相对转动运动学方程的级数解*

赵 武† 刘 彬
(燕山大学,秦皇岛 066004)
(2005 年 1 月 27 日收到;2005 年 3 月 14 日收到修改稿)

为解决相对转动体非线性运动微分方程的计算难题,构造了一种级数解耦方法,把微分方程转化为代数方程求解,得到了相对转动体运动方程的级数解.据此可以计算工程应用中稳态相对转动体的真实转速波动.同时该法可实现测控标定仪器的转动体匀速旋转时的不均匀性测量误差分离,也为大型复杂重型旋转轴系在线实时扭振监测提供了高效算法.

关键词:相对转动,运动学方程,速度波动,级数解
PACC:0420J,0340D,0313,0316

1. 引 言

Carmeli[1,2]于 1985 年提出了转动相对论力学理论.1996 年,罗绍凯创建了转动相对论分析力学理论[3—5].近年来转动相对论在 Birkhoff 系统动力学的基本理论及其几何理论,通用性积分复杂动力学方程问题及其对称性理论、积分的场方法、代数结构等领域获得了发展[6—16].从动力学的角度,董全林求解了弹性转轴任意两个横截面间转动动力学方程[17],并获得了积分解[18].本文通过构造一种级数解耦方法求解相对转动非线性运动微分方程,并获得了级数解,这为精确计算相对转动轴的真实转速波动提供了可行、高效的算法.

2. 相对转动轴的速度波动分析

相对转动轴稳态运动外力的周期变化引起速度周期波动,从而引发转动副中附加动压力及轴系的弹性振动,速度波动过大会影响旋转轴系稳态运转.求解相对转动轴速度周期波动有助于精确计算作用在相对转动轴系各轴段上的动态力.

设弹性转轴的扭转变形角为 φ,则对其中的某段轴[10]而言有

$$\begin{aligned}\varphi_2(t)-\varphi_1(t) &= -\frac{1}{a}[\dot{\varphi}_1(t_0)-\dot{\varphi}_2(t_0)]\mathrm{e}^{-\frac{6C}{J}(t-t_0)}\\
&\quad\times\sin a(t-t_0)-\frac{1}{a}[\varphi_1(t_0)-\varphi_2(t_0)]\\
&\quad\times\left[a\cos a(t-t_0)+\frac{6C}{J}\sin a(t-t_0)\right]\mathrm{e}^{-\frac{6C}{J}(t-t_0)}\\
&\quad+\frac{6}{Ja}\int_{t_0}^{t}\{[T_2(s)-T_1(s)]\mathrm{e}^{-\frac{6C}{J}(t-s)}\sin a(t-s)\}\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{1}$$

根据 $\Delta\varphi=\int_0^t\Delta\omega\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= \mathrm{d}\Delta\varphi/\mathrm{d}t=(-\mathrm{e}^{-6C(t-t_0)/J}/a)[\dot{\varphi}_1(t_0)-\dot{\varphi}_2(t_0)]\\
&\quad\times[a\cos a(t-t_0)-\sin a(t-t_0)6C/J]\\
&\quad-(\mathrm{e}^{-6C(t-t_0)/J}/a)[\varphi_1(t_0)-\varphi_2(t_0)]\\
&\quad\times[\cos a(t-t_0)6aC/J\\
&\quad-a^2\sin a(t-t_0)]-(6C/Ja)\mathrm{e}^{-6C(t-t_0)/J}\\
&\quad\times[\varphi_1(t_0)-\varphi_2(t_0)][a\cos a(t-t_0)\\
&\quad+\sin a(t-t_0)6C/J]+(6/Ja)\mathrm{e}^{-6C(t'-t)/J}\\
&\quad\times[T_2(t)-T_1(t)]\sin a(t'-t),\end{aligned}\tag{2}$$

式中

$$a=\frac{6}{J}\sqrt{\frac{KJ}{3}-C^2},$$

其中 J 是转动惯量;K 是刚度;C 是阻尼.从(2)式可以看出转速波动除依赖于系统本身的常数 J,K,C 外,还与时间差(t_1-t_2)和两端面的转矩差有关.可见在转速波动的过程中,系统表现出非平稳的特性,转速波动相当于在一个指数曲线上叠加了一个

* 国家十五重大攻关项目专题(批准号:ZZ02-13B-02-03-1)资助的课题.

