

混沌系统的自适应多变量广义预测控制与同步*

董恩增 陈增强† 袁著祉

(南开大学信息技术科学学院自动化系, 天津 300071)

(2004 年 11 月 26 日收到, 2005 年 3 月 1 日收到修改稿)

提出了一种应用带时变遗忘因子的自适应多变量广义预测控制算法(β -MGPC),对 Lorenz, Rossler, Chua 电路等典型混沌系统进行控制,使之跟踪任意给定参考信号,数值仿真表明了该控制算法的良好效果.这种方法的优点在于无需知道混沌系统的精确模型,便可实现混沌系统的大范围的跟踪和同步控制.

关键词:混沌控制,混沌同步,自适应预测控制,时变遗忘因子

PACC: 0545

1. 引言

1990 年美国物理学家 Ott, Grebogi 和 Yorke 提出了著名的 OGY 参量微调混沌控制法^[1],由此引发了非线性科学领域的第二次全球性混沌研究热潮.目前国内外学者已提出了各种方法,对混沌系统进行控制研究,但多为将混沌系统控制到有限的周期轨道或参考目标^[2-4],控制器的设计需知道混沌系统的精确模型^[5-11].张家树等提出的非线性自适应预测控制算法^[12],不要求知道混沌系统的精确模型,但加入控制动作较长时间后才能对系统有效控制,控制目标有限.

广义预测控制(GPC)^[13]是近年来发展起来的一种先进的控制算法,其基本原理是预测模型、滚动优化和反馈校正.在预测控制中,优化不是离线进行的,而是反复在线滚动进行的,这是预测控制区别于传统最优控制的根本点.广义预测控制已成功运用于各个领域,实践表明它具有较强的鲁棒性,适用于控制不易建立精确数学模型且比较复杂的过程.孙明玮等提出了一种鲁棒性更强的广义预测控制算法(β -GPC)^[14].本文针对混沌系统非线性强、多变量耦合等特点,提出了一种带时变遗忘因子的自适应多变量广义预测控制算法(β -MGPC).这种算法对被控混沌系统的先验知识要求较少,无需知道被控系统的精确模型,控制动作灵敏,不仅可使混沌系统追踪

任意给定的参考目标,而且可实现受控混沌系统的自同步和异结构同步,仿真研究结果表明该方法的有效性.

2. 自适应 β -MGPC 控制算法

2.1. 过程模型

MGPC 控制算法基于的模型为

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + \omega(k)\Delta, \quad (1)$$

其中 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 为 $n \times n$ 维矩阵多项式.

$$A(z^{-1}) = I + A_1 z^{-1} + \dots + A_{n_A} z^{-n_A}$$

$$B(z^{-1}) = B_0 + B_1 z^{-1} + \dots + B_{n_B} z^{-n_B}$$

式中 $u(k)$ 和 $y(k)$ 分别是 n 维的输入向量和输出向量, $\Delta = 1 - z^{-1}$, $\omega(k)$ 为白噪声序列.

2.2. 目标函数

MGPC 的目标函数为:

$$J = \sum_{j=1}^N \|y(k+j) - y_d(k+j)\|^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \|\Delta u(k+j-1)\|^2, \quad (2)$$

其中 $\Delta u(k+j) = 0, j = N_u, \dots, N, \|x\|_{\Delta}^2 = x^T \Delta x, \Delta$ 是 $n \times n$ 对角矩阵, $\lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, y_r(k)$ 是 n

* 国家自然科学基金(批准号 60374037)和南开大学科研创新基金资助的课题.

† E-mail: chenzq@nankai.edu.cn

维有界的设定值向量, N 为预测时域步数, N_u 为控制时域步数.

