第 54 卷 第 10 期 2005 年 10 月
1000-3290/2005/54(10)/4483-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.10,October,2005

完整有势力学系统的高阶 Lagrange 方程

张相武†

(陇东学院物理系,庆阳 745000)

(2005 年 2 月 23 日收到;2005 年 3 月 21 日收到修改稿)

首先提出力学系统高阶速度能定理,阐明了系统高阶速度能量的物理意义;然后提出力学系统有势的一般判据.在此基础上,引入高阶 Lagrange 函数,得出完整有势力学系统的高阶 Lagrange 方程,并得到系统高阶循环积分和高阶广义能量积分.

关键词:高阶速度能定理,有势力学系统,高阶 Lagrange 方程,高阶 Lagrange 函数
PACC:0320

1. 引 言

长期以来,人们已习惯于运用牛顿力学和传统分析力学解决现实中的力学问题.但现实中的力学问题并不完全如牛顿力学和传统分析力学那样理想和完美,力学系统的运动和受力往往更复杂.有时不知道力学系统所受的力的变化规律,可能知道的是力随时间的变化率(力变率)甚至是力随时间的高阶变化率(高阶力变率).此类力学问题已不能直接用牛顿动力学方程和传统分析力学方程得以解决.随着加速度随时间的变化率(急动度)[1—3]的提出,人们开始关注变加速运动问题,出现了系统加速度能量[4]、力变率[5]、猝量方程[6,7]、物体(或质点)加速度能定理[7]等变加速动力学概念及规律.1991 年,Mei 等人提出完整系统关于广义速度的 Lagrange 方程[4].2004 年,文献[8]给出该方程的一种推导方法,并称该方程为三阶 Lagrange 方程.2005 年,文献[9]得出三阶 Lagrange 方程的相对运动形式.最近,文献[10]从更普遍意义上引入系统的高阶速度能量,导出完整力学系统的高阶 Lagrange 方程、高阶 Nielsen 方程以及高阶 Appell 方程.本文首先得到力学系统的高阶速度能定理,阐明系统高阶速度能量的物理意义;然后提出力学系统有势的一般判据.在此基础上,引入系统的高阶 Lagrange 函数,得出完整有势力学系统的高阶 Lagrange 方程,并进一步得到系统高阶循环积分和高阶广义能量积分.

2. 完整有势力学系统的高阶 Lagrange 方程

研究 N 个质点组成的完整理想力学系统.设第 i 个质点的位矢为 $\boldsymbol{r}_i$,作用于其上的主动力合力和约束反力合力分别为 $\boldsymbol{F}_i$ 和 $\boldsymbol{R}_i$,它们一般是位矢 $\boldsymbol{r}_i$、速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 和时间 t 的函数.对第 i 个质点的牛顿动力学方程等式两端同时对时间求 m 阶导数,移项,得

$$\overset{(m)}{\boldsymbol{F}}_i + \overset{(m)}{\boldsymbol{R}}_i - m_i \overset{(m+2)}{\boldsymbol{r}}_i = 0$$
$$(i = 1,2,\cdots,N;m = 0,1,2,\cdots). \tag{1}$$

定义 1 称 $\delta \overset{(m+1)}{\boldsymbol{r}}_i$ 为第 i 个质点在 m 阶速度空间的虚位移.

定义 2 称 $\overset{(m)}{\boldsymbol{F}}_i \cdot \delta \overset{(m+1)}{\boldsymbol{r}}_i$ 为 m 阶力变率 $\overset{(m)}{\boldsymbol{F}}_i$ 在 m 阶速度空间的虚位移 $\delta \overset{(m+1)}{\boldsymbol{r}}_i$ 中作的元功.

定义 3 若在 m 阶速度空间中,某个约束产生的约束反力及 m 阶约束力变率沿着约束方程在该空间所确定的超曲面的法线方向,则称之为理想约束.

