//}^2 + \nu_{\perp}^2} \\ \cos\theta = \nu_{//} / \nu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \nu_{//}} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial \nu} - \frac{\sin\theta}{\nu} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial \nu_{\perp}} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial \nu} + \frac{\cos\theta}{\nu} \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{cases} \tag{11}$$

通过变换, 可将(10)式改写成

$$Q = \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\nu^2 (\sin^2\theta D_{22} + \cos^2\theta D_{11} + 2\cos\theta \sin\theta D_{12}) \frac{\partial f}{\partial \nu} + \nu (\sin\theta \cos\theta (D_{22} - D_{11}) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta) D_{12}) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\nu^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \times \left[\nu \sin\theta \{ \cos\theta \sin\theta (D_{22} - D_{11}) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta) D_{12} \} \frac{\partial f}{\partial \nu} + \sin\theta (\cos^2\theta D_{22} + \sin^2\theta D_{11} - 2\cos\theta \sin\theta D_{12}) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right]. \tag{12}$$

由于低杂波加热和电流驱动仅是 $\nu_{//} = \omega / k_{//}$ 的共振能量转换, 准线性扩散张量中仅保留了 $\nu_{//}, \nu_{//}$ 项:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{IH}} = \frac{\partial}{\partial \nu_{//}} D_{11} \frac{\partial}{\partial \nu_{//}} f, \tag{13}$$

其中

$$D_{11} = \pi \frac{e^2}{m_e^2} \int dk_{//} | \tilde{E}_k |^2 \frac{k_{//}^2}{k_{\perp}^2} \delta(\omega - k_{//} \nu_{//}) \quad c/n_{//M} < \nu_{//} < c/n_{//m}, \text{其他为 } 0.$$

令 $D \equiv D_{11}$ 可得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{IH}} &= \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\nu^2 D \cos^2\theta \frac{\partial f}{\partial \nu} - \nu D \cos\theta \sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right] \\ &+ \frac{1}{\nu^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[-\nu D \sin^2\theta \cos\theta \frac{\partial f}{\partial \nu} + D \sin^3\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \tag{14}$$

上述偏振场分量的具体大小要由波的色散关系确定. 共振条件可以表示为

$$\omega - \nu_{//} k_{//} = 0, \tag{15}$$

上式表明, 对于朗道型共振吸收, 吸收区关于共振点是对称的, 有效吸收宽度由波谱给出.

求解方程(9)可以获得电子的速度分布函数, 从而可得波驱动电流密度和波功率沉积

$$J_{\text{rf}} = -en_e \nu_{\text{th}} \int_{\nu_{//1}}^{\nu_{//2}} \nu_{//} f(\nu_{//}) d\nu_{//},$$

$$P_{\text{abs}} = \frac{1}{2} n_e m_e \nu_0 \int_{\nu_{//1}}^{\nu_{//2}} \nu_{//}^2 \frac{\partial}{\partial \nu_{//}} D \frac{\partial f}{\partial \nu_{//}} d\nu_{//}. \tag{16}$$

这里再次一提, 文中的公式全部是以 $\nu \rightarrow \nu/\nu_{\text{th}}, t = t/\nu_0$ 归一后所得. 对于简单的模型, 上述的准线性扩散系数在其共振区可以认为是一常数(D_0).

4.2. 电子压强的各向异性

Brambilla 谱决定了入射波的共振区域和波功率^[8].对低杂波情形,波主要是使平行于磁场方向运动的电子得到加速,因此可预见电子压强将产生各向异性.影响各向异性程度的主要因素是加热功率,共振区域宽度、位置,以及等离子体电子密度和电子温度.在 HL-1M 实验参数下,产生的电子压强各向异性是十分明显的.在中等加热功率下,加热期间平行压强分量比垂直压强分量大一倍以上(见图 2),这是通常的线性衰减计算中不能得出的结果.