$\{y_d(k+j)\}$ 为设定值柔化序列, 由下式产生

$$\begin{cases} y_d(k) = y(k), \\ y_d(k+j) = \alpha y_d(k+j-1) + (1-\alpha)y_r(k), \end{cases} \quad (3)$$

其中 $j=1, \dots, N$, α 为柔化因子阵,

$$\alpha = \text{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, 0 \leq \alpha_i < 1.$$

2.3. 控制器的求解

为了得到 j 步后 $y(k+j)$ 的最优预测值, 需求解矩阵多项式方程组

$$\begin{cases} I = E'_j(z^{-1})\Delta(z^{-1})A(z^{-1}) + z^{-j}F'_j(z^{-1}), \\ E'_j(z^{-1})B(z^{-1}) = G'_j(z^{-1}) + z^{-j}H'_j(z^{-1}), \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$E'_j(z^{-1}) = E_0 + E_1 z^{-1} + \dots + E_{j-1} z^{-(j-1)},$$

$$F'_j(z^{-1}) = F_0^j + F_1^j z^{-1} + \dots + F_{n_A}^j z^{-n_A},$$

$$G'_j(z^{-1}) = G_0 + G_1 z^{-1} + \dots + G_{j-1} z^{-(j-1)},$$

$$H'_j(z^{-1}) = H_0^j + H_1^j z^{-1} + \dots + H_{n_B-1}^j z^{-(n_B-1)},$$

经过求解丢番图矩阵方程, 由(1)式和(4)式可得 $y(k+j)$ 的预测值:

$$y(k+j|k) = G_j \Delta u(k+j-1) + F_j(z^{-1})y(k) + H_j(z^{-1}) \Delta u(k-1). \quad (5)$$

由(5)式得:

$$Y(k) = G \Delta U(k) + F(z^{-1})y(k) + H(z^{-1}) \Delta u(k-1). \quad (6)$$

其中

$$Y(k) = [y(k+1|k)^T \dots y(k+N|k)^T]^T,$$

$$F(z^{-1}) = [F_1(z^{-1})^T \dots F_N(z^{-1})^T]^T,$$

$$H(z^{-1}) = [H_1(z^{-1})^T \dots H_N(z^{-1})^T]^T,$$

$$G = \begin{bmatrix} G_0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & G_0 & \\ G_{N_u-1} & G_{N_u-2} & \dots & G_0 \\ & G_{N-1} & G_{N-2} & \dots & G_{N-N_u} \end{bmatrix}.$$

再令

$$Y_d(k) = [y_d(k+1)^T \dots y_d(k+N)^T]^T,$$

则目标函数可以写成

$$J = \|Y(k) - Y_d(k)\|^2 + \|\Delta U(k)\|_R^2, \quad (7)$$

其中 $\|\Delta U(k)\|_R^2 = \Delta U(k)^T R \Delta U(k)$, $R = \text{diag}\{\Lambda_1, \dots,$

$\Lambda_{N_u}\}, \Lambda_i = \Lambda$. 将(6)式代入(7)式, 令 $\partial J / \partial \Delta U(k) = 0$, 则:

$$\Delta U(k) = (G^T G + R)^{-1} G^T [Y_d(k) - F(z^{-1})y(k) - H(z^{-1}) \Delta u(k-1)]. \quad (8)$$

令 $(G^T G + R)^{-1} G^T$ 的前 n 行为

$g^T = [g_1, \dots, g_N]$. 定义

$$g(z^{-1}) = g_N + g_{N-1} z^{-1} + \dots + g_1 z^{-N+1}, \quad (9)$$

其中 $g_j (j=1, \dots, N)$ 是 $n \times n$ 矩阵. 取(8)式的前 n 行, 可得控制律

$$\Delta u'(k) = g^T [Y_d - F(z^{-1})y(k) - H(z^{-1}) \Delta u(k-1)].$$

此时, 选取合适的 β 增益值, 则 β -MPC 的控制律为

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= \beta g^T [Y_d - F(z^{-1})y(k) - H(z^{-1}) \Delta u(k-1)] \\ &= \beta g(z^{-1})y_d(k+N) - \phi(z^{-1})y(k) \\ &\quad - \varphi(z^{-1}) \Delta u(k-1), \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi(z^{-1}) &= \sum_{j=1}^N P_j F_j(z^{-1}) \\ &= \phi_0 + \phi_1 + \dots + \phi_{n_A} z^{-n_A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(z^{-1}) &= \sum_{j=1}^N P_j F_j(z^{-1}) \\ &= \varphi_0 + \varphi_1 z^{-1} + \dots + \varphi_{n_B-1} z^{-(n_B-1)}, \end{aligned}$$