用第 i 个质点在 $m-1$ 阶速度空间的虚位移 $\delta \overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i$ 标乘(1)式,对 i 求和,并结合理想约束的定义,可得

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\overset{(m)}{\boldsymbol{F}}_i - m_i \overset{(m+2)}{\boldsymbol{r}}_i \right) \cdot \delta \overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i = 0. \tag{2}$$

† E-mail:zhxw0215@yahoo.com.cn

引入 s 个广义坐标 $q_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,s)$,则有

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_\alpha,t),\delta\overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\overset{(m)}{q}_\alpha}\delta\overset{(m)}{q}_\alpha,\tag{3}$$

由(3)式中 $\boldsymbol{r}_i$ 的表示形式,可求得

$$\frac{\partial\overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\overset{(m)}{q}_\alpha}=\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha},\frac{\partial\overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\overset{(m)}{q}_\alpha}=m\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_\alpha}.\tag{4}$$

将(3)式和(4)式代入(2)式,化简,可得

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left[Q_\alpha^m-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial S_m}{\partial\overset{(m+1)}{q}_\alpha}\right)+\frac{1}{m+1}\frac{\partial S_m}{\partial\overset{(m)}{q}_\alpha}\right]\delta\overset{(m)}{q}_\alpha=0$$
$$(m=0,1,2,\cdots).\tag{5}$$

其中 $S_m=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\overset{(m+1)}{\boldsymbol{r}}_i\cdot\overset{(m+1)}{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\overset{(m)}{\boldsymbol{v}}_i\cdot\overset{(m)}{\boldsymbol{v}}_i$ 称为系统的 m 阶速度能量, $Q_\alpha^m=\sum_{i=1}^{N}\overset{(m)}{\boldsymbol{F}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}$ 称为系统的 m 阶广义主动力变率. 由于系统是完整的, $\delta\overset{(m)}{q}_1,\delta\overset{(m)}{q}_2,\cdots,\delta\overset{(m)}{q}_s$ 彼此独立,因此由(5)式可得完整理想力学系统的高阶 Lagrange 方程为[10]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial S_m}{\partial\overset{(m+1)}{q}_\alpha}\right)-\frac{1}{m+1}\frac{\partial S_m}{\partial\overset{(m)}{q}_\alpha}=Q_\alpha^m$$
$$(\alpha=1,2,\cdots,s;m=0,1,2,\cdots).\tag{6}$$

2.1. 力学系统高阶速度能量的物理意义

定理 1　理想力学系统所有 m 阶主动力变率在 $m+1$ 阶速度空间作的功等于系统 $m+1$ 阶速度能量的变分,即

$$\sum_{i=1}^{N}\overset{(m)}{\boldsymbol{F}}_i\cdot\delta\overset{(m+2)}{\boldsymbol{r}}_i=\delta S_{m+1}\qquad(m=0,1,2,\cdots).\tag{7}$$

其中 $S_{m+1}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\overset{(m+2)}{\boldsymbol{r}}_i\cdot\overset{(m+2)}{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\overset{(m+1)}{\boldsymbol{v}}_i\cdot\overset{(m+1)}{\boldsymbol{v}}_i$ 称为系统的 $m+1$ 阶速度能量. 称(7)式为理想力学系统的高阶速度能定理.

证明　用第 i 个质点在 $m+1$ 阶速度空间的虚位移 $\delta\overset{(m+2)}{\boldsymbol{r}}_i$ 标乘(1)式,并对 i 求和,则得

$$\sum_{i=1}^{N}(\overset{(m)}{\boldsymbol{F}}_i+\overset{(m)}{\boldsymbol{R}}_i-m_i\overset{(m+2)}{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\overset{(m+2)}{\boldsymbol{r}}_i=0,$$

根据理想约束的定义,有

$$\sum_{i=1}^{N}\overset{(m)}{\boldsymbol{R}}_i\cdot\delta\overset{(m+2)}{\boldsymbol{r}}_i=0,$$

