第 54 卷 第 10 期 2005 年 10 月
1000-3290/2005/54(10)/4501-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.10,October,2005
©2005 Chin.Phys.Soc.

非线性发展方程的丰富的 Jacobi 椭圆函数解*

吕大昭†

(北京建筑工程学院基础部,北京 100044)

(2004 年 8 月 26 日收到;2005 年 2 月 21 日收到修改稿)

通过把十二个 Jacobi 椭圆函数分类成四组,提出了新的广泛的 Jacobi 椭圆函数展开法,利用这一方法求得了非线性发展方程的丰富的 Jacobi 椭圆函数双周期解.当模数 $m\to 0$ 或 1 时,这些解退化为相应的三角函数解或孤立波解和冲击波解.

关键词:非线性发展方程,Jacobi 椭圆函数,双周期解,行波解

PACC:0340K,0290

1. 引 言

直接寻找非线性发展方程的精确解在非线性科学中占有非常重要的地位.因此,近几年来人们提出了许多方法[1—3].最近,刘式适等人提出了 Jacobi 椭圆函数展开法[4,5],求得了一大类非线性发展方程的周期解,包括对应的冲击波解和孤立波解;随后,张善卿等人利用秩的概念扩充了 Jacobi 椭圆函数展开法的应用范围[6],得到了更多的非线性发展方程的周期解;而闫、沈和李等人分别推广了 Jacobi 椭圆函数展开法的展开形式[7—14],获得了非线性发展方程更多的周期解;刘等人将在行波变换下的 Jacobi 椭圆函数展开法推广到一般函数变换下进行[15],得到了非线性发展方程的新的周期解.然而,我们仍然认为这些方法[2—15]是部分展开法,本文通过对十二个 Jacobi 椭圆函数的性质进行深入研究,将它们分类成四组,从而提出了更一般的广泛的 Jacobi 椭圆函数展开法,利用这一方法得到了非线性发展方程的丰富的周期解,在极限情形,这些解也可以退化为对应的冲击波解和孤立波解或三角函数解.

2. 广泛的 Jacobi 椭圆函数展开法

首先在对十二个 Jacobi 椭圆函数的性质进行深入的研究之后,发现可以将它们分类成四组,即

(i) $\mathrm{sn}\xi$,$\mathrm{cn}\xi$ 和 $\mathrm{dn}\xi$

(ii) $\mathrm{ns}\xi=\dfrac{1}{\mathrm{sn}\xi}$,$\mathrm{cs}\xi=\dfrac{\mathrm{cn}\xi}{\mathrm{sn}\xi}$ 和 $\mathrm{ds}\xi=\dfrac{\mathrm{dn}\xi}{\mathrm{sn}\xi}$

(iii) $\mathrm{sc}\xi=\dfrac{\mathrm{sn}\xi}{\mathrm{cn}\xi}$,$\mathrm{nc}\xi=\dfrac{1}{\mathrm{cn}\xi}$ 和 $\mathrm{dc}\xi=\dfrac{\mathrm{dn}\xi}{\mathrm{cn}\xi}$

(iv) $\mathrm{sd}\xi=\dfrac{\mathrm{sn}\xi}{\mathrm{dn}\xi}$,$\mathrm{cd}\xi=\dfrac{\mathrm{cn}\xi}{\mathrm{dn}\xi}$ 和 $\mathrm{nd}\xi=\dfrac{1}{\mathrm{dn}\xi}$

其次,在上面分析的基础之上,我们提出了如下的广泛的 Jacobi 椭圆函数展开法.

步骤 1 约化偏微分方程到常微分方程

对于给定的非线性发展方程

$$P(u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\cdots)=0. \tag{1}$$

在行波变换

$$u=u(\xi),\xi=k(x-\lambda t) \tag{2}$$

下,(1)式约化为如下的常微分方程

$$G\left(u,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi},\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2},\cdots\right)=0. \tag{3}$$

