

# 双结 $\pi$ 环自发磁化的研究\*

谭忠魁 毛 博 王福仁 李壮志 聂瑞娟 戴远东

(北京大学人工微结构和介观物理国家重点实验室 物理系, 北京 100871)

(2003 年 12 月 17 日收到 2004 年 3 月 31 日收到修改稿)

研究了超导双结  $\pi$  环的自发磁化现象, 讨论了双结  $\pi$  环可能发生自发磁化的条件, 指出了自发磁化条件不仅与电感参数  $\beta$  有关, 而且与两结临界电流之比有关, 并通过分析自由能证明自发磁化是稳定的状态, 最后给出了讨论结果和渐进行为.

关键词: 双结  $\pi$  环, 自发磁化, 自由能

PACC: 7475, 7450

## 1. 引 言

高温超导体序参量具有 d 波对称性的重要结果之一是可以构成临界电流为负的超导 Josephson 结, 即通过结的电流  $I = -I_c \sin \varphi$ , 此电流也可以表示为  $I = I_c \sin(\varphi + \pi)$ , 因而这样的结常称为  $\pi$  结, 插入奇数个  $\pi$  结的超导环称为  $\pi$  环.

Sigrist 和 Rice<sup>[1]</sup>指出, 对于含有一个  $\pi$  结的超导  $\pi$  环, 如果外磁场为零, 当电感参数  $\beta = \frac{2\pi I L_c}{\phi_0} > 1$  时, 该超导环会产生自发磁化(存在自发磁化环流), 并由此建议了高温超导体 d 波对称性的位相敏感实验, Tsuei 等<sup>[2]</sup>在三晶衬底上制备了三结  $\pi$  环, 三个晶界的角度保证了三个 YBCO 晶界结中有一个结是  $\pi$  结, 他们用低  $T_c$  扫描 SQUID 探测到该  $\pi$  环的自发磁化, 从而成功地完成了高温超导体的位相敏感实验, 以后, 他们进一步测量了自发磁化随温度的变化<sup>[3]</sup>, 发现即使在很高的温度下, 自发磁化磁通基本上保持在  $\phi_0/2$  的值, 只有在很接近超导转变温度  $T_c$  时才迅速减小到零. Tsuei 等并未对自发磁化磁通与温度关系的这一特征作出解释. 邓鹏<sup>[4]</sup>等计算了三个结临界电流绝对值完全相等时的三结  $\pi$  环的自发磁化, 指出即使  $\beta \rightarrow 0$  也将发生自发磁化, 文献<sup>[3]</sup>还计算了自发磁化磁通随温度的变化, 很好地说明了 Tsuei 等<sup>[3]</sup>关于三结  $\pi$  环的自发磁化磁通与温度关

系的实验结果.

单个超导  $\pi$  环在外磁场为零时会发生自发磁化, 多个相互耦合的超导  $\pi$  环在零外场下发生自发磁化时, 多个  $\pi$  环的自发磁化可能具有不同的自发磁化方向, 我们已经证明<sup>[5]</sup>, 对两个相互耦合的  $\pi$  环, 其自发磁化方向相反时, 具有较低的自由能, 我们还证明了<sup>[6]</sup>, 对于  $2 \times 2$  的二维  $\pi$  环阵列, 相邻  $\pi$  环反向磁化的状态自由能最低, 并进一步指出, 用相互耦合的超导  $\pi$  环构成的阵列, 其自发磁化方向构成反铁磁排列的 Ising 模型.

如上所述, 超导  $\pi$  环的研究有重要的学术意义, 此外, 超导  $\pi$  环的研究有可能发展新的超导电子学器件, 例如, 量子计算<sup>[7]</sup>是目前超导物理研究的一个热点, 由 Josephson 结组成的超导环在一定条件下在外磁场中出现回滞, 这样就出现了可以互相转化的两个量子态, 而超导  $\pi$  环可以在无外磁场时发生自发磁化, 这种不依赖于外磁场的两个量子态对于量子计算的实现是很有意义的, 由 Josephson 结组成超导环构成的超导电子器件具有工作速率快, 不易受外界干扰影响以及可以使用现有的半导体制作工艺大规模生产等优点.