其中 ϕ_j, φ_j 均为 $n \times n$ 维矩阵, 则当前时刻的控制量为

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k). \quad (11)$$

2.4. 时变参数的在线辨识

混沌系统是非线性系统, 定常参数的线性模型很难精确地反应混沌系统的动力学行为, 建模误差较大. 而广义预测控制器是基于线性模型求解的, 所以简单的应用定常线性系统的预测控制器控制非线性系统较为困难.

本文采用辨识算法在线估计模型参数, 用时变参数的线性模型逼近混沌系统, 以减小建模误差, 提高建模精度, 实现控制器对混沌系统的有效控制. 将(1)式写为

$$\begin{aligned} \Delta y(k) &= -A_1 \Delta y(k-1) - \dots - A_{n_A} \Delta y(k-n_A) \\ &\quad + B_0 \Delta u(k-1) + \dots + B_{n_B} \Delta u(k-n_B-1), \end{aligned}$$

上式可以写为

$$\Delta y(k) = X(k-1)^T \theta_0,$$

其中

$$X(k-1)^T = [-\Delta y(k-1)^T, \dots, -\Delta y(k-n_A)^T, \\ \Delta u(k-1)^T, \dots, \Delta u(k-n_B-1)^T], \\ \theta_0 = [A_1, \dots, A_{n_A}, B_0, \dots, B_{n_B}]^T.$$

令 $\epsilon(k) = \Delta y(k) - X(k-1)^T \hat{\theta}(k-1)$,

其中, $\hat{\theta}(k) = [\hat{A}_1(k), \dots, \hat{A}_{n_A}(k), \hat{B}_0(k), \dots, \hat{B}_{n_B}(k)]^T$.

对于变化平稳的时变系统来说,只要适当地选取遗忘因子或者记忆长度,就可以得到相当好的辨识效果.但混沌系统的动态特性不是平稳的,其动力学行为变化时快时慢,所以我们选取具有时变遗忘因子的递推最小二乘辨识算法来逼近混沌系统,这样,也解决了受控系统稳定时参数估计的误差协方差阵 $P(k)$ 由于信息量减少按指数增加的问题.

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{P(k-1)X(k-1)\epsilon(k)}{\alpha(k) + X(k-1)^T P(k-1)X(k-1)}, \quad (12)$$

$$P(k) = \frac{1}{\alpha(k)} \left[P(k-1) - \frac{P(k-1)X(k-1)X(k-1)^T P(k-1)}{\alpha(k) + X(k-1)^T P(k-1)X(k-1)} \right], \quad (13)$$

这里 $\alpha(k)$ 为时变遗忘因子,

$$\alpha(k) = 1 - \frac{1}{\sum_0} \left(1 - \frac{X(k)^T P(k-1)X(k-1)}{\alpha(k-1) + X(k-1)^T P(k-1)X(k-1)} \right) \times \epsilon(k)^T \epsilon(k) \quad (14)$$

当 $\alpha(k) \leq \rho_{\min}$ 时, $\alpha(k) = \rho_{\min}$. 其中 \sum_0 可取为 $\sigma_0^2 N_0$, 这里 σ_0^2 是量测噪声方差, N_0 是渐进记忆长度, $P(0)$ 为任意正定矩阵.

2.5. 自适应 β -MGPC 控制算法流程

给定参数估计算法中的遗忘因子初值 $\alpha(0)$, \sum_0 , 正定矩阵 $P(0)$ 和初始值 $\hat{\theta}(0)$, 给定预测时域 N , 控制时域 N_u , 控制加权因子 λ 及控制增量增益 β .

第一步:用(12)式和(13)式在线估计出 $\hat{A}(z^{-1})$ 和 $\hat{B}(z^{-1})$.

第二步:用 $\hat{A}(z^{-1})$ 和 $\hat{B}(z^{-1})$ 代替 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 并求解丢番图方程, 解出 E_j, F_j, G_j 和 H_j .