步骤 2 假设有限级数形式解

设常微分方程(3)有如下形式的 Jacobi 椭圆函数有限级数解

$$\begin{aligned}u(\xi)&=a_0+a_1\mathrm{sn}\xi+b_1\mathrm{cn}\xi+c_1\mathrm{dn}\xi\\&\quad+\sum_{i=2}^{n}\mathrm{sn}^{i-2}\xi(a_i\mathrm{sn}^2\xi+b_i\mathrm{sn}\xi\mathrm{cn}\xi\\&\quad+c_i\mathrm{sn}\xi\mathrm{dn}\xi+d_i\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi)\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}u(\xi)&=a_0+a_1\mathrm{ns}\xi+b_1\mathrm{cs}\xi+c_1\mathrm{ds}\xi\\&\quad+\sum_{i=2}^{n}\mathrm{ns}^{i-2}\xi(a_i\mathrm{ns}^2\xi+b_i\mathrm{ns}\xi\mathrm{cs}\xi\\&\quad+c_i\mathrm{ns}\xi\mathrm{ds}\xi+d_i\mathrm{cs}\xi\mathrm{ds}\xi)\end{aligned} \tag{4.2}$$

* 北京建筑工程学院基础科学基金(批准号:1004048)资助的课题.

† 通信作者.E-mail:lvdazhao86@163.com

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \mathrm{sc}\xi + b_1 \mathrm{nc}\xi + c_1 \mathrm{dc}\xi + \sum_{i=2}^{n} \mathrm{sc}^{i-2}\xi(a_i \mathrm{sc}^2\xi + b_i \mathrm{sc}\xi\mathrm{nc}\xi + c_i \mathrm{sc}\xi\mathrm{dc}\xi + d_i \mathrm{nc}\xi\mathrm{dc}\xi) \tag{4.3}$$

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \mathrm{sd}\xi + b_1 \mathrm{cd}\xi + c_1 \mathrm{nd}\xi + \sum_{i=2}^{n} \mathrm{sd}^{i-2}\xi(a_i \mathrm{sd}^2\xi + b_i \mathrm{sd}\xi\mathrm{cd}\xi + c_i \mathrm{sd}\xi\mathrm{nd}\xi + d_i \mathrm{cd}\xi\mathrm{nd}\xi) \tag{4.4}$$

其中 n 是待定参数.

步骤 3　确定参数 n 的值

定义 $u(\xi)$的次数为 $D[u(\xi)] = n$,则

$$D\left[\frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}\xi^m}\right] = n + m, D\left[\left(\frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}\xi^m}\right)^q\right] = q(n + m),$$

$$D\left[u^p\left(\frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}\xi^m}\right)^q\right] = np + q(n + m)$$

通过平衡(3)式中的最高阶导数项和非线性项,可以确定 n 的值.

步骤 4　获得超定代数方程组

把(4)式代入到(3)式中可以得到一个关于 Jacobi 椭圆函数的方程,然后进行约化,合并同幂次项,最后令它们的系数为零,则获得了一个关于未知数 $k, \lambda, a_0, a_i, b_i, c_i, d_{i+1}$ $(i = 1,2,\cdots)$的超定代数方程组.利用吴-特征列方法解此超定代数方程组[16],得到 $k, \lambda, a_0, a_i, b_i, c_i, d_{i+1}$ $(i = 1,2,\cdots)$的值.

步骤 5　求得丰富的 Jacobi 椭圆函数解

把从步骤 4 得到的 $k, \lambda, a_0, a_i, b_i, c_i, d_{i+1}$ $(i = 1,2,\cdots)$的值代入到(4)式,我们就能获得丰富的 Jacobi 椭圆函数双周期解.

评论　我们的方法比 Jacobi 椭圆函数展开法及其推广方法[2—15]更加广泛.即,用方法[2—15]求得到的非线性发展方程的精确解仅仅是用我们的方法所求得到的解的特例.另外,广泛的 Jacobi 椭圆函数展开法易于在计算机上执行.

3. 例子和应用

3.1. KdV 方程

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxt} = 0 \tag{5}$$

把(2)式代入到(5)式,得

$$-\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + \beta k^2\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}\xi^3} = 0. \tag{6}$$

平衡(6)式中的最高阶导数项和非线性项得 $n = 2$. 因此,利用步骤 4—5,我们能获得下面丰富的 Jacobi 椭圆函数解,其中 $0 \leqslant m \leqslant 1$ 是 Jacobi 椭圆函数的模数.另外,定义 $a \pm b = a + b$ 或 $a - b$;$a \pm b \pm c = a + b + c$ 或 $a - b - c$;$a \substack{+\\-\\+} b \substack{-\\+\\+} c = a + b - c$ 或 $a - b + c$ 或 $a + b + c$;$a \substack{-\\+\\+\\-} b \substack{-\\+\\-\\+} c \substack{+\\+\\-\\-} d = a - b - c + d$ 或 $a + b + c + d$ 或 $a + b - c - d$ 或 $a - b + c - d$,等等.

