

自旋结网圈表象中体积与面积本征值^{*}

邵 丹¹⁾ 邵 亮²⁾ 邵常贵³⁾† 陈贻汉³⁾ 马为川³⁾

¹⁾ 江汉大学物理系, 武汉 430056)

²⁾ 武汉科技大学物理系, 武汉 430081)

³⁾ 湖北大学理论物理所, 武汉 430062)

(2004 年 8 月 4 日收到, 2005 年 3 月 14 日收到修改稿)

利用抓算符作用的反称化和双元恒等式, 通过计算, 证明了 3 价和任意价自旋结网圈分别为体积和面积算符的本征态, 并得到了体积本征值为 $2^{-\frac{3}{2}} l_0^3 \sum_i \sqrt{p_\sigma p_\tau p_\rho}$ 和面积本征值为 $2^{-1} l_0^2 \sum_j p_{\kappa j}$ 的结果.

关键词: 体积算符, 面积算符, 本征值, 自旋结网圈

PACC: 0460

1. 引 言

广义相对论的 Ashtekar 正则体系中的新变量, 给出了 4 维时空做 3 + 1 分解后的空间 3 流形中的面积与体积的表式. 与扩展圈表象不同^[1, 2], 自旋结网圈表象中体积与面积是该种引力中的预选物理可观测量. 它们做非定域量子化后, 得到的面积与体积算符的离散本征值的探求, 目前均非一种途径. De Pietri 等利用缠结理论的重耦定理和图形不变量理论, 通过自旋结网圈结点毗邻的外脚的封闭, 给出了体积的系列离散值^[3]. 同时还讨论了用抓在外脚间移动的方法求体积算符本征值问题. 研究发现, 这两种方法得到的结果并不相同, 但共同的结果是 3 流形中的 3 价结点贡献的体积值恒为零^[3]. Rovelli 和 Smolin 用基本双元恒等式和抓作用的对称化研究了 3 价自旋结网圈作为本征态的面积与体积的离散值问题^[4, 5].

然而, 由于自旋结网圈结点的脚中圈线以及抓在圈线上的抓作用必须是反称化的^[6], 本文与文献 [4] 以及文献 [7] 不同, 将用这种反称化方法探讨面积与体积谱. 同时, 对双元恒等式的使用也与已有文献不同, 是分两种不同情况分别使用的. 发现是可行的, 而且是必需的, 给出了所需的计算, 并得到了不同的结果.

2. 体积算符对 3 价自旋结网圈的作用表式

令 \mathfrak{R} 为空间 3 流形中的区域, \mathfrak{R} 中的 3 价自旋结网圈 (其中每一结点均为 3 价) 简记为 Γ . 令 i 为 Γ 中的一个结点, 则与结点 i 毗连的 3 个脚的颜色数可记为 p_i, q_i 和 r_i , 且有

$$p_i = a_i + b_i, q_i = b_i + c_i, r_i = c_i + a_i$$

式中 a_i 为圈线在颜色数为 p_i 和 r_i 的 2 个脚中贯通的次数, b_i 与 c_i 类推. \mathfrak{R} 的体积算符 $\hat{V}(\mathfrak{R})$ 对自旋结网圈态 $|\Gamma(pgr)\rangle$ 的本征作用经计算为^[3, 5]

$$\hat{V}|\Gamma(pgr)\rangle = \sum_i \sqrt{2^{-4} |K[\Gamma(p_i g_i r_i)]|} |\Gamma(pgr)\rangle. \quad (1)$$

上式中的系数 K 将给出体积算符 $\hat{V}(\mathfrak{R})$ 的本征值, K 由下式定义

$$\sum_{S=1}^{P_\sigma} \sum_{T=1}^{P_\tau} \sum_{R=1}^{P_\rho} \sum_{f=1}^8 \sum_m \epsilon_m |(\alpha_{\sigma\tau\rho} \#_{(s_S t_T r_R)} \gamma_m^{\Gamma(pgr)})\rangle = K[\Gamma(p_i g_i r_i)] |\Gamma(pgr)\rangle, \quad (2)$$