代入上式,得

$$\sum_{i=1}^{N}(\overset{(m)}{\boldsymbol{F}}_i-m_i\overset{(m+2)}{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\overset{(m+2)}{\boldsymbol{r}}_i=0,$$

由此式即得

$$\sum_{i=1}^{N}\overset{(m)}{\boldsymbol{F}}_i\cdot\delta\overset{(m+2)}{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{i=1}^{N}m_i\overset{(m+2)}{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\overset{(m+2)}{\boldsymbol{r}}_i$$
$$=\delta\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\overset{(m+2)}{\boldsymbol{r}}_i\cdot\overset{(m+2)}{\boldsymbol{r}}_i\right)$$
$$=\delta S_{m+1},$$

于是定理成立. 证毕.

需指出,若力学系统是非理想的,则只需将诸约束反力及其各阶约束力变率沿约束方程在高阶速度空间所确定的超曲面的切向分量归入主动力及各阶主动力变率,定理 1 仍可适用.

由定理 1 可见,系统高阶速度能量是描述高阶力变率作用下系统在高阶速度空间中运动状态的物理量.

2.2. 力学系统有势的一般判据

判据 1　对理想力学系统,如果所有 m 阶主动力变率在 $m-1$ 阶速度空间作的功与系统在该空间所经路径无关,即

$$\sum_{i=1}^{N}\overset{(m)}{\boldsymbol{F}}_i\cdot\delta\overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{\alpha=1}^{s}Q_\alpha^m\delta\overset{(m)}{q}_\alpha=-\delta V_m$$
$$(m=0,1,2,\cdots),\tag{8}$$

亦即

$$Q_\alpha^m=-\frac{\partial V_m}{\partial\overset{(m)}{q}_\alpha}\qquad(m=0,1,2,\cdots),\tag{9}$$

其中 $V_m=V_m(\overset{(m)}{q}_1,\overset{(m)}{q}_2,\cdots,\overset{(m)}{q}_s,t)$,则系统各 m 阶主动力变率或各 m 阶广义主动力变率是有势的,称该力学系统为有势力学系统,称函数 V_m 为 $m-1$ 阶速度空间的势或势函数.

当 $m=0$ 时,(8)式或(9)式正是传统力学中力或广义力有势的判据. 因此,将(8)式或(9)式作为力学系统有势的判据,可将传统力学中力的势、广义力的势推广到力变率、广义力变率的势以及高阶力变率、高阶广义力变率的势,从而扩充了传统力学中势的概念.

2.3. 完整有势力学系统的高阶 Lagrange 方程

如果完整力学系统是有势的,则将(9)式代入(6)式,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial S_m}{\partial\overset{(m+1)}{q}_\alpha}\right)-\frac{1}{m+1}\frac{\partial S_m}{\partial\overset{(m)}{q}_\alpha}=-\frac{\partial V_m}{\partial\overset{(m)}{q}_\alpha},\tag{10}$$

因为势函数 V_m 中不含 m 阶广义速度 $\overset{(m+1)}{q}_\alpha$,故如令

$$L_m = S_m - (m+1)V_m, \tag{11}$$

则(10)式变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L_m}{\partial \overset{(m+1)}{q}_\alpha}\right) - \frac{1}{m+1}\frac{\partial L_m}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha} = 0$$

$$(\alpha = 1,2,\cdots,s;m = 0,1,2,\cdots). \tag{12}$$

(12)式称为完整、理想、有势的力学系统的高阶 Lagrange 方程. 当 $m=0$ 时,(12)式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L_0}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1,2,\cdots,s), \tag{13}$$

这正是传统分析力学中有势力学系统的 Lagrange 方程,其中 $L_0 = S_0 - V_0 = T - V$ 也正是传统分析力学中的 Lagrange 函数. 当 $m=1$ 时,(12)式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \ddot{q}_\alpha}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1,2,\cdots,s), \tag{14}$$

(14)式称为完整有势力学系统的三阶 Lagrange 方程,其中 $L_1 = S_1 - 2V_1$ 可称为系统的一阶 Lagrange 函数.