† E-mail:zhaowu@88mail.ysu.edu.cn cc thadzw_cn@sina.com

正弦波信号.依据(2)式可以讨论在各种初始条件下的转速波动.

2.1. $T=T(\omega)$,$J=\mathrm{const}$

当扭转角由 φ_1 变到 φ_2 时,角速度由 ω_1 变为 ω_2,若以 T_d,T_r 分别表示驱动力矩及阻力矩,则

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} T\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} T_\mathrm{d}\mathrm{d}\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} T_\mathrm{r}\mathrm{d}\varphi = J(\omega_2^2-\omega_1^2)/2, \quad (3)$$

$$T = T_\mathrm{d} - T_\mathrm{r} = (\omega^2/2)(\mathrm{d}J/\mathrm{d}\varphi) + J\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t, \quad (4)$$

$$\omega\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\varphi = (\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t)(\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\varphi) = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t. \quad (5)$$

从功能转化的角度,由(3)式可见弹性转轴的扭转变形必然引起转速的波动,从而形成相对转动时轴系的动载荷.从运动学角度而言,扭矩波动源于 ω 波动,从动力学角度而言,ω 波动源于扭矩波动.所以研究相对转动系统过渡过程显得尤为重要.

对(4)式处理,因 J 为常数,故 $\mathrm{d}J/\mathrm{d}\varphi=0$.则(4)式化为

$$T(\omega) = J(\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t), \quad (6)$$

当 $T=a+b\omega$ 时代入式(6)有

$$\omega = [\mathrm{e}^{b(t-t_0)/J}(a+b\omega_0) - a]/b. \quad (7)$$

若求解 ω-φ 关系,则把式(6)改成

$$T = J\omega(\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\varphi), \quad (8)$$

$$\varphi = \varphi_0 + J/b\{(\omega-\omega_0) - (a/b) \times \ln[(a+b\omega)/(a+b\omega_0)]\}. \quad (9)$$

2.2. $T=T(\varphi,\omega)$,$J=J(\varphi)$

这种情况是机械传动系统中常遇的情况.若由(4)式和(5)式有

$$T = (\omega^2/2)(\mathrm{d}J/\mathrm{d}\varphi) + J\omega(\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\varphi),$$

$$\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\varphi = [T(\varphi,\omega) - (\omega^2/2)(\mathrm{d}J/\mathrm{d}\varphi)]/J\omega = J(\varphi,\omega). \quad (10)$$

对上述微分方程采用数值近似解法其四阶龙格-库塔公式为

$$\omega_{i+1} = \omega_i + (k_1+2k_2+2k_3+k_4)\Delta\varphi/6, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= \{T(\varphi,\omega) - \omega^2[J(\varphi+\Delta\varphi) - J(\varphi)]/(2\Delta\varphi)\} \\ &= f(\varphi_i,\omega_i), \\ k_2 &= f(\varphi_i+\Delta\varphi/2, \omega_i + k_1\Delta\varphi/2), \\ k_3 &= f(\varphi_i+\Delta\varphi/2, \omega_i + k_2\Delta\varphi/2), \\ k_4 &= f(\varphi_i+\Delta\varphi, \omega_i + k_3\Delta\varphi). \end{aligned} \quad (12)$$

给定了 ω_i,φ_i 以后,(10)式右边为已知值,因此可用(12)式依次计算各 k 值,代入(11)式求得 ω_{i+1},依次类推,自 $\varphi=\varphi_1,\varphi_1+\Delta\varphi\cdots,\varphi+n\Delta\varphi$,计算出相应的 ω_1, ω_2,…,ω_n.