式中 $|\epsilon_m| = 1$, $\alpha_{\sigma\tau\rho}$ 为体积算符 $\hat{V}(\mathfrak{R})$ 中圈算符 \hat{T}^{abc} [$\alpha_{\sigma\tau\rho}$ $\{s, t, r\}$ 的带 3 个抓的三角圈, γ_m 为自旋结网圈 $|\Gamma(abc)\rangle$ 展开图的一叶, f 标定 $\alpha_{\sigma\tau\rho}$ 与 γ_m 井号 # 下和成的 8 种可能, p_σ, p_τ 和 p_ρ 代表结点 i 伸出的 3 个

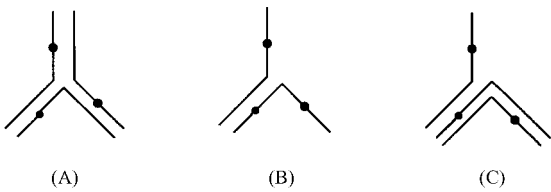
* 国家自然科学基金(批准号: 10275022)资助的课题.

† E-mail: newfisher@hotmail.com

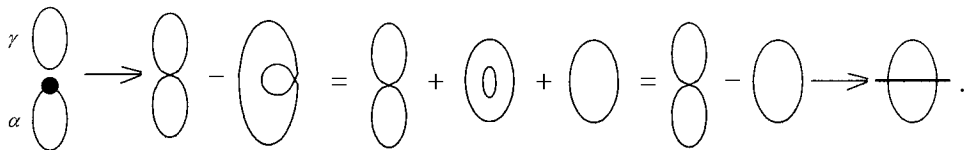
分别交于含有抓算符的微立方体边介上的点 σ, τ 和 ρ 的脚的颜色数 s, t 和 r 为三角圈 $\alpha_{\sigma\tau\rho}$ 上分别对应抓所抓住的点 σ, τ 和 ρ 的圈参数 r_{S_s}, t_{T_t} 和 r_R 为分别对应微立方体边介与颜色数分别为 p_σ, p_τ 和 p_ρ 的结点 i 的 3 个脚中的第 S 个, 第 T 个和第 R 个圈线相交点的圈参数. (2) 式左侧表明了体积算符对自旋结网圈的作用, 结合 (1) 式可知, 这是种可对角化的本征作用方程.

3. 体积算符对网结作用的计算

3 价自旋结网圈中的网结被体积算符的 3 个抓的抓住情况有如下 3 种类型:



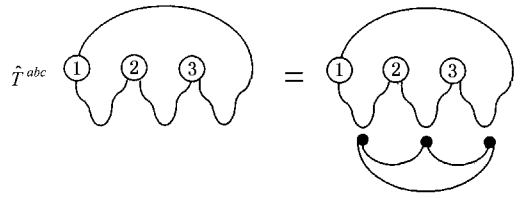
它们对方程 (2) 贡献的抓法数, 经计算 (见附录 A) 分别为 $2abc$, $2(ab + bc + ca)$ 和 $a(a - 1)(b + c) + b(b - 1)(a + c) + c(c - 1)(b + a)$. 用图式 (graph) 计算法, 抓法 (A) 可表示如下



据此, 本文的抓算符的作用定义为如下反称化:

$$\text{抓算符} = \text{三竖线} = \text{三竖线} - \text{交叉} \quad (4)$$

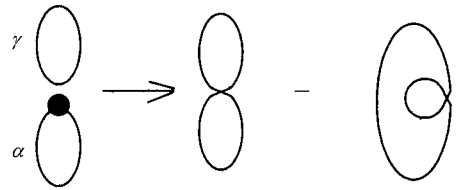
且不计线在交处的环跨性. 从而圈算符 \hat{T}^{abc} 的 (A) 型作用可记为



本文的抓当抓住自旋结网圈脚中的圈线时, 带抓的圈 α 与被抓住的圈线 γ 的合成作用 $\langle \alpha \# \gamma \rangle$ 与 $\langle \alpha \# \gamma \rangle^\times$ 分别为

$$\langle \alpha \# \gamma \rangle^{\langle \rangle} = \langle \alpha \# \gamma \rangle \text{ 和 } \langle \alpha \# \gamma \rangle^\times = \alpha \# \gamma^{-1},$$