通常高温超导  $\pi$  结是颗粒晶界结, 结两侧的超导体晶格具有不同的取向, 因此 Sigrist 和 Rice 研究的单结  $\pi$  环在实验上无法实现, 双结  $\pi$  环在实验上可以实现, 如 Wollman 等<sup>[8]</sup>在 YBCO 的  $a$  轴边  $b$  轴边拐角处制成 dc SQUID, 这就是一个双结  $\pi$  环, 见图

\* 国家重点基础研究发展计划(批准号: G1999064609)资助的课题.

1(a). 邓鹏<sup>[4]</sup>计算了三结  $\pi$  环的自发磁化, 得到即使  $\beta \rightarrow 0$  也会发生自发磁化的结论, 但他假设了三个结的临界电流绝对值完全相同. 对于双结  $\pi$  环, 一般来讲其两个 Josephson 结的临界电流不会相同, 本文分

析了当两结  $|I_{c1}|$  不相等时的一般情况, 发现产生自发磁化的条件不仅与电感参数有关, 而且与两结  $|I_{c1}|$  之比有关.

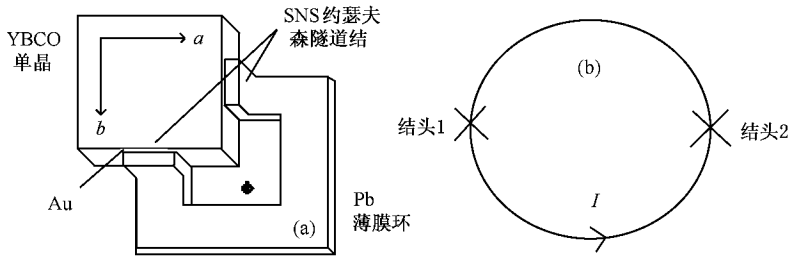


图 1 (a) Wollman 的双结  $\pi$  环结构图 (b) 双结  $\pi$  环示意图

## 2. 双结 $\pi$ 环的自发磁化条件

如图 1(b) 所示为一个双结  $\pi$  环, 一般来讲两个 Josephson 结的临界电流绝对值不相同. 先设结 1 为  $\pi$  结, 对于稳态, 有

$$I = -I_{c1} \sin \varphi_1 = I_{c2} \sin \varphi_2, \quad (1)$$

设  $I_{c1} < I_{c2}$ ,  $I_{c2}/I_{c1} = k > 1$ ,  $I_{c1} = I_{c2}$  的情形可以由  $k \rightarrow 1$  的渐进行为给出. 由位相关系有

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{2\pi(LI + \Phi_a)}{\phi_0} = 2n\pi, \quad (2)$$

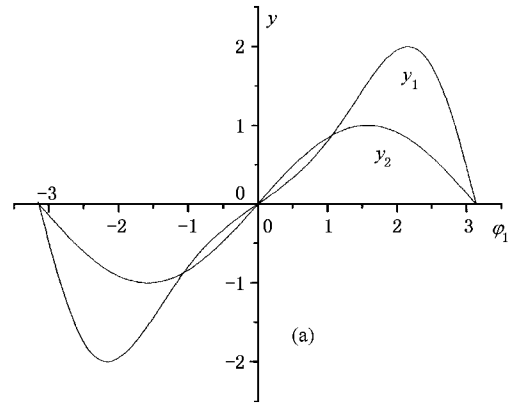
式中  $\Phi_a$  为外加磁场在环中的磁通量. 讨论发生自发磁化的情形, 即令  $\Phi_a = 0$ . 令  $\beta = \frac{2\pi LI_{c1}}{\phi_0}$  (2) 式变为

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \beta \sin \varphi_1 = 2n\pi, \quad (3)$$