2.3. $T=T(t,\varphi,\omega)$,$J=J(\varphi)$

由(10)式有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t &= [T(t,\varphi,\omega) - (\omega^2/2)(\mathrm{d}J/\mathrm{d}\varphi)]/J \\ &= f(t,\varphi,\omega), \\ \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t &= \omega. \end{aligned} \quad (13)$$

对(13)式用四阶龙格-库塔公式求解,有

$$\begin{cases} \omega_{i+1} = \omega_i + (c_1+2c_2+2c_3+c_4)/6, \\ \varphi_{i+1} = \varphi_i + (g_1+2g_2+2g_3+g_4)/6, \end{cases} \quad (14)$$

式中

$$\begin{aligned} g_1 &= h\omega_i, \\ g_2 &= h(\omega_i + c_1/2), \\ g_3 &= h(\omega_i + c_2/2), \\ g_4 &= h(\omega_i + c_3), \\ c_1 &= hf(t_i,\varphi_i,\omega_i), \\ c_2 &= hf(t_i+(h/2), \varphi_i+(d_1/2), \omega_i+(c_1/2)), \\ c_3 &= hf(t_i+(h/2), \varphi_i+(d_2/2), \omega_i+(c_2/2)), \\ c_4 &= hf(t_i+h, \varphi_i+d_3, \omega_i+c_3). \end{aligned}$$

步长 $h=\Delta t$ 此时根据 $t=t_0$,$\varphi=\varphi_0$,$\omega=\omega_0$ 逐步求得 $t=t_i$ 时的 $\varphi=\varphi_i$,$\omega=\omega_i$,得出所需的运动规律.

上述数值分析方法,积分步长选择不当会引起发散,导致迭代算法失败.所以不能用于工程中相对转动体转速波动的实时在线监测.

3. 相对转动轴运动学方程的级数解

由(10)式

$$\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\varphi = [T_\mathrm{d}(\omega) - T_\mathrm{r}(\varphi) - \omega^2(\mathrm{d}J(\varphi)/\mathrm{d}\varphi)/2]/\omega J(\varphi), \quad (15)$$

$$T_\mathrm{d} = a + b\omega. \quad (16)$$

此处相对转动体的驱动力矩是角速度函数,而阻力矩看作是角位移函数.且阻力矩和转动惯量是周期为 2π 的 φ 的函数,则它们能表示成为

$$J = J_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(J_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} + J_{-m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}), \quad (17)$$

$$T_\mathrm{r} = T_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(t_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} + T_{-m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}), \quad (18)$$

此处 J_m,J_{-m},T_m, T_{-m} 都为复数.考虑到 J, T_r 为实数,因此有

$$J_m = \overline{J_{-m}};\ T_m = \overline{T_{-m}}, \quad (19)$$

上标“ —— ”表示共轭复数. 以下各式中“ r ”表示实部,“ s ”表示虚部,令

$$J_m = J_{mr} + \mathrm{i}J_{ms}, T_m = T_{mr} + \mathrm{i}T_{ms}, \tag{20}$$

$$J_{-m} = J_{mr} - \mathrm{i}J_{ms}, T_{-m} = T_{mr} - \mathrm{i}T_{ms}, \tag{21}$$

转动轴系稳态运转期间,角速度是 φ 的周期函数,周期为 2π,可展成以下级数形式

$$\omega = \omega_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(\omega_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} + \omega_{-m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}), \tag{22}$$

如(20)和(21)式一样,有

$$\omega_m = \omega_{mr} + \mathrm{i}\omega_{ms}, \omega_{-m} = \omega_{mr} - \mathrm{i}\omega_{ms}. \tag{23}$$

把式(16),(17),(22)代入(15)式,比较各阶 ω_{mr},ω_{ms}系数,得一组代数方程以求解未知值 ω_{mr},ω_{ms},若取 $m = 0,1,2,\cdots,n$,则得 $2n+1$ 个方程,由此计算出 $\omega_0, \omega_{1r}, \omega_{1s}, \cdots, \omega_{mr}, \omega_{ms}$.