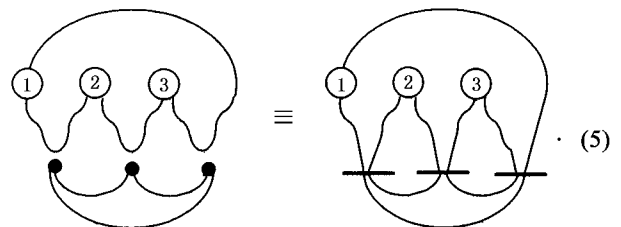
而由 α 与 γ 的 Poisson 括弧知, 抓作用应定义为



上式在空间 3 流形中利用双元恒等式

$$\text{交叉} + \text{三竖线} + \text{Y型} = 0 \quad (3)$$

计算后, 得到



利用 (4) 式的反称化操作, (5) 式右侧可展为

(6)

(6) 式给出的是已划在平面上的图,用双元恒等式化简时,应采用 Penrose 的附加 (-1) 因子的双元恒等式形式,为计算方便将其写为

$$\times = || + (-1) \cup \quad (7)$$

(8)

圈算符 \hat{T}^{abc} 的 (b) 型作用可表示如下

(6) 式经计算,可得(见附录 B).

(9)

经类似计算,得

$$\text{Diagram with three legs (1, 2, 3) and a horizontal line} = -2 \cdot \text{Diagram with three legs (1, 2, 3)} \quad (10)$$

圈算符 \hat{T}^{abc} 的(c)型作用为

$$\text{Diagram with three legs (1, 2, 3)} = \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} \quad (11)$$

上式经计算后,得

$$\text{Diagram with three legs (1, 2, 3) and a horizontal line} = -2 \cdot \text{Diagram with three legs (1, 2, 3)} \quad (12)$$

将本征作用(8)(10)和(12)代入(2)式左侧,经计算得

$$\sum_{S=1}^{P_\sigma} \sum_{T=1}^{P_\tau} \sum_{R=1}^{P_\rho} \sum_{f=1}^8 \sum_m \epsilon_m |(\alpha_{\sigma\rho} \#_{(s_s t_r r_R)} \gamma_m \rangle\rangle = -2l_0^3 (p_\sigma p_\tau p_\rho) |I(pgr)\rangle,$$

从而有

$$K[I(p_i g_i r_i)] = -2l_0^3 (p_\sigma p_\tau p_\rho),$$

将上式代入(1)式,最后得

$$\hat{V}|I(pgr)\rangle = 2^{-\frac{3}{2}} l_0^3 \sum_i \sqrt{p_\sigma p_\tau p_\rho} |I(pgr)\rangle. \quad (13)$$

4. 面 积

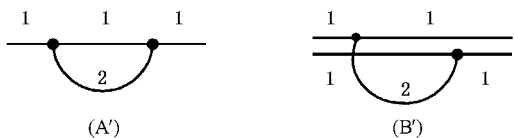
令空间3流形中的曲面为 \mathcal{S} ,与曲面 \mathcal{S} 相交的任意自旋结网圈态记为 $|I(p)\rangle$,用 l 标定自旋结网圈 $I(p)$ 与曲面 \mathcal{S} 相交的脚.与体积类似,自旋结网圈也是面积算符 $\hat{A}(\mathcal{S})$ 的本征态,即有^[4]

$$\hat{A}|I(p)\rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_j \sqrt{2^{-3} \mathcal{A}(I(p_{\kappa_j}))} |I(p)\rangle, \quad (14)$$

式中 j 标定边长为 λ 的曲面 \mathcal{S} 上的微正方形.(14)式中的系数 $\mathcal{A}(I(p_{\kappa_j}))$ 由下式定义

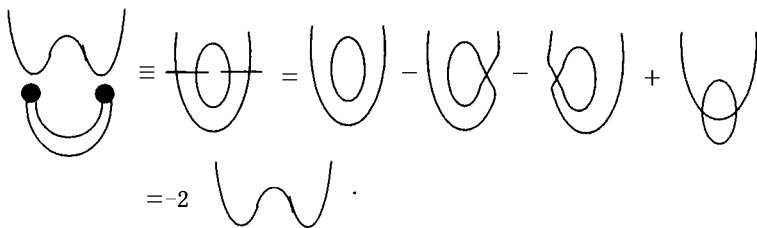
$$\sum_{p=1}^{p_l} \sum_{p'=1}^{p_l} \sum_{f=1}^4 |(\alpha_{\sigma\tau} \#_{s_p t_{p'}} \gamma_m \rangle\rangle = \mathcal{A}(I(p_{\kappa_j})) |I(p_j)\rangle. \quad (15)$$