第三步:计算矩阵 G 和 $\beta G^T (G + \lambda I)^{-1}$, 并由(10)式和(11)式计算当前控制量 $u(k)$.

3. 混沌系统的自适应 β -MGPC 控制原理

自适应 β -MGPC 方法控制混沌系统的原理见图 1, 其基本思路为:以 Lorenz 系统为例, 在被控对象各分量上各加一个控制量 $u = [u_1, u_2, u_3]^T$, 则有下式:

$$\begin{cases} dx/dt = a(y-x) + u_1, \\ dy/dt = bx - xz - y + u_2, \\ dz/dt = xy - cz + u_3, \end{cases}$$

控制算法给定初值和参数值后,应用 β -MGPC 算法,计算得出当前控制量 $u(k)$,加到受控混沌系统,相应地得到一组输入输出数据,应用在线辨识算法得出新的受控自回归积分滑动平均模型(CARIMA),再用 β -MGPC 算法对其进行控制,重复进行上述计算,直至把被控对象控制到期望目标.

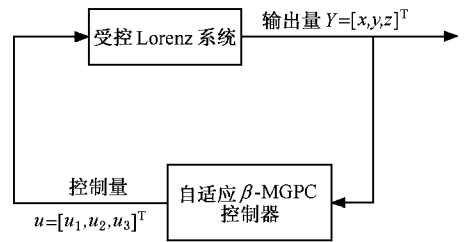


图 1 自适应 β -GPC 控制原理框图

4. 仿真结果

为了说明所给算法的有效性,这里分别以广泛研究的 Lorenz 系统, Rossler 系统和 Chua 电路为被控对象,按上述控制算法进行了大量的仿真研究,对于上述三种混沌系统,本文算法用同一组控制参数便实现了对任意设定值,正弦和方波信号的宽范围跟踪控制,控制效果良好.篇幅所限,下面只给出具有代表性的几组仿真结果.

例 1 控制 Lorenz 系统

Lorenz 提出的描述大气运动的 Lorenz 模型如下:

$$\begin{cases} dx/dt = a(y-x), \\ dy/dt = bx - xz - y, \\ dz/dt = xy - cz. \end{cases}$$

当 $a = 10, b = 8/3, c = 28$ 时, Lorenz 系统的动力学行为处于混沌状态.

在仿真研究中,采用四阶龙格-库塔法,步长 $\delta = 0.01$,初始条件为 $x(0) = 2, y(0) = 2, z(0) = 2, u_1(0) = 0, u_2(0) = 0, u_3(0) = 0$,辨识算法中 $\rho(0) = 0.98, \Sigma_0 = 100$,控制算法中参数取为 $N = 4, N_u = 3, \lambda = 0.0005 \times I_{3 \times 3}, \beta = 0.555$.以上参数取值,可控制 Lorenz 系统到包括不稳定平衡点在内的正弦、方波等任意给定参考信号.图 2 为控制跟踪正弦信号时的仿真结果,图中 n 为迭代步数(下同).

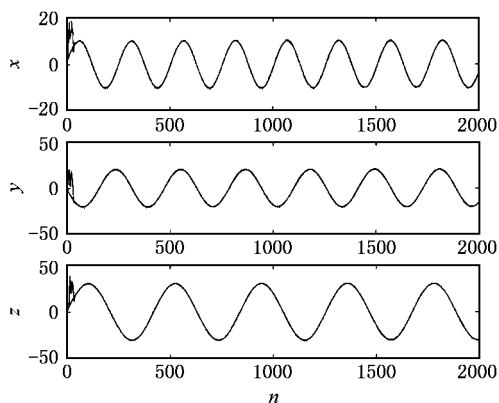


图 2 控制 Lorenz 跟踪正弦信号

图 3 为在相同控制参数和参考目标情况下,仿真研究中在 Lorenz 混沌系统的各个分量上分别加入方差为 2 的白噪声序列后的控制结果.