3.1.1. $\mathrm{sn}\xi$,$\mathrm{cn}\xi$ 和 $\mathrm{dn}\xi$ 展开法

利用(4.1)式,得到 KdV 方程(5)的解:

$$u_1 = 4\beta m^2 k^2 + 4\beta k^2 + \lambda - 12\beta m^2 k^2 \mathrm{sn}^2(k(x - \lambda t));$$

$$u_2 = \beta m^2 k^2 + \beta k^2 + \lambda - 6\beta m k^2(m\,\mathrm{sn}^2(k(x - \lambda t)) \pm \mathrm{cn}(k(x - \lambda t))\mathrm{dn}(k(x - \lambda t))).$$

3.1.2. $\mathrm{ns}\xi$,$\mathrm{cs}\xi$ 和 $\mathrm{ds}\xi$ 展开法

利用(4.2)式,得到 KdV 方程(5)的解.

$$u_3 = 4\beta m^2 k^2 + 4\beta k^2 + \lambda - 12\beta k^2 \mathrm{ns}^2(k(x - \lambda t));$$

$$u_4 = 4\beta m^2 k^2 + \beta k^2 + \lambda - 6\beta k^2(\mathrm{ns}^2(k(x - \lambda t)) \pm \mathrm{ns}(k(x - \lambda t))\mathrm{cs}(k(x - \lambda t)));$$

$$u_5 = \beta m^2 k^2 + 4\beta k^2 + \lambda - 6\beta k^2(\mathrm{ns}^2(k(x - \lambda t)) \pm \mathrm{ns}(k(x - \lambda t))\mathrm{ds}(k(x - \lambda t)));$$

$$u_6 = \beta m^2 k^2 + \beta k^2 + \lambda - 6\beta k^2(\mathrm{ns}^2(k(x - \lambda t)) \pm \mathrm{cs}(k(x - \lambda t))\mathrm{ds}(k(x - \lambda t)));$$

$$u_7 = \beta m^2 k^2 + \beta k^2 + \lambda - 3\beta k^2\Big(\mathrm{ns}^2(k(x - \lambda t)) \substack{-\\+\\-\\+} \mathrm{ns}(k(x - \lambda t))\mathrm{cs}(k(x - \lambda t))) \substack{+\\+\\-\\-} \mathrm{ns}(k(x - \lambda t))\mathrm{ds}(k(x - \lambda t)) \substack{-\\+\\+\\-} \mathrm{cs}(k(x - \lambda t))\mathrm{ds}(k(x - \lambda t))\Big).$$

3.1.3. $\mathrm{sc}\xi$,$\mathrm{nc}\xi$ 和 $\mathrm{dc}\xi$ 展开法

利用(4.3)式,得到 KdV 方程(5)的解.

$$u_8 = 4\beta m^2 k^2 - 8\beta k^2 + \lambda - 12\beta k^2(1 - m^2)\mathrm{sc}^2(k(x - \lambda t));$$

$$u_9 = 4\beta m^2 k^2 - 5\beta k^2 + \lambda - 6\beta k^2\sqrt{1 - m^2}(\sqrt{1 - m^2}\,\mathrm{sc}^2(k(x - \lambda t)) \pm \mathrm{sc}(k(x - \lambda t))\mathrm{dc}(k(x - \lambda t)));$$

$$u_{10} = \beta m^2 k^2 - 5\beta k^2 + \lambda - 6\beta k^2\sqrt{1 - m^2}(\sqrt{1 - m^2}\,\mathrm{sc}^2(k(x - \lambda t)) \pm \sqrt{1 - m^2}\,\mathrm{sc}(k(x - \lambda t))\mathrm{nc}(k(x - \lambda t)));$$

$$u_{11} = \beta m^2 k^2 - 2\beta k^2 + \lambda$$

$$-6\beta k^2\sqrt{1-m^2}\left(\sqrt{1-m^2}\,\mathrm{sc}^2(k(x-\lambda t)) \pm \mathrm{nc}(k(x-\lambda t))\,\mathrm{dc}(k(x-\lambda t))\right);$$

$$\begin{aligned}u_{12} = {}& \beta m^2k^2-2\beta k^2+\lambda \\ &-3\beta k^2\sqrt{1-m^2}\Big(\sqrt{1-m^2}\,\mathrm{sc}^2(k(x-\lambda t)) \\ &\substack{-\\+\\+\\-}\ \mathrm{sc}(k(x-\lambda t))\,\mathrm{dc}(k(x-\lambda t)) \\ &\substack{-\\+\\-\\+}\sqrt{1-m^2}\,\mathrm{sc}(k(x-\lambda t))\,\mathrm{nc}(k(x-\lambda t)) \\ &\substack{+\\+\\-\\-}\ \mathrm{nc}(k(x-\lambda t))\,\mathrm{dc}(k(x-\lambda t))\Big).\end{aligned}$$