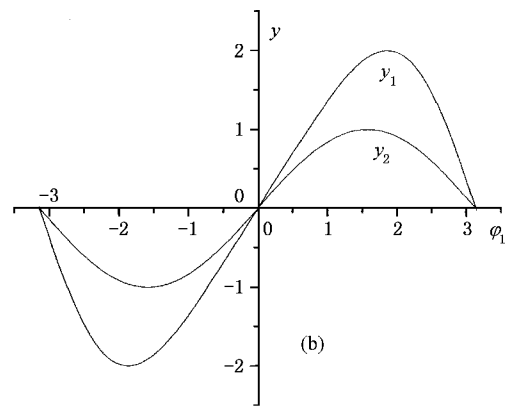
$\varphi_2 = 2n\pi - (\varphi_1 - \beta \sin \varphi_1)$ , 代入 (1) 式, 得到

$$\sin \varphi_1 = k \sin(\varphi_1 - \beta \sin \varphi_1). \quad (4)$$

显然  $\varphi_1 = 0, \pi$  是方程的解, 对应  $I = 0$ , 为不发生自发磁化的解. 方程 (4) 可用作图法求解. 设  $y_1 = \sin \varphi_1$ ,  $y_2 = k \sin(\varphi_1 - \beta \sin \varphi_1)$ , 图 2 给出了方程 (4) 的两个图解, 分别对应  $k = 2, \beta = 0.7$  和  $k = 2, \beta = 0.3$  的情形. 图 2(b) 中除了 0 和  $\pi$  ( $I = 0$ ) 之外  $\varphi_1$  不存在其他解, 即没有自发磁化的解; 在图 2(a) 中可以看出, 在一定条件下 ( $k, \beta$  取值在某些范围), 还存在  $\varphi_1 \neq 0, \pi$  的解, 此解对应于自发磁化 ( $I = -I_{c1} \sin \varphi_1 \neq 0$ ). 因为 (4) 式两端均为奇函数, 所以自发磁化解必然成对出现, 即自发磁化有两个可能的方向. 由图 2 还可以看出: 如果有



(a)  $k = 2, \beta = 0.7$



(b)  $k = 2, \beta = 0.3$

图 2 方程 (4) 的图解

$$[y_1'(0) - y_2'(0)] \cdot [y_1'(\pi) - y_2'(\pi)] > 0, \quad (5)$$

由于  $y_1, y_2$  均为连续函数, 则必有除了 0 和  $\pi$  之外的交点  $\varphi_1$  为方程的解. 把  $y_1, y_2$  的表达式代入 (5)

式,得到

$$\beta > \frac{k-1}{k}, \quad (6)$$

即在  $\beta > \frac{k-1}{k}$  时存在自发磁化的解. 当  $\beta < \frac{k-1}{k}$  时则不可能发生自发磁化. 图 3 给出了  $\beta_k = \frac{k-1}{k}$  的关系曲线.

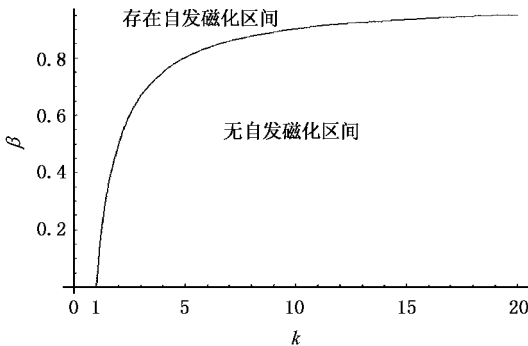


图 3  $\beta_k = \frac{k-1}{k}$  的关系图

### 3. 结 2 为 $\pi$ 结的情形

若结 1 为普通结 结 2 为  $\pi$  结, 则 (1) 式变为  $I = I_{c1} \sin \varphi_1 = -I_{c2} \sin \varphi_2$ , 所以  $\sin \varphi_1 = -k \sin \varphi_2$ ,  $\varphi_1 + \varphi_2 + \beta \sin \varphi_1 = 2n\pi$ , (4) 式变为  $\sin \varphi_1 = k \sin(\varphi_1 + \beta \sin \varphi_1)$ . 关于这个方程的自发磁化解, 讨论方法完全相同. 得到相同的结果: 在  $\beta > \frac{k-1}{k}$  时存在自发磁化的解. 当  $\beta < \frac{k-1}{k}$  时则不可能发生自发磁化.