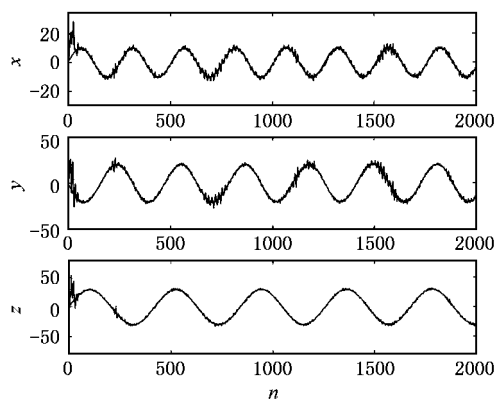


图 3 加入白噪声时跟踪正弦信号

由混沌系统对初始值极为敏感的特性可知, Lorenz 系统的三个状态变量上分别加入方差为 2 的白噪声序列对其动力学行为将产生较大的影响,图 3 显示在加入白噪声信号后 Lorenz 系统仍能较为准确地跟踪设定目标,说明控制算法具有较强的抗噪能力.

例 2 控制 Rossler 系统

Rossler 构造的最有代表性的具有混沌行为的非线性方程组为:

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = z(x - c) + b, \end{cases}$$

其中,参数 $a = b = 0.2, c = 5.7$ 时系统处于混沌状态.

在仿真研究中,采用四阶龙格-库塔法,步长 $\delta = 0.01$,初始条件为 $x(0) = 2, y(0) = 2, z(0) = 2, u_1(0) = 0, u_2(0) = 0, u_3(0) = 0$,辨识算法中 $\rho(0) = 0.98, \Sigma_0 = 100$,控制算法中参数取为 $N = 4, N_u = 3, \lambda = 0.0005 \times I_{3 \times 3}, \beta = 0.555$.以上参数取值,可控制 Rossler 系统到包括不稳定平衡点在内的任意给定参考目标.图 4 为控制跟踪方波信号时的仿真结果.

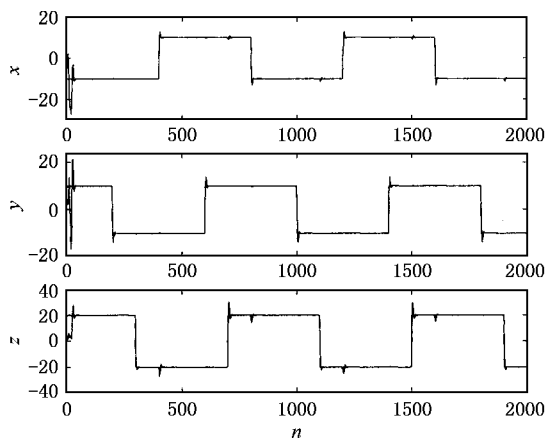


图 4 控制 Rossler 跟踪方波信号

由于方波信号的阶跃性强,对于混沌系统耦合性很强的多个状态变量而言,较难实现对其的跟踪控制.由图 4 可以看出,虽然受控 Rossler 系统的三个状态变量受到相互耦合的轻微影响,但仍能很快跟踪上了设定的方波信号,控制动作灵敏,控制效果精确.

例 3 控制 Chua 电路系统

Chua 构造的 Chua 电路是第一个真正能够用物理手段实现的混沌系统,Chua 电路简化后无量纲的标准型为:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - f(x)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -\beta y, \end{cases}$$

其中

$$f(x) = bx + \frac{1}{2}(a - b)(|x + 1| - |x - 1|)$$

$a < b < 0$, $\alpha = 10$, $\beta = 14.87$, $a = -0.68$, $b = 1.27$.

在仿真研究中,采用四阶龙格-库塔法,步长取为 $\delta = 0.01$;初始条件为 $x(0) = 2.1213$, $y(0) = -0.0662$, $z(0) = 2.8811$, $u_1(0) = 0$, $u_2(0) = 0$, $u_3(0) = 0$ 辨识算法中 $\rho(0) = 0.98$, $\Sigma_0 = 100$ 控制算法中参数取 $N = 4$, $N_u = 3$, $\lambda = 0.0005 \times I_{3 \times 3}$, $\beta = 0.555$. 以上参数取值,可控制 Chua 电路系统到包括不稳定平衡点在内的任意给定参考信号.图 5 显示了控制 Chua 电路系统跟踪方波信号时的良好效果.