3.1.4. sdξ,cdξ 和 ndξ 展开法

利用(4.4)式,得到 KdV 方程(5)的解.

$$\begin{aligned}u_{13} = {}& -8\beta m^2k^2+4\beta k^2+\lambda \\ &+12\beta m^2k^2(1-m^2)\,\mathrm{sd}^2(k(x-\lambda t));\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{14} = {}& -5\beta m^2k^2+\beta k^2+\lambda \\ &+6\beta mk^2\sqrt{1-m^2}\Big(m\sqrt{1-m^2}\,\mathrm{sd}^2(k(x-\lambda t)) \\ &\pm\sqrt{1-m^2}\,\mathrm{sd}(k(x-\lambda t))\,\mathrm{nd}(k(x-\lambda t))\Big).\end{aligned}$$

由于在文献[14]中李等人采用的是(4.1)一种展开形式,所以在适当的选取参数和变换下,文献[14]中求出的 KdV 方程的解是我们求出的解的特例.

3.2. 修正的 BBM 方程

$$u_t+u_x+u^2u_x+\alpha u_{xxt}=0. \tag{7}$$

把(2)式代入到(7)式,得

$$(1-\lambda)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+u^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}-\alpha\lambda k^2\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\xi^3}=0. \tag{8}$$

平衡(8)式中的最高阶导数项和非线性项得 $n=1$. 因此,利用步骤 4—5,我们能获得下面丰富的 Jacobi 椭圆函数解,其中 $0\leqslant m\leqslant 1$ 是 Jacobi 椭圆函数的模数. 另外,定义 $a\pm b$ 等于 $a+b$,或 $a-b$;$a\pm b\pm c$ 等于 $a+b+c$,或 $a-b-c$;$a\ \substack{-\\+\\-}\ b\ \substack{-\\+\\+}\ c$ 等于 $a-b-c$ 或 $a+b+c$ 或 $a-b+c$;$a\ \substack{-\\-\\+\\+}\ b\ \substack{+\\-\\+\\-}\ c\ \substack{-\\+\\+\\-}\ d$ 等于 $a-b+c-d$ 或 $a-b-c+d$ 或 $a+b+c+d$ 或 $a+b-c-d$,等等.

3.2.1. snξ,cnξ 和 dnξ 展开法

利用(4.1)式,得到修正的 BBM 方程(7)的解.

$$u_1=\pm mk\sqrt{\frac{-6\alpha}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2-1}}\times\mathrm{sn}\left(kx+\frac{kt}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2-1}\right);$$

$$u_2=\pm mk\sqrt{\frac{-6\alpha}{2\alpha k^2m^2-\alpha k^2+1}}\times\mathrm{cn}\left(kx-\frac{kt}{2\alpha k^2m^2-\alpha k^2+1}\right);$$

$$u_3=\pm k\sqrt{\frac{6\alpha}{\alpha k^2m^2-2\alpha k^2-1}}\times\mathrm{dn}\left(kx+\frac{kt}{\alpha k^2m^2-2\alpha k^2-1}\right);$$

$$\begin{aligned}u_4 = {}& k\sqrt{\frac{-3\alpha}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2+2}} \\ &\times\left(\substack{-\\+\\-\\+}\ m\,\mathrm{cn}\left(kx-\frac{2kt}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2+2}\right)\right. \\ &\left.\substack{+\\-\\-\\+}\ \mathrm{dn}\left(kx-\frac{2kt}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2+2}\right)\right).\end{aligned}$$

3.2.2. nsξ,csξ 和 dsξ 展开法

利用(4.2)式,得到修正的 BBM 方程(7)的解.