### 4. 自由能 $F$

下面通过对双结  $\pi$  环的自由能的分析, 讨论自发磁化解和无自发磁化解 (零解或  $\pi$  解) 的稳定性. Sigrist 和 Rice 是通过单结  $\pi$  环在磁场为零时出现回滞来说明可以发生自发磁化. 一般的, 我们通过自由能分析, 证明双结  $\pi$  环在  $\beta > \frac{k-1}{k}$  时, 如果不发生自发磁化 ( $I=0$ ), 则自由能为极大值, 即对于环流 (位相) 的扰动,  $I=0$  是不稳定的, 而自发磁化解能量更低, 是稳定的. 仍然设结 1 为  $\pi$  结 结 2 为普通结. 双结  $\pi$  环的自由能  $F$  可以表示为

$$F = \frac{LI_{cl}^2}{2} + \frac{I_{c1} \phi_0 \cos \varphi_1}{2\pi} - \frac{I_{c2} \phi_0 \cos \varphi_2}{2\pi}, \quad (7)$$

其中第一项为超导环的静磁能, 第二项为  $\pi$  结 1 上的 Josephson 耦合能. 第三项为普通结 2 上的 Josephson 耦合能. 设归一化环流  $i = \frac{I}{I_c} = -\sin \varphi_1$ , 因为  $k > 1$ , 若无外磁场 ( $\Phi_a = 0$ ) 利用 (2)(3) 式得到

$$F = \frac{LI_{cl}^2}{2} \left( \sin^2 \varphi_1 - \frac{2\sqrt{1+k^2-2k\cos(\beta\sin\varphi_1)}}{\beta} \right) = \frac{LI_{cl}^2}{2} \left( i^2 - \frac{2\sqrt{1+k^2-2k\cos(\beta \cdot i)}}{\beta} \right), \quad (8)$$

(8) 式是无外磁场时自由能与环流的关系. 关于这个表达式的推导, 详见附录.

我们在零点求  $F'(i)$  和  $F''(i)$ , 得到

$$F'(0) = 0,$$

$$F''(0) = LI_{cl}^2 \left( 1 - \frac{k\beta}{\sqrt{1+k^2-2k}} \right) = LI_{cl}^2 \left( 1 - \frac{k\beta}{k-1} \right).$$

当存在自发磁化解时,  $\beta > \frac{k-1}{k}$ ,  $F''(0) < 0$ , 自由能  $F$  在环流为零时为一个极大值, 是不稳定的. 为了讨论磁化解的稳定性, 我们用另一种方式表示出方程 (4) 的图解 (见图 4), 仍取  $k=2, \beta=0.7$ . 横轴为约化电流  $i = I/I_c$ , 两个函数的交点直接给出了相应解的环流  $i$ , 同时在图 5 中画出了由 (8) 式给出的约化自由能  $f = F/F_0$  对约化环流  $i$  的关系 ( $F_0 = LI_{cl}^2/2$ ).

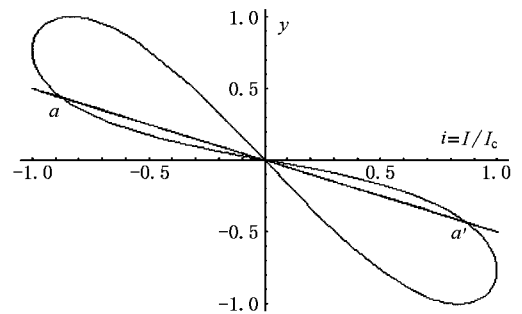


图 4  $k=2, \beta=0.7$  时方程 (4) 的图解

从图 4 可以看出, 直线与曲线的交点即为方程 (4) 的解, 其中  $a, a'$  是稳定的解, 对应图 5 自由能曲线中的极小值. 此结果与普通结超导环的行为类似<sup>[9]</sup>. 我们特别要指出, 从图 5 可以看出,  $i=0$  的解 (无自发磁化) 对应于自由能极大, 因而是稳定的. 自由能极小的  $a, a'$  点对应自发磁化, 其自发磁化方向相反.