3.1. 相对转动轴运动学的代数方程

把(15)式改写为

$$J(\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\varphi) = (a - T_r)/\omega + b - (\omega/2)(\mathrm{d}J/\mathrm{d}\varphi). \tag{24}$$

与平均角速度相比,速度的波动较小,所以(24)式右第一项按级数展开

$$(a - T_r)/\omega = E_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(E_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} + E_{-m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}), \tag{25}$$

式中

$$E_0 = (a - T_0)/\omega_0 + 2(T_{mr}\omega_{mr} + T_{ms}\omega_{ms})/\omega_0^2,$$
$$E_m = -[(a - \omega_0)\omega_m/\omega_0^2 + (T_m/\omega_0)] + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq m}}^{\infty} T_l\omega_{m-l}/\omega_0^2 + \sum_{l=1}^{\infty} T_{-l}\omega_{m+l}/\omega_0^2, \tag{26}$$

(24)式右端第三项也展成级数为

$$\frac{\omega}{2}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{1}{2}\left[F_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(F_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} + F_{-m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi})\right], \tag{27}$$

其中:

$$F_m = \mathrm{i}\left[\sum_{l=0}^{\infty}(m - l)\omega_l J_{m-l} + \sum_{l=0}^{\infty}(m + l)\omega_l J_{m+l}\right],$$
$$F_{-m} = \overline{F_m}. \tag{28}$$

(24)式左边写成级数为

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi} = D_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(D_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} + D_{-m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}), \tag{29}$$

式中

$$D_0 = 2\sum_{m=1}^{\infty} m(\omega_{mr}J_{ms} - \omega_{ms}J_{mr}),$$
$$D_m = \mathrm{i}\left[\sum_{\substack{l=0\\ l\neq m}}^{\infty}(m - l)J_l\omega_{m-l} + \sum_{l=1}^{\infty}(m + l)J_{-l}\omega_{m+l}\right],$$
$$D_{-m} = \overline{D}_m. \tag{30}$$

把(25),(27),(29)式代入(24)式,比较两边系数得

$$D_0 = E_0 + b - (F_0/2),$$
$$D_m = E_m - (F_m/2). \tag{31}$$

由(26),(28)和(30)式知,上式中包含 ω_i, J_i, T_i, ω_{-i}, J_{-i}, T_{-i} 等复变量,把(21),(23)式代入(31)式,可知(31)式是一组复变量方程. 令其两边的实部和虚部分别相等,得下列方程