$$u_5=\pm k\sqrt{\frac{-6\alpha}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2-1}}\times\mathrm{ns}\left(kx+\frac{kt}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2-1}\right);$$

$$u_6=\pm k\sqrt{\frac{-6\alpha}{\alpha k^2m^2-2\alpha k^2-1}}\times\mathrm{cs}\left(kx+\frac{kt}{\alpha k^2m^2-2\alpha k^2-1}\right);$$

$$u_7=\pm k\sqrt{\frac{6\alpha}{2\alpha k^2m^2-\alpha k^2+1}}\times\mathrm{ds}\left(kx-\frac{kt}{2\alpha k^2m^2-\alpha k^2+1}\right);$$

$$\begin{aligned}u_8 = {}& k\sqrt{\frac{-3\alpha}{2\alpha k^2m^2-\alpha k^2-2}} \\ &\times\left(\substack{+\\-\\+\\-}\ \mathrm{ns}\left(kx+\frac{2kt}{2\alpha k^2m^2-\alpha k^2-2}\right)\right. \\ &\left.\substack{+\\+\\-\\-}\ \mathrm{cs}\left(kx+\frac{2kt}{2\alpha k^2m^2-\alpha k^2-2}\right)\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_9 = {}& k\sqrt{\frac{3\alpha}{\alpha k^2m^2-2\alpha k^2+2}} \\ &\times\left(\substack{-\\+\\-\\+}\ \mathrm{ns}\left(kx-\frac{2kt}{\alpha k^2m^2-2\alpha k^2+2}\right)\right. \\ &\left.\substack{-\\-\\+\\+}\ \mathrm{ds}\left(kx-\frac{2kt}{\alpha k^2m^2-2\alpha k^2+2}\right)\right);\end{aligned}$$

$$u_{10}=k\sqrt{\frac{3\alpha}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2+2}}$$

$$\times\left(\begin{smallmatrix}-\\+\\-\\+\end{smallmatrix}\ \mathrm{cs}\left(kx-\frac{2kt}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2+2}\right)\right.$$

$$\left.\begin{smallmatrix}-\\-\\+\\+\end{smallmatrix}\ \mathrm{ds}\left(kx-\frac{2kt}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2+2}\right)\right).$$

3.2.3. $\mathrm{sc}\xi$，$\mathrm{nc}\xi$ 和 $\mathrm{dc}\xi$ 展开法

利用(4.3)式，得到修正的 BBM 方程(7)的解.

$$u_{11}=\pm k\sqrt{\frac{-6\alpha(1-m^2)}{\alpha k^2m^2-2\alpha k^2-1}}\times\mathrm{sc}\left(kx+\frac{kt}{\alpha k^2m^2-2\alpha k^2-1}\right);$$

$$u_{12}=\pm k\sqrt{\frac{6\alpha(1-m^2)}{2\alpha k^2m^2-\alpha k^2+1}}\times\mathrm{nc}\left(kx-\frac{kt}{2\alpha k^2m^2-\alpha k^2+1}\right);$$

$$u_{13}=\pm k\sqrt{\frac{-6\alpha}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2-1}}\times\mathrm{dc}\left(kx+\frac{kt}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2-1}\right);$$

$$u_{14}=k\sqrt{\frac{3\alpha(1-m^2)}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2+2}}\times\left(\begin{smallmatrix}-\\+\\+\\-\end{smallmatrix}\ \mathrm{sc}\left(kx-\frac{2kt}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2+2}\right)\begin{smallmatrix}-\\-\\+\\+\end{smallmatrix}\ \mathrm{nc}\left(kx-\frac{2kt}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2+2}\right)\right);$$

$$u_{15}=k\sqrt{\frac{-3\alpha}{2\alpha k^2m^2-\alpha k^2-2}}\times\left(\begin{smallmatrix}-\\+\\-\\+\end{smallmatrix}\sqrt{1-m^2}\,\mathrm{sc}\left(kx+\frac{2kt}{2\alpha k^2m^2-\alpha k^2-2}\right)\begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix}\ \mathrm{dc}\left(kx+\frac{2kt}{2\alpha k^2m^2-\alpha k^2-2}\right)\right);$$

$$u_{16}=k\sqrt{\frac{3\alpha}{\alpha k^2m^2-2\alpha k^2+2}}\times\left(\begin{smallmatrix}+\\-\\+\\-\end{smallmatrix}\sqrt{1-m^2}\,\mathrm{nc}\left(kx-\frac{2kt}{\alpha k^2m^2-2\alpha k^2+2}\right)\begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix}\ \mathrm{dc}\left(kx-\frac{2kt}{\alpha k^2m^2-2\alpha k^2+2}\right)\right).$$