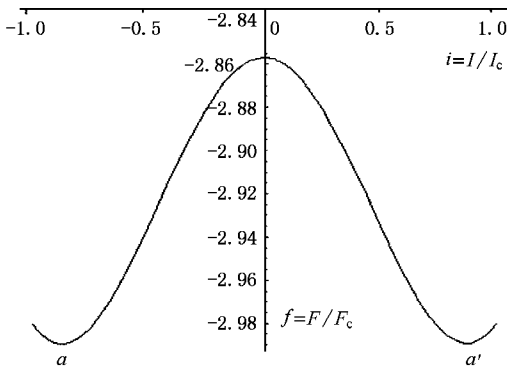


图5  $k=2, \beta=0.7$  时归一化的自由能  $f$  随归一化环流  $i$  变化曲线

## 5. 讨 论

### 5.1. $k \rightarrow 1$ 时的渐进行为

此时发生自发磁化的条件变为  $\beta > \frac{k-1}{k} \rightarrow 0$ , 即

$\beta > 0$ . 因为  $\beta = \frac{2\pi L I_{cl}}{\varphi_0}$ , 所以这个条件一定满足, 因此得到结论:  $k \rightarrow 1$  时, 即两个 Josephson 结的临界电流绝对值相等时双结  $\pi$  环一定会发生自发磁化. 邓鹏<sup>[4]</sup>证明了临界电流绝对值相同的三结  $\pi$  环在  $\beta > 0$  时也一定会发生自发磁化, 由此可以引申到多结  $\pi$  环, 对于多结  $\pi$  环也有相同的结论.

### 5.2. $k \rightarrow \infty$ 时的渐进行为

此时发生自发磁化的条件变为  $\beta > \frac{k-1}{k} \rightarrow 1$ , 即

$\beta > 1, k \rightarrow \infty$  即结 2 的临界电流很大, 相当于单结  $\pi$  环, 由此得出了单结  $\pi$  环的自发磁化条件  $\beta > 1$ . 这与 Sigrist 和 Rice<sup>[1]</sup>得出的结论相同.

## 6. 结 论

研究了临界电流绝对值不相等的双结  $\pi$  环的自

发磁化, 指出了发生自发磁化的条件不仅与电感参数  $\beta$  有关, 还与两结临界电流绝对值之比有关, 特别是当两结临界电流绝对值相等时,  $\beta \rightarrow 0$  也将发生自发磁化. 证明了存在自发磁化的条件下, 无自发磁化 ( $I=0$ ) 的解对应于自由能极大, 是不稳定的解. 稳定的解存在自发磁化.

## 附录 自由能 $F$ 表达式的推导

$$F = \frac{L I_{cl}^2}{2} \left( \sin^2 \varphi_1 + 2 \cdot \frac{\cos \varphi_1 - k \cos \varphi_2}{\beta} \right),$$

由(1)式  $\sin \varphi_1 + k \sin \varphi_2 = 0$ , 所以

$$\begin{aligned} & \cos \varphi_1 - k \cos \varphi_2 \\ &= \pm \sqrt{(\cos \varphi_1 - k \cos \varphi_2)^2} \\ &= \pm \sqrt{[\cos \varphi_1 - k \cos \varphi_2]^2 + (\sin \varphi_1 + k \sin \varphi_2)^2} \\ &= \pm (\cos^2 \varphi_1 + k^2 \cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_1 + k^2 \sin^2 \varphi_2 \\ & \quad - 2k \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)^{1/2} \\ &= \pm \sqrt{1 + k^2 - 2k \cos(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