为计算(15)式左侧,须知道圈算符 $\hat{T}^{ab}[\alpha_{\sigma\tau} \mathbb{I}_{s,t}]$ 的两个抓对颜色数为 p_l 的脚的作用,该作用有如下两种类型



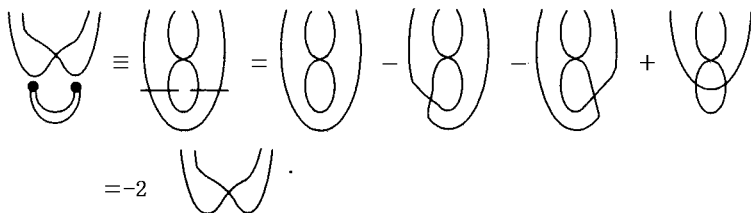
经计算知,由(A')与(B')作用得到的不同抓法数分别为 p_i 和 $p_i^2 - p_i$. 与计算体积类似,下面用图式算法分别证明这两种作用均为本征作用,并求得本征值.

对于(A')型作用,有



(16)

对于(B')型作用,有



(17)

将(16)式和(17)式代入(15)式得

$$[2p_{\chi_j} + \mathcal{A} p_{\chi_i}^2 - p_{\chi_j}] | \Gamma(p_j) = \mathcal{A} | \Gamma(p_{\chi_j}) | \Gamma(p_j).$$

将上式的 $\mathcal{A} | \Gamma(p_{\chi_j})$ 解出后,代入(14)式,可得

$$\hat{A} | \Gamma(p) = 2^{-1} l_0^2 \sum_j p_{\chi_j} | \Gamma(p) = l_p^2 \sum_j j_{\chi_j} | \Gamma(p), \quad (18)$$

此处 $j_{\chi_j} = 2^{-1} p_{\chi_j}$.

5. 小 结

本文采取的反称化抓作用,不仅被证明是合理的,而且与自旋结网圈定义中含有的结点毗邻的脚内圈线必须反对称化相一致.

缠结研究中的重耦理论的括弧多项式给出的二元恒等式(3)对抓算符在一般圈线作用上的应用,以及在图式计算中需考虑“极小”的出现的 Penrose 二元恒等式(7)的应用,不仅使得体积与面积算符的作用是本征作用,而且计算上本文也出现十分一致的结果.对于体积谱(A)(B)和(C)三种抓作用类型的本征值均为 -2;而对于面积而言(A')和(B')二种类型的本征值均为 2,这些结果与已有文献均不同^[1,2,4].

由(13)和(18)式给出的体积与面积本征值 $2^{-\frac{3}{2}} l_0^3 \sum_i \sqrt{p_\sigma p_\tau p_\rho}$ 和 $2^{-1} l_0^2 \sum_j p_{\chi_j}$ 的量纲分析与数值分析知,体积与面积之间,以及它们与边长之间的关系在本文中都是相容的,所见文献中均缺乏此一致性.若令一立方体中存在一个脚的颜色数均为 p 的 3 顶角,则该立体的体积应为 $2^{-\frac{3}{2}} p^{\frac{3}{2}} l_0^3$,面积为 $2^{-1} p l_0^2$,而相应的折算边长则为 $2^{-\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} l_0$.这也是本文得到的相互一致的结果.如果一立方体中只存在一个这样的 3 顶角,则无论该立体的区域范围大小如何,由此 3 顶角贡献的局部体积与面积值均如此.如还存在其它 3 顶角,则该立体的体积与面积值为每一顶点离散贡献的和.

利用本文得到的面积公式计算黑洞视界面积,得到黑洞的熵与其之比的比例系数 $C = (8\pi)^{-1} \ln 2$ 的结果另文发表.

由 $2^{-\frac{3}{2}} \sum_i \sqrt{p_\sigma p_\tau p_\rho}$ 和 $2^{-1} \sum_j p_{\chi_j}$ 给出的区域 \mathfrak{R} 和曲面 \mathcal{S} 的离散值谱更具有简明和完整的物理意义.更有利于表明自旋结网圈的网结携带着体积与面积的量子(脚的颜色),它们的激发将使 3 流形中的区域 \mathfrak{R} 和曲面 \mathcal{S} 分别具有体积和面积量子本征值.