3.2.4. $\mathrm{sd}\xi$，$\mathrm{cd}\xi$ 和 $\mathrm{nd}\xi$ 展开法

利用(4.4)式，得到修正的 BBM 方程(7)的解.

$$u_{17}=\pm mk\sqrt{\frac{-6\alpha(1-m^2)}{2\alpha k^2m^2-\alpha k^2+1}}\times\mathrm{sd}\left(kx-\frac{kt}{2\alpha k^2m^2-\alpha k^2+1}\right);$$

$$u_{18}=\pm mk\sqrt{\frac{6\alpha}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2-1}}\times\mathrm{cd}\left(kx+\frac{kt}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2-1}\right);$$

$$u_{19}=\pm k\sqrt{\frac{6\alpha(1-m^2)}{\alpha k^2m^2-2\alpha k^2-1}}\times\mathrm{nd}\left(kx+\frac{kt}{\alpha k^2m^2-2\alpha k^2-1}\right);$$

$$u_{20}=k\sqrt{\frac{-3\alpha(1-m^2)}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2+2}}\times\left(\begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix}\ m\,\mathrm{sd}\left(kx-\frac{2kt}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2+2}\right)\begin{smallmatrix}-\\+\\+\\-\end{smallmatrix}\ \mathrm{nd}\left(kx-\frac{2kt}{\alpha k^2m^2+\alpha k^2+2}\right)\right).$$

4. 结 论

本文通过把十二个 Jacobj 椭圆函数分类成四组，进而提出并利用广义的 Jacobi 椭圆函数展开法求出了非线性发展方程的丰富的 Jacobi 椭圆函数解，当模数 $m\to0$ 或 1 时，这些解退化为相应的三角函数解或孤立波解和冲击波解，限于篇幅，这里从略.另外，我们省略了已经求出的非线性发展方程的在物理学中无意义的复数解.

[1] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[2] Malfliet W 1992 *Amer. J. Phys.* **60** 65

[3] Yan C T 1996 *Phys. Lett.* A **224** 77

[4] Liu S K *et al* 2001 *Phys. Lett.* A **289** 69

[5] Liu S K *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适等 2001 物理学报 **50** 2068]

[6] Zhang S Q *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1066 (in Chinese) [张善卿等 2003 物理学报 **52** 1066]

[7] Yan Z Y 2002 *Comput. Phys. Commun.* **148** 30

[8] Yan Z Y 2003 *Comput. Phys. Commun.* **153** 145

[9] Yan Z Y 2003 *Comput. Phys. Commun.* **153** 1

[10] Yan Z Y 2003 *Inter. J. Modern Physics* C **14** 277

[11] Yan Z Y 2003 *Chaos*, *Solitons and Fractals* **15** 575
[12] Yan Z Y 2003 *Chaos*, *Solitons and Fractals* **18** 299
[13] Shen S F *et al* 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2056 (in Chinese) [沈守枫等 2004 物理学报 **53** 2056]
[14] Li P *et al* 2004 *Phys*. *Lett*. A **332** 39
[15] Liu G T *et al* 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 676 (in Chinese) [刘官厅等 2004 物理学报 **53** 676]
[16] Wang D M 2001 *Elimination Methods* (New York: Springer-Verlag Wien)

Abundant Jacobi elliptic function solutions of nonlinear evolution equations*

Lü Da-Zhao†
(*Department of Basic Sciences*, *Beijing Institute of Civil Engineering and Architecture*, *Beijing* 100044, *China*)
(Received 26 August 2004; revised manuscript received 21 February 2005)

Abstract

In this paper, the twelve Jacobi elliptic functions are divided into four groups, and a new general Jacobi elliptic function expansion method is proposed to construct abundant doubly periodic Jacobi elliptic function solutions of nonlinear evolution equations. By this method, many exact doubly periodic solutions are obtained which shows the powerfulness of this method. When the modulus $m \to 1$ or 0, these solutions degenerate to the corresponding solitary wave solutions, shock wave solutions or trigonometric function (singly periodic) solutions.

Keywords: nonlinear evolution equation, Jacobi elliptic function, doubly periodic solution, travelling solution
PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the Basic Science Foundation of Beijing Institute of Civil Engineering and Architecture, China (Grant No. 1004048).
† Corresponding author. E-mail: lvdazhao86@163.com