由于系统高阶速度能量可表示为

$$S_m = S_m(q_\alpha,\dot{q}_\alpha,\ddot{q}_\alpha,\cdots,\overset{(m)}{q}_\alpha\ \overset{(m+1)}{q}_\alpha,t)$$

$$(\alpha = 1,2,\cdots,s;m = 0,1,2,\cdots), \tag{15}$$

于是

$$L_m = L_m(q_\alpha,\dot{q}_\alpha,\ddot{q}_\alpha,\cdots,\overset{(m)}{q}_\alpha\ \overset{(m+1)}{q}_\alpha,t)$$

$$(\alpha = 1,2,\cdots,s;m = 0,1,2,\cdots), \tag{16}$$

称 L_m 为系统的 m 阶 Lagrange 函数.

由(6)式、(11)式和(12)式,有

$$p_\alpha^m = \frac{\partial S_m}{\partial \overset{(m+1)}{q}_\alpha} = \frac{\partial L_m}{\partial \overset{(m+1)}{q}_\alpha}$$

$$(\alpha = 1,2,\cdots,s;m = 0,1,2,\cdots), \tag{17}$$

称 p_α^m 为系统的 m 阶广义动量.

3. 完整力学系统的高阶循环积分

若 m 阶 Lagrange 函数中不显含某些 $m-1$ 阶广义速度 $\overset{(m)}{q}_r$ $(1 \leqslant r \leqslant s)$,即有

$$\frac{\partial L_m}{\partial \overset{(m)}{q}_r} = 0 \qquad (1 \leqslant r \leqslant s), \tag{18}$$

则称 $\overset{(m)}{q}_r$ 为系统的 $m-1$ 阶循环速度. 此时由(12)式,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L_m}{\partial \overset{(m+1)}{q}_r}\right) = 0 \text{ 亦即}$$

$$\frac{\partial L_m}{\partial \overset{(m+1)}{q}_r} = b_r = \mathrm{const}. \tag{19}$$

(19)式是(12)式的第一积分,称为与高阶循环速度 $\overset{(m)}{q}_r$ 相对应的高阶循环积分. 它就是与高阶循环速度 $\overset{(m)}{q}_r$ 相对应的高阶广义动量守恒原理.

4. 完整力学系统的高阶广义能量积分

定理 2　若理想完整有势力学系统的 m 阶 Lagrange 函数 L_m 满足条件

$$\frac{\partial L_m}{\partial t} = 0, \tag{20}$$

及

$$\frac{\partial L_m}{\partial \overset{(k)}{q}_\alpha} = 0 \quad (k = 0,1,2,\cdots,m), \tag{21}$$

则系统存在高阶广义能量积分

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_m}{\partial \overset{(m+1)}{q}_\alpha}\overset{(m+1)}{q}_\alpha - L_m = h_m = \mathrm{const}.$$

$$(m = 1,2,\cdots). \tag{22}$$

证明　由(16)式,有

$$\frac{\mathrm{d}L_m}{\mathrm{d}t} = \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{k=0}^{m+1}\frac{\partial L_m}{\partial \overset{(k)}{q}_\alpha}\overset{(k+1)}{q}_\alpha + \frac{\partial L_m}{\partial t}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_m}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial L_m}{\partial \overset{(k+1)}{q}_\alpha}\overset{(k+2)}{q}_\alpha + \frac{\partial L_m}{\partial t},$$

m 阶广义动量与对应的 m 阶广义速度乘积之和对时间的导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_m}{\partial \overset{(m+1)}{q}_\alpha}\overset{(m+1)}{q}_\alpha\right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_m}{\partial \overset{(m+1)}{q}_\alpha}\overset{(m+2)}{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L_m}{\partial \overset{(m+1)}{q}_\alpha}\right)\overset{(m+1)}{q}_\alpha,$$