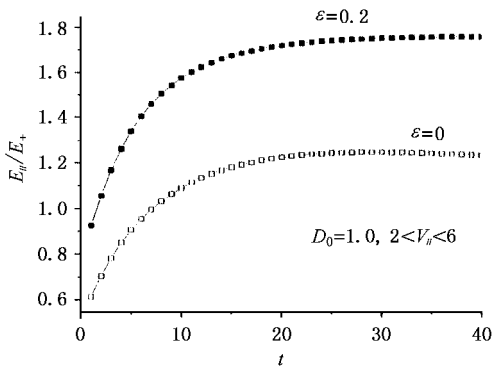


图 2 $D_0 = 1.0$ 时不同的俘获效应下各向异性的能量沉积随时间的变化

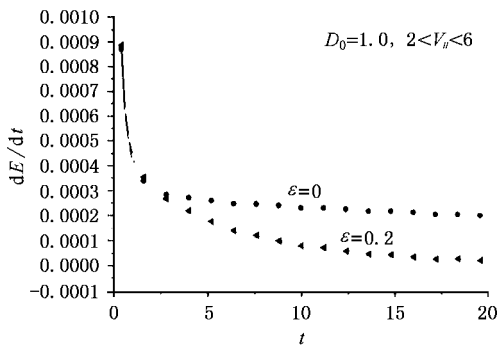


图 3 不同能量损失波功率沉积速率随时间的变化

以上非线性特征是 Fokker-Planck 计算得出的重要结论,是由于分布函数非线性演化对波共振吸收的响应.但从图 3 也能看出,当电子能量损失较大时,波功率沉积过程被损失过程所平衡,电子分布函数趋于稳定.由图 4 可以看到,俘获电子效应将消耗更多的低杂波功率,相当于减小了扩散系数 D_0 (见图 5),部分的能量用于了俘获电子的去俘获.

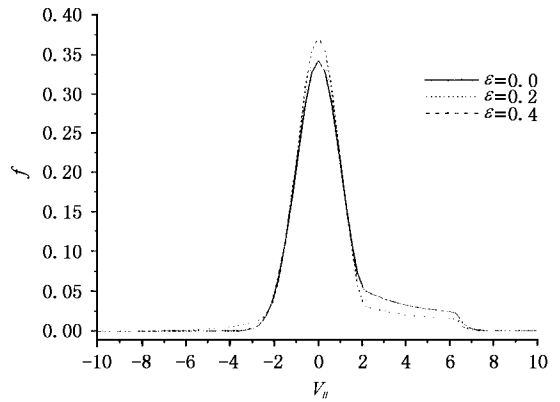


图 4 稳态时不同的俘获效应下各向异性的电子分布函数

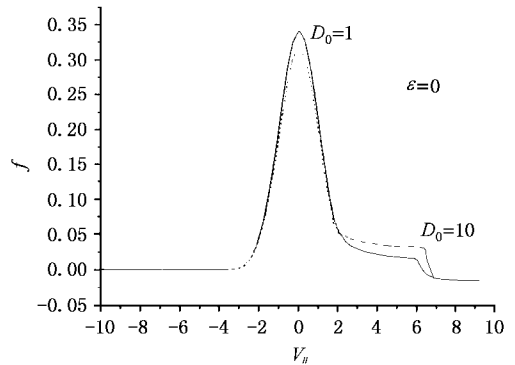


图 5 稳态时不同的波功率下各向异性的电子分布函数

5. 俘获电子效应对低杂波电流驱动的影响

按照准线性理论,在不考虑直流电场作用的情况下,ITER 给出了电流驱动效率的经验公式^[9]

$$\eta_{cd} \equiv \bar{n}_e R_0 I_p / P_d = \gamma_0 F(x, z_{eff}) G(\epsilon, x) \quad (17)$$

式中 γ_0 是 Fisch-Boozer 因子

$$\gamma_0 = \frac{2m_e \epsilon_0^2 c^2}{e^3 \ln \Lambda} \frac{1}{\langle n_{\parallel} \rangle^2} \frac{4}{5 + Z_{eff}}$$

$$\frac{1}{\langle n_{\parallel} \rangle^2} = \left[\frac{1}{n_{\parallel \min}^2} - \frac{1}{n_{\parallel \max}^2} \right] / \ln \left[\frac{n_{\parallel \max}^2}{n_{\parallel \min}^2} \right] \quad (18)$$

$F(x, Z_{eff})$ 是温度修正因子

$$F(x, Z_{eff}) = 1 + \frac{1}{x^2} \left[\frac{5 + Z_{eff}}{4} + \frac{3}{2} \frac{6 + Z_{eff}}{3 + Z_{eff}} \right] + \frac{1}{x^3} \frac{3\sqrt{2\pi}(5 + Z_{eff})}{8Z_{eff}} \quad (19)$$

$G(\epsilon, x)$ 为俘获电子效应修正

$$\alpha(\epsilon, x) = 1 - \frac{\epsilon^{0.77}(12.25 + x^2)^{0.5}}{3.5\epsilon^{0.77} + x}, \quad (20)$$

$$\text{其中 } x = \frac{c}{\langle n_{\parallel} \rangle v_{th}}, \quad v_{th} = \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}.$$

对于 HL-1M 和 HL-2A 装置的具体情形, 90° 的相位对应的谱峰在 $\langle n_{\parallel} \rangle = 2.8$ 左右, 温度取为 1.2keV , 有效 Z_{eff} 为 2.0, 则有 $F \sim 1.08$, $G \sim 0.68$, $\gamma_0 \sim 0.1 \times 10^{20} \text{A/Wm}^2$, 这样电流驱动效率应能够达到 $0.08 \times 10^{20} \text{A/Wm}^2$, 电子的俘获效应使得电流驱动效率减小了 32%.