$$(a - T_0)/\omega_0 + b + \sum_{j=1}^{\infty} d_{0jr}\omega_{jr} + \sum_{j=1}^{\infty} d_{0js}\omega_{js} = 0, \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
&J_{ms}\omega_0 + \sum_{j=1}^{m-1}\{\omega_{jr}[(m + j)J_{(m-j)s}/2 + (m - j)J_{(m+j)s}/2\\
&+ (T_{(m-j)r} + T_{(m+j)r})/\omega_0^2] + \omega_{js}[(m + j)J_{(m-j)r}/2\\
&- (m - j)J_{(m+j)r}/2 + (T_{(m+j)s} - T_{(m-j)s})/\omega_0^2] + \omega_{js}\\
&\times[(m + j)J_{(m-j)r}/2 - (m - j)J_{(m+j)r}/2\\
&+ (T_{(m+j)s} - T_{(m-j)s})/\omega_0^2\} + \omega_{mr}[(T_{2mr} - a + T_0)/\omega_0^2]\\
&+ \omega_{ms}[J_0 + T_{2ms}/\omega_0^2] + \sum_{l=1}^{\infty}\{\omega_{(m+l)r}[-(2m + l)J_{ls}/2\\
&- lJ_{(2m+l)s}/2 + (T_{lr} + T_{(2m+l)r})/\omega_0^2]\\
&+ \omega_{(m+l)s}[J_{lr}(2m + l)/2 + lJ_{(2m+l)r}/2\\
&+ (T_{ls} + T_{(2m+l)s})/\omega_0^2]\} = T_{mr}/\omega_0,
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
&-J_{mr}\omega_0 + \sum_{j=1}^{m-1}\{\omega_{jr}[-(m + j)J_{(m-j)r}/2\\
&- (m - j)J_{(m+j)r}/2 + (T_{(m-j)s} + T_{(m+j)s})/\omega_0^2]\\
&+ \omega_{js}[(m + j)J_{(m-j)s}/2 - (m - j)J_{(m+j)s}/2\\
&+ (T_{(m-j)r} - T_{(m+j)r})/\omega_0^2]\} + \omega_{mr}[-J_0 + T_{2ms}/\omega_0^2]\\
&- \omega_{ms}[(T_{2mr} + a - T_0)/\omega_0^2] + \sum_{l=1}^{\infty}\{\omega_{(m+l)r}\\
&\times[-J_{lr}(2m + l)/2 + lJ_{(2m+l)r}/2 + (T_{(2m+l)s} - T_{ls})/\omega_0^2]\\
&+ \sum_{l=1}^{\infty}\omega_{(m+l)s}[-(2m + l)J_{ls}/2 + lJ_{(2m+l)s}/2\\
&+ (T_{lr} - T_{(2m+l)r})/\omega_0^2]\} = T_{ms}/\omega_0.
\end{aligned} \tag{34}$$

3.2. 相对转动轴运动非线性代数方程组的解耦

至此非线性运动微分方程已经转化为代数方程组,即(32)式—(34)式为 $\omega_0, \omega_{1r}, \omega_{1s}, \cdots, \omega_{nr}, \omega_{ns}$的非线性方程组. 对(32)—(34)式用近似法求解.

第①步忽略高阶量 $\omega_0 = -(a - T_0)/b$ 作为机

器平均角速度的初值；

第②步令 $\omega'_0 = \omega_0 + \Delta\omega$，且把 ω'_0 代入(32)式—(34)式得

$$d_{00}\Delta\omega + \sum_{j=1}^{\infty}(d_{0jr}\omega_{jr} + d_{0js}\omega_{js}) = -[(a - T_0)/\omega_0 + b], \tag{35}$$

$$d_{m0}\Delta\omega + \sum_{j=1}^{\infty}(d_{mjr}\omega_{jr} + d_{mjs}\omega_{js}) = (T_{mr}/\omega_0) - \omega_0 J_{ms}, \tag{36}$$

$$d'_{m0}\Delta\omega + \sum_{j=1}^{\infty}(d'_{mjr}\omega_{jr} + d'_{mjs}\omega_{js}) = (T_{ms}/\omega_0) + \omega_0 J_{mr}, \tag{37}$$