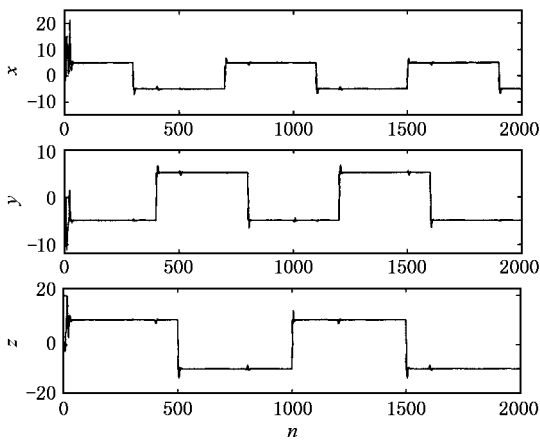


图 5 控制 Chua 电路跟踪方波信号

文献 12 的控制算法控制不同的混沌系统需调整不同的控制参数.由上述三个例子可以看出,本文控制算法只用同一组控制参数便可控制三种典型混沌系统跟踪任意设定值,正弦和方波等参考信号,从而说明算法控制范围宽,模型适应性强.

例 4 Lorenz 系统与 Chua 电路系统同步

在仿真研究中,采用四阶龙格-库塔法,步长 $\delta = 0.01$;初始条件:Lorenz 系统 $x(0) = 2$, $y(0) = 2$, $z(0) = 2$, Chua 电路系统 $x(0) = -2.1213$, $y(0) = -0.0662$, $z(0) = 2.8811$, $u_1(0) = 0$, $u_2(0) = 0$, $u_3(0) = 0$ 辨识算法中 $\rho(0) = 0.98$, $\Sigma_0 = 100$ 控制算法中参数取 $N = 4$, $N_u = 3$, $\lambda = 0.000005 \times I_{3 \times 3}$, $\beta = 0.555$.以上参数取值,可控制 Lorenz 系统自同步或与 Chua 电路系统和 Rossler 系统异结构同步.图 6 为控制 Lorenz 与 Chua 电路系统同步时的仿真结果.

仿真结果表明 Lorenz 系统很快便实现了对 Chua 电路系统的跟踪同步,且混沌系统的三个状态变量的同步误差在经过较大幅度振荡后,便很快渐进趋向于零(见图 7).

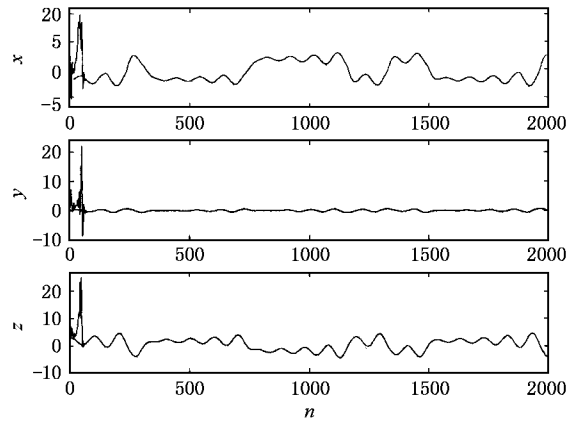


图 6 控制 Lorenz 系统与 Chua 电路系统同步

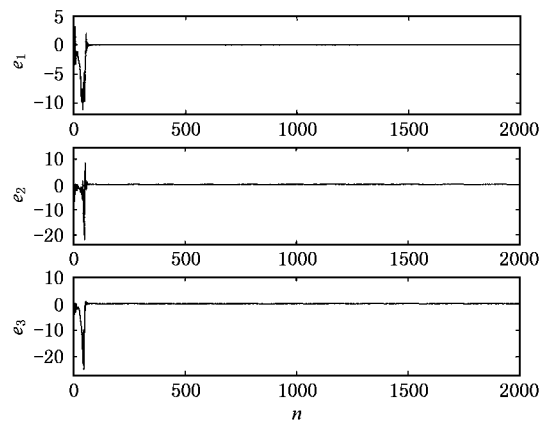


图 7 同步控制误差

5. 结 论

本文提出了一种带时变遗忘因子的自适应多变量广义预测控制算法(β -MGPC)对混沌系统进行控制,大量的数值仿真研究证实了该控制算法的可行性和有效性.从本文的分析可以看出,自适应 β -MGPC 控制算法控制混沌系统,有以下几个优点:

(1)可以控制模型未知的混沌系统,为模型未知或不确定性的混沌系统的控制与同步提供了依据.

(2)算法有一定的抗噪能力,能对加入较大噪声的混沌系统进行有效控制.与已有方法相比,本文算法用同一组控制参数便可实现对不同混沌系统的宽范围控制,所以该算法对模型适应性强.

(3)可以控制实现混沌系统的自同步和异结构同步.

(4)线性的自适应 β -MGPC 可以控制非线性很

强的混沌系统 控制动作灵敏 从仿真结果可以看出
该算法在迭代几十步以内便将混沌系统控制到参考

目标 控制效果良好.

- [1] Ott E , Grebogi C and Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [2] Tang G N , Luo X S and Kong L J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 30 (in Chinese) [唐国宁、罗晓曙、孔令江 2000 物理学报 **49** 30]
- [3] Tang G N and Luo X S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 15 (in Chinese) [唐国宁、罗晓曙 2004 物理学报 **53** 15]
- [4] Liu D , Qian F C *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2704 (in Chinese) [刘 丁、钱富才等 2004 物理学报 **53** 2704]
- [5] Li L X , Peng H P , Lu H B *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 629 (in Chinese) [李丽香、彭海朋、卢辉斌等 2001 物理学报 **50** 629]
- [6] Guan X P *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2108 (in Chinese) [关新平 2001 物理学报 **50** 2108]
- [7] Chen S H , Xie J , Lu J A and Lin J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 749 (in Chinese) [陈士华、谢 进、陆君安、刘 杰 2002 物理学报 **51** 749]
- [8] Liu F C *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2707 (in Chinese) [刘福才等 2002 物理学报 **51** 2707]
- [9] Liu J , Chen S H and Lu J A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1595 (in Chinese) [刘 杰、陈士华、陆君安 2004 物理学报 **52** 1595]
- [10] Wei R and Wang X Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3298 (in Chinese) [魏 荣、王行愚 2004 物理学报 **53** 3298]
- [11] Li G H , Xu D M and Zhou Sh P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 379 (in Chinese) [李国辉、徐得名、周世平 2004 物理学报 **53** 379]
- [12] Zhang J S and Xiao X C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2902 (in Chinese) [张家树、肖先赐 2001 物理学报 **50** 2902]
- [13] Clarke D W *et al* 1987 *Automatica* **23** 137
- [14] Sun M W , Chen Z Q and Yuan Z Z 2000 *Control Theory and Application* **17** 165 [孙明玮、陈增强、袁著祉 2000 控制理论与应用 **17** 165]

Adaptive multi-variable generalized predictive control and synchronization of chaotic systems *

Dong En-Zeng[‡] Chen Zeng-Qiang[†] Yuan Zhu-Zhi

(Department of Automation , Nankai University , Tianjin 300071 , China)

(Received 26 November 2004 ; revised manuscript received 1 March 2005)

Abstract

This paper presents a β type multi-variable generalized predictive control method for control and synchronization of chaotic systems. Using this method, the chaotic Lorenz system, Rossler system and Chua's circuit system can be controlled to track the discretionary reference signal. The effectiveness of the proposed method is verified by numerical simulations. The advantages of the proposed method are that it can realize effective control and synchronization of chaotic systems without the knowledge of its precise model.

Keywords : chaotic control , chaotic synchronization , adaptive predictive control , time-varying forgettable factor

PACC : 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60374037), and by the Innovation Foundation of Nankai University.

[†] E-mail : chenzq@nankai.edu.cn