对体积而言,由基态开始的一些本征态的体积

量子数依次为 $0, \frac{\sqrt{2}}{8}, 4\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{9}{2}}, \frac{\sqrt{5}}{4},$
 $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{9}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{25}{2}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{25}{2}}, \frac{\sqrt{15}}{4}, 1, \dots$

\mathcal{R} 的体积值谱将由这些量子数的叠加给出.

对于面积, 始于基态的本征态的量子数为 $0,$

$\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$. 曲面 \mathcal{S} 的面积值谱将由这些量子数的叠加给出.

附录 A

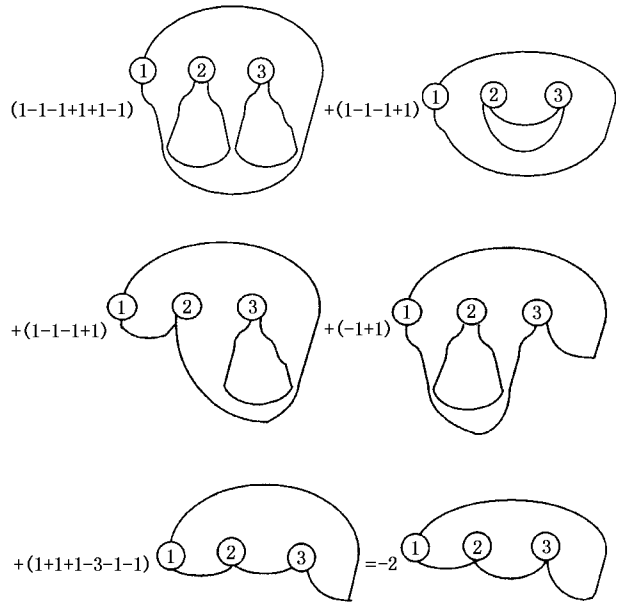
(A 型) : $abc + bca = 2abc,$

(B 型) : $(ac + bc) + (ca + ba) + (ab + cb) =$
 $2(ac + bc + ab).$

(C 型) $[\alpha \binom{C}{2} + \kappa \binom{C}{2} + \alpha \binom{b}{2} + \alpha \binom{b}{2} + \kappa \binom{a}{2} + \alpha \binom{a}{2}]$
 $= \alpha(a-1)(b+c) + \kappa(b-1)(a+c) + \alpha(c-1)(b+a).$

附录 B

(6) 式展开后得到



[1] Shao C G , Pan G J , Shao L *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 619 [in Chinese] [邵常贵、潘贵军、邵 亮等 2000 物理学报 **49** 619]
 [2] Shao C G , Xiao J H , Shao L *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1467 (in Chinese) [邵常贵、肖俊华、邵 亮等 2002 物理学报 **51** 1467]
 [3] Pietri R De and Rovelli C 1996 *Phys. Rev. D* **54** 2664
 [4] Ashtekar A , Rovelli C and Smolin L 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 237

[5] Rovelli C and Smolin L 2001 *Discreteness of Area and Volume in Quantum Gravity* gr-qc/9411005
 [6] Rovelli C and Smolin L 1995 *Phys. Rev. D* **52** 5743
 [7] Frittelli S , Lehmeg L and Rovelli C 2001 *The complete spectrum of the area from Recoupling Theory in Loop Quantum Gravity* , gr-qc /968043

Eigenvalues of volume and area in the spin network representation ^{*}

Shao Dan¹⁾ Shao Liang²⁾ Shao Chang-Gui^{3)†} Chen Yi-Han³⁾ Ma Wei-Chuan³⁾

¹⁾*Department of Physics, Jiangnan University, Wuhan 430056, China*

²⁾*Department of Physics, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China*

³⁾*Institute of Theoretical Physics, Hubei University, Wuhan 430062, China*

(Received 4 August 2004 ; revised manuscript received 14 March 2005)

Abstract

By antisymmetrizing the action of grasp and binor identity, it is proved that the spin network states of 3-valent and any-valent are the eigenstates of the volume operator and the area operator, respectively. The formulas $2^{-\frac{3}{2}} l_p^3 \sum_i \sqrt{p_\sigma p_\tau p_\rho}$ and $2^{-1} l_p^2 \sum_j p_{\chi_j}$ for calculating the eigenvalue spectrums of volume and area, respectively, are obtained.

Keywords : volume operator, area operator, eigenvalue, spin network

PACC : 0460

^{*} Project supported by National Natural Science Foundation of China (Grant No.0275022).

[†] E-mail : newfisher@hotmail.com