于是,结合完整有势力学系统的高阶 Lagrange 方程(12)式,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_m}{\partial \overset{(m+1)}{q}_\alpha}\overset{(m+1)}{q}_\alpha - L_m\right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_m}{\partial \overset{(m+1)}{q}_\alpha}\overset{(m+2)}{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L_m}{\partial \overset{(m+1)}{q}_\alpha}\right)\overset{(m+1)}{q}_\alpha$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{k=0}^{m+1}\frac{\partial L_m}{\partial \overset{(k)}{q}_\alpha}\overset{(k+1)}{q}_\alpha - \frac{\partial L_m}{\partial t}$$

$$= -\frac{m}{m+1}\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_m}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha}\overset{(m+1)}{q}_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\partial L_m}{\partial \overset{(k)}{q}_\alpha}\overset{(k+1)}{q}_\alpha - \frac{\partial L_m}{\partial t}.$$

显然,当(20)式、(21)式满足时,上式等于零,定理成立.证毕.

需特别指出的是,定理 2 适用于 $m \neq 0$ 的情形.当 $m = 0$ 时,由定理 2 的证明过程可以看出,只要满足条件(20)式,系统就存在广义能量积分

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L_0 = h_0 = \mathrm{const}.$$

这与传统分析力学的结论是一致的.

5.讨 论

传统分析力学中,完整有势力学系统的 Lagrange 方程占有重要的地位.出现在该方程中的 Lagrange 函数不仅在 Lagrange 力学而且在 Hamilton 力学甚至更大范围里显示出了独特的作用.因此,得出完整有势力学系统高阶 Lagrange 方程也具有重要意义.研究力变率或高阶力变率作用下完整有势力学系统的高阶 Lagrange 方程及高阶 Lagrange 函数,是变加速动力学研究中重要的一环,它将给变加速动力学的研究开辟广阔的空间.

[1] Schot S H 1978 *Am. J. Phys.* **46** 1090

[2] Zhu M 1983 *Mech. Practice* **5** 48 (in Chinese)[朱 明 1983 力学与实践 **5** 48]

[3] Tan K F,Zhao Y K and Guo X D 1988 *Mech. Practice* 10 **46** (in Chinese)[谈开孚、赵永凯、郭小弟 1988 力学与实践 **10** 46]

[4] Mei F X, Liu D and Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing:Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、刘 端、罗 勇 1991 高等分析力学(北京 北京理工大学出版社)]

[5] Huang P T 1981 *Physics* **10** 94 (in Chinese)[黄沛天 1981 物理 **10** 94]

[6] Shen H C 2000 *Physics* **29** 743 (in Chinese)[沈惠川 2000 物理 **29** 743]

[7] Huang P T, Huang W and Hu L Y 2003 *J. Jiangxi Normal Univ.* **27** 8 [黄沛天、黄 文、胡利云 2003 江西师范大学学报 **27** 8]

[8] Ma S J, Xu X X, Huang P T and Hu L Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3648 (in Chinese)[马善钧、徐学翔、黄沛天、胡利云 2004 物理学报 **53** 3648]

[9] Ma S J 2005 *Chin. Phys.* **14** 244

[10] Zhang X W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3978 (in Chinese)[张相武 2005 物理学报 **54** 3978]

Higher order Lagrange equations of holonomic potential mechanical system

Zhang Xiang-Wu†

(*Department of Physics*, *Longdong University*, *Qingyang* 745000, *China*)

(Received 23 February 2005; revised manuscript received 21 March 2005)

Abstract

First, the theorem on energy of higher order velocity of the holonomic potential mechanical system is presented with on explaining of the physical meaning of energy of higher order velocity of the system. The general criterion of potential mechanical system is then presented. On this basis, the higher order Lagrange function is introduced, the higher order Lagrange equations of holonomic potential mechanical system are derived, and the higher order cyclic integral and the integral of higher order generalized energy of the system are obtained.

Keywords: theorem of energy of higher order velocity, potential mechanical system, higher order Lagrange equations, higher order Lagrange function

PACC: 0320

† E-mail: zhxw0215@yahoo.com.cn