若无外磁场, 由(2)式  $\varphi_1 + \varphi_2 = \beta \sin \varphi_1 + 2n\pi$ , 所以得到

$$\begin{aligned} F &= \frac{L I_{cl}^2}{2} \left( \sin^2 \varphi_1 \pm \frac{2\sqrt{1 + k^2 - 2k \cos(\beta \sin \varphi_1)}}{\beta} \right) \\ &= \frac{L I_{cl}^2}{2} \left( i^2 \pm \frac{2\sqrt{1 + k^2 - 2k \cos(\beta \cdot i)}}{\beta} \right), \end{aligned} \quad (A1)$$

式中取“+”号对应的是自由能较高的解, 由于物理上稳定的解要求自由能低, 因此这里取“-”号, 所以得到自由能  $F$  的表达式

$$\begin{aligned} F &= \frac{L I_{cl}^2}{2} \left( \sin^2 \varphi_1 - \frac{2\sqrt{1 + k^2 - 2k \cos(\beta \sin \varphi_1)}}{\beta} \right) \\ &= \frac{L I_{cl}^2}{2} \left( i^2 - \frac{2\sqrt{1 + k^2 - 2k \cos(\beta \cdot i)}}{\beta} \right), \end{aligned}$$

即(8)式.

[1] Sigrist M and Rice T M 1992 *J. Phys. Soc. Japan* **61** 4283.  
[2] Tsuei C C, Kirtley J R, Chi C C, Lock See, Yu-Johnes, Gupta A, Shaw T, Sun J Z, and Ketchon M B 1994 *Phys. Rev. L* **73** 593  
Tsuei C C, Kirtley J R, Ren Z F, Wang J H and Bhushan M 1996 *Science* **271** 329

[3] Kirtley J R, Tsuei C C and Moler K A 1999 *Science* **285** 1373  
[4] Deng P, Meng S C, Wang F R, Xie F X, Ma P and Dai Y D 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2217 [in Chinese] 邓鹏, 孟树超, 王福仁, 谢飞翔, 马平, 戴远东 2001 *物理学报* **20** 2217]

- [ 5 ] Wang K , Ling J , Ma P , Xie F X and Dai Y D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1509 [ 王 科、凌 健、马 平、谢飞翔、戴远东 2003 物理学报 **52** 1509 ]
- [ 6 ] Li Z Z , Wang F R , Yang T , Liu X Y and Dai Y D 2004 *Chin. Phys.* **13** 532
- [ 7 ] Bennett C H , Divincenzo D P 2000 *Nature* **404** 247
- [ 8 ] Wollman D A , Van Harlingen D J , Giapintzakis J and Ginsberg D M 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 797
- [ 9 ] Barone A and Paterno G 1982 *Physics and Amlications of the Josephson Effect* John Wiley and Sons ,Inc. p26 [ A. 巴罗尼 ,G. 帕特诺 崔广霖 孟小凡译 1988 约瑟夫森效应原理和应用( 中国计量出版社 第 262 页 ) ]

## Study on spontaneous magnetization in a double-junction $\pi$ ring<sup>\*</sup>

Tan Zhong-Kui Mao Bo Wang Fu-Ren Li Zhuang-Zhi Nie Rui-Juan Dai Yuan-Dong

( State Key Laboratory for Artificial Microstructures and Mesoscopic Physics , Department of Physics , Peking University , Beijing 100871 , China )

( Received 17 December 2003 ; revised manuscript received 31 March 2004 )

### Abstract

We have discussed the conditions under which a double-junction  $\pi$  ring magnetize spontaneously and provided the theoretical derivation. The condition is not only related with the parameter of induction , but also related to the ratio of the critical currents of the two junctions. Analyzing the free energy illustrates that the spontaneous magnetization results in a stable state.

**Keywords** : double-junction  $\pi$  ring , spontaneous magnetization , free energy

**PACC** : 7475 , 7450

\* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China( Grant No. G1999064609 ).