表 2 数值计算的低杂波电流驱动结果 ($T_e = 1\text{keV}$)

D_0	(ν_1, ν_2)	$\epsilon = a/R$	j_{rf}	P_{abs}	$j_{\text{rf}}/P_{\text{abs}}$
0.5	(2.0, 6.0)	0.0	0.8779	0.0740	11.85
0.5	(2.0, 6.0)	0.2	0.3619	0.0547	6.709
0.5	(2.0, 8.0)	0.0	1.2140	0.0946	12.38
0.5	(2.0, 8.0)	0.2	0.5747	0.0639	8.994
0.5	(3.5, 8.0)	0.0	0.0267	0.0018	15.13
0.5	(3.5, 8.0)	0.2	0.0159	0.0013	12.16
0.5	(2.0, 8.0)	0.0	1.2140	0.0946	12.83
0.5	(2.0, 8.0)	0.4	0.4216	0.0581	7.252
1.0	(2.0, 8.0)	0.0	1.9220	0.1298	14.80
1.0	(2.0, 8.0)	0.4	0.5737	0.0544	10.54

表 2 是数值模拟结果. 表 2 中可以看到俘获电子效应与各参量的关系. 低杂波的电流驱动效率极大地取决于共振区的下限速度, 宽的共振区有利于电流驱动. 由表 2 可以看到, 俘获电子效应对低杂波电流驱动的影响与波驱动的功率谱结构有关. 由于俘获电子的平行速度较低, 随着共振区的下限速度提高, 俘获电子效应减小. 但是电流驱动希望一个较低的下限速度, 因而优化的功率谱应该在共振的电子数和俘获电子之间取得折中. 通常情形俘获电子效应可以使低杂波电流驱动效率约减小 30%.

6. 讨论与结论

通过俘获电子效应对低杂波电流驱动影响的研究, 发现在加热期间电子压强分布将具有很强的各向异性特性, 俘获电子效应将降低低杂波电流驱动效率, 数值计算结果与 ITER 的经验定标符合.

利用低杂波电流驱动控制等离子体电流分布需要确定局部区域磁面上的低杂波共振区域, 这可以通过结合磁面位形和波迹追踪技术给出^[1, 3-5]. 共振区下限位置的选取对于电流驱动效率的影响很大, 通常的驱动情形, 2 倍电子热速度的共振区下限对于低杂波电流驱动比较有利.

- [1] Fisch N J 1987 *Rev. Mod. Phys.* **59** 175
- [2] Shoucri M and Shkarofsky I 1994 *Computer Physics Communications* **82** 287
- [3] Bonoli P T and Engle R C 1986 *Phys. Fluids* **29** 2937
- [4] Okzaki T *et al* 1986 *Nucl. Fusion* **26** 1029
- [5] Jiao Y M 1995 *PHD Paper* (in Chinese) 焦一鸣 1995 核工业西南物理研究院博士学位论文
- [6] Gong X Y, Shi B R, Ling Q and Long Y X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 896 (in Chinese) 龚学余、石秉仁、凌球、龙永兴 2003 物理学报 **52** 896
- [7] Kadomtsev B B, Pogutse O P 1970 *Review of Plasma Physics* ed M. A. Leontovich, translated by H. Lashinsky (New York-London: Consultants Bureau) Vol. 5 p265 Marco
- [8] Brambilla, 1998 *Kinetic Theory of Plasma Waves* (New York: Oxford University Press Inc) p500-519
- [9] ITER Physics Expert Group 1999 *Nucl. Fusion* **39** 2495

Effects of the trapping effect on LHCD in tokamak^{*}

Jiao Yi-Ming^{1,2)} Long Yong-Xing²⁾ Dong Jia-Qi²⁾ Shi Bing-Ren²⁾ Gao Qing-Di²⁾

¹⁾(*School of Optoelectronic Information, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China*)

²⁾(*Southwestern Institute of Physics, Chengdu 610041, China*)

(Received 14 January 2004; revised manuscript received 5 April 2004)

Abstract

A Fokker-Planck study is carried out for tokamak lower hybrid current drive (LHCD) by considering the wave absorption in the presence of trapping effect situation. This Fokker-Planck code is developed based on FASTFP, and is suitable for various auxiliary heating and current drive situations. The energy loss mechanism through anomalous transport is modeled by using a suitable loss term. In the heating phase, the electron distribution deviates clearly from the Maxwellian, and this results in nonlinear absorption characteristics. As an electrostatic force, the lower hybrid wave makes the trapped electrons untrapped, and the wave loses its energy, which cuts down the LHCD efficiency 30%.

Keywords : Fokker-Planck equation, trapping electron effect, LHCD

PACC : 5250, 5255, 5265

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10075016, 10275018 and 10135020).