式中

$$
\begin{aligned}
d_{00} &= -(a - T_0)/\omega_0^2 - 4\sum_{j=1}^{\infty}[T_{jr}\omega_{jr} + T_{js}\omega_{js}]/\omega_0^3,\\
d_{0jr} &= -jJ_{js} + (2T_{jr}/\omega_0^2),\\
d_{0js} &= jJ_{jr} + (2T_{js}/\omega_0^2),\\
d_{m0} &= (T_{mr}/\omega_0^2) + J_{ms} + \sum_{j=1}^{m-1}\frac{2}{\omega_0^3}\{-[T_{(m-j)r}\\
&\quad + [T_{(m+j)r}]\omega_{jr} + [T_{(m-j)s} - [T_{(m+j)s}]\omega_{js}\}\\
&\quad + [2\omega_{mr}(a - T_0 - T_{2mr})/\omega_0^3 - 2\omega_{ms}T_{2ms}/\omega_0^3]\\
&\quad + \sum_{l=1}^{\infty}(-2/\omega_0^3)\{[T_{lr} + T_{(2m+l)r}]\omega_{(m+l)r}\\
&\quad + [T_{ls} + T_{(2m+l)s}]\omega_{(m+l)s}\}.\\
d_{mjr} &= [(m + j)J_{(m-j)s} + (m - j)J_{(m+j)s}]/2\\
&\quad + [T_{(m-j)r} + T_{(m+j)r}]/\omega_0^2,\\
&\qquad (j = 1—m - 1),\\
d_{mmr} &= (T_{2mr} - a + T_0)/\omega_0^2,\\
d_{mjr} &= [-(m + j)J_{(j-m)s} - (j - m)J_{(m+j)s}]/2\\
&\quad + [T_{(j-m)r} + T_{(m+j)r}]/\omega_0^2,\\
&\qquad (j = m + 1, m + 2, \cdots),\\
d_{mjs} &= [(m + j)J_{(m-j)r} + (m - j)J_{(m+j)r}]/2\\
&\quad - [T_{(m-j)s} - T_{(m+j)s}]/\omega_0^2,\\
&\qquad (j = 1—m - 1),\\
d_{mms} &= J_0 + (T_{2ms}/\omega_0^2),\\
d_{mjs} &= [(m + j)J_{(j-m)r} + (j - m)J_{(m+j)r}]/2\\
&\quad + [T_{(j-m)s} + T_{(m+j)s}]/\omega_0^2,\\
&\qquad (j = m + 1, m + 2, \cdots).\\
d'_{m0} &= (T_{ms}/\omega_0^2) - J_{mr} - \sum_{j=1}^{m-1}2\{T_{(m-j)s}\\
&\quad + T_{(m+j)s}]\omega_{jr} - [T_{(m-j)r} - T_{(m+j)r}]\omega_{js}\}/\omega_0^3\\
&\quad - 2[T_{2ms}\omega_{mr} + T_{2mr}\omega_{ms}]/\omega_0^3\\
&\quad + \sum_{l=1}^{\infty}2\{[T_{ls} - T_{(2m+l)s}]\omega_{(m+l)s}\\
&\quad - [T_{lr} - T_{(2m+l)r}]\omega_{(m+l)s}\}/\omega_0^3,\\
d'_{mjr} &= -[(m + j)J_{(m-j)r} + (m - j)J_{(m+j)r}]/2\\
&\quad + [T_{(m-j)s} + T_{(m+j)s}]/\omega_0^2,\\
&\qquad (j = 1—m - 1),\\
d'_{mmr} &= -J_0 + (T_{2ms}/\omega_0^2),\\
d'_{mjr} &= [(j - m)J_{(m+j)r} - (m + j)J_{(j-m)r}]/2\\
&\quad - [T_{(j-m)s} - T_{(m+j)s}]/\omega_0^2,\\
&\qquad (j = m + 1, m + 2, \cdots),\\
d'_{mjs} &= [(m + j)J_{(m-j)s} - (m - j)J_{(m+j)s}]/2\\
&\quad + [T_{(m-j)r} + T_{(m+j)r}]/\omega_0^2,\\
&\qquad (j = 1—m - 1),\\
d'_{mms} &= [T_{2mr} - a + T_0]/\omega_0^2,\\
d'_{mjs} &= [(j - m)J_{(m+j)s} - (m + j)J_{(j-m)s}]/2\\
&\quad + [T_{(j-m)r} - T_{(m+j)r}]/\omega_0^2,\\
&\qquad (j = m + 1, m + 2, \cdots).
\end{aligned}
\tag{38}
$$

取前 n 阶后，(35)式—(37)式写成矩阵形式

$$[A]\{\omega\} = \{T\}, \tag{39}$$

其中

$$\{\omega\} = [\omega_{1r}, \omega_{1s}, \omega_{2r}, \omega_{2s}, \cdots, \omega_{nr}, \omega_{ns}, \Delta\omega]^{T},$$

$$[A] = \begin{bmatrix} a'_{11r}, a'_{11s}, a'_{12r}, \cdots, a'_{1nr}, a'_{1ns}, a'_{10}\\ a_{11r}, a_{11s}, a_{12r}, \cdots, a_{1nr}, a_{1ns}, a'_{10}\\ a'_{21r}, a'_{21s}, a'_{22r}, \cdots, a'_{2nr}, a'_{2ns}, a'_{20}\\ \\ a_{n1r}, a_{n1s}, a_{n2r}, \cdots, a_{nnr}, a_{nns}, a_{n0}\\ a_{01r}, a_{01s}, a_{02r}, \cdots, a_{0nr}, a_{0ns}, a_{00} \end{bmatrix},$$

$$\{T\} = \left[\frac{T_{1r}}{\omega_0} + \omega_0 J_{1r}, \frac{T_{1r}}{\omega_0} - \omega_0 J_{1s}, \frac{T_{2s}}{\omega_0} + \omega_0 J_{2r}, \cdots, \frac{T_{nr}}{\omega_0} - \omega_0 J_{ns}, -\frac{a - T_0}{\omega_0} - b\right]^{T};$$

第③步将(39)式用迭代法求解，得出未知量 ω_0，ω_{1r}，ω_{1s}，…，ω_{nr}，ω_{ns}，系数 d_{m0}，d'_{m0}，d_{00} 为未知量 ω_{1r}，…，ω_{1s} 的函数，因此(39)式虽表示成线性形式，但实际上是非线性方程. 另外，虽然在矩阵[A]中对角元素 d'_{11r}，d_{11s}，d'_{22r}，…，d_{nns} 的绝对值大于其它元素，因为这些对角元素近似等于 J_0，而在[A]中的其它元素含有 $J_{1r}J_{1s}\cdots J_{ns}$，它们比 J_0 小得多，所以用下述方法求解(39)式. 把由($T_0 - a$)/b 决定的值 $\omega_0^{(0)}$ 代入(38)式得到 d'_{11r}，d_{11s}，d'_{22r}，…，d_{nns}. 忽略了

$[A]$ 中的非对角线元素并且把 $\omega_0^{(0)}$ 代入 $\{T\}$ 的前 $2n$ 个元素中，易求得前 $2n$ 个相互不耦合方程的解.

$$\omega_{1r}^{(0)} = (\omega_0^{(0)} J_{1r} + T_{1s}/\omega_0^{(0)})/d'_{11r},$$

$$\omega_{ns}^{(0)} = (\omega_0^{(0)} J_{ns} + \omega_{ns}/\omega_0^{(0)})/d'_{nns}.$$

把这些值连同 $\omega_0^{(0)}$ 代入(38)式. 计算出 d_{00}，d_{0jr}，d_{0js}，d_{mjr}，d'_{m0}，d'_{mjr}，d'_{mjs}，代入(39)式，得出第一次近似值 $\omega_{1r}^{(1)}$，…，$\omega_{ns}^{(1)}$ 和 $\Delta\omega_0^{(0)}$，然后得出第一次近似值

$$\omega_0^{(1)} = \omega_0^{(0)} + \Delta\omega_0^{(0)}.$$

利用这些值及(38)式重新计算系数 $d_{00}\cdots d_{ns}$，代入(39)式求出第二次近似值 ω，…，ω 和 $\Delta\omega$，然后得修正值 $\omega_0^{(2)}$，重复这个过程，一直到 $(\omega_0^{(i+1)} - \omega_0^{(i)})/\omega_0^{(i)}$ 小于某一允许误差为止，这将得到了最终值 ω_0，ω_{1r}，ω_{1s}，…，ω_{nr}，ω_{ns}，则

$$\omega = \omega_0 + \sum_{m=1}^{n}[2\omega_{mr}\cos m\varphi - 2\omega_{ms}\sin m\varphi]. \quad (40)$$

4. 结　论

通过构造一种级数解耦方法把相对转动轴的非线性稳态运动微分方程解耦成非线性代数方程组，从而解得相对转动轴系真实转速波动. 代数法易于编程，计算效率高于数值积分方法，是一种可应用于工程实际的计算方法. 其次，作为标定设备的转速体在匀速转动时由于本身转动不均匀性，在标定时会影响被标定设备的标定精度. 应用本文的研究方法，可以实现被标定设备的测量误差分离. 另外，重型复杂机械传动系统的实时在线扭振监测，一般是监测轴系的转速，通过转速波动反映扭振，本文方法也为重型复杂机械传动系统实时在线扭振监测提供了一种实用的高效算法.

[1] Carmeli M 1985 *Foundations of Physics* **15** 175

[2] Carmeli M 1986 *International Journal of Theoretical Physics* **25** 89

[3] Luo S K 1996 *Journal of Beijing Institute of Technology* **16**(S1) 154 (in Chinese)[罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16**(S1) 154]

[4] Luo S K 1998 *Applied Mathematics and Mechanics* **19** 45

[5] Luo S K 1996 *Applied Mathematics and Mechanics* **17** 683

[6] Luo S K 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 712(in Chinese)[罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[7] Luo S K 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1416(in Chinese)[罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416]

[8] Luo S K, Guo Y X and Chen X W 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2053 (in Chinese)[罗绍凯、郭永新、陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053]

[9] Luo S K, Fu J L and Chen X W 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 383(in Chinese)[罗绍凯、傅景礼、陈向炜 2001 物理学报 **50** 383]

[10] Luo S K, Chen X W and Fu J L 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 271

[11] Luo S K, Guo Y X, Chen X W and Fu J L 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2049(in Chinese)[罗绍凯、郭永新、陈向炜、傅景礼 2001 物理学报 **50** 2049]

[12] Fang J H 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1028(in Chinese)[方建会 2000 物理学报 **49** 1028]

[13] Fang J H and Zhao S Q 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 390(in Chinese)[方建会、赵嵩卿 2001 物理学报 **50** 390]

[14] Luo S K 2002 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **99** 449

[15] Luo S K, Chen X W and Guo Y X 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 429

[16] Luo S K, Chen X W and Guo Y X 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 523

[17] Dong Q L and Liu B 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2191(in Chinese)[董全林、刘　彬 2002 物理学报 **51** 2191]

[18] Dong Q L and Liu B 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 337(in Chinese)[董全林、刘　彬 2004 物理学报 **53** 337]

Series solution for relative-rotation motion equation*

Zhao Wu† Liu Bin

(*Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

(Received 27 January 2005; revised manuscript received 14 March 2005)

Abstract

For solving the difficult calculation problem of nonlinear differential equation of motion of complex revolving shaft in relative rotation, a new decoupled equation was proposed by using series method, which expands the nonlinear differential equation into a series of algebraic equations and the series solution is obtained. Based on the result of the research, the veracious speed fluctuation of revolving shaft in relative rotation in practice can be calculated for the steady state. The method also provides a technology for error detachment of measuring apparatus calibration and a highly effective algorithm for torsional vibration real-time on-line monitor of heavy-duty and complex revolving shaft.

Keywords: relatively rotation, motion equation, speed fluctuation, series solution

PACC: 0420J, 0340D, 0313, 0316

* Project supported by the National Significant Tackle Key Problem for 10th 5-year Plan of China (Grant No. ZZ02-13B-02-03-1).

† E-mail: zhaowu@88mail.ysu.edu.cn cc thadzw_cn@sina.com