

一个临界系统与 Lorenz 系统和 Chen 系统的异结构同步*

宁 娣 陆君安†

(武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072)

(2005 年 1 月 7 日收到, 2005 年 3 月 1 日收到修改稿)

对最近提出的一个临界系统, 设计了一个非线性控制器, 使得系统的第一个状态信号以指数收敛速度追踪任意给定的参考信号, 利用 Active 控制实现了这个临界系统与 Lorenz 系统以及 Chen 系统的异结构同步. 大量数值实验验证了理论结果.

关键词: 追踪控制, 异结构同步, 混沌系统

PACC: 0545

1. 引 言

由于混沌系统对初值的敏感性和长时间的不可预测性, 控制混沌就成为了混沌应用的关键环节. 1989 年 Hubler 发表了控制混沌的第一篇文章^[1], 1990 年 Ott, Grebogi 和 Yorke 提出了 OGY 方法^[2]. 同年, Pecora 和 Carroll 提出了混沌同步的思想^[3]. 10 多年来, 混沌控制和同步的研究得到了蓬勃的发展, 已成为一个全新的科学前沿方向. 人们提出了多种混沌控制与同步的方法, 如反馈方法, 自适应方法, 采样反馈方法, 延迟反馈方法, Backstepping 方法等^[4-11].

1999 年陈关荣在混沌系统反控制中发现了一个与著名的 Lorenz 系统相似但不拓扑等价的新混沌吸引子^[12]-Chen 系统. 2002 年, 吕金虎与陈关荣进一步发现了 Lü 系统^[13]. 不久, 他们又提出一个统一系统^[14]. 根据 Čelikovesky 和 Chen 的定义^[15], Lorenz 系统, Chen 系统, Lü 系统属于三种不同类型, 分别对应于 $a_{12}a_{21} > 0$, $a_{12}a_{21} < 0$, $a_{12}a_{21} = 0$, 而统一系统连接了 Lorenz 吸引子与 Chen 吸引子. 当 $\alpha = 0$ 时即为 Lorenz 系统, 当 $\alpha = 1$ 时即为 Chen 系统, 而 $\alpha = 0.8$ 为临界系统(Lü 系统). 人们称上述这些系统为

Lorenz 系统族, 对它们的研究工作刚刚开始. 同时, 他们又提出广义 Lorenz 规范式(GLCF)^[16, 17], 以上系统都是它的特例. GLCF 只有一个参数, Lorenz 系统满足 $0 < \tau < +\infty$, Lü 系统满足 $\tau = 0$, Chen 系统满足 $-1 < \tau < 0$. 在 2004 年, Liu 等又提出了一种新的混沌系统^[18], 这个新的系统可以描述为:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= a(\hat{y} - \hat{x}), \\ \dot{\hat{y}} &= b\hat{x} - k\hat{x}\hat{z}, \\ \dot{\hat{z}} &= -c\hat{z} + h\hat{x}^2, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 a, b, c, k, h 是参数. 当 $a = 10, b = 40, k = 1, c = 2.5, h = 4$ 时, 系统处于混沌状态, 如图 1 所示. 系统(1)有一个鞍点 $S_0(0, 0, 0)$ 和两个非稳定焦点. 针对这个系统, 经过线性坐标变换

$$\begin{cases} x = \hat{x} \sqrt{hk}, \\ y = \hat{y} \sqrt{hk}, \\ z = k\hat{z}, \end{cases} \quad (2)$$

方程(1)可以转化为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = bx - xz, \\ \dot{z} = -cz + x^2. \end{cases} \quad (3)$$

也就是说, 设方程(1)中的 $k = h = 1$, 就可以化为方程(3), 所以方程(1)和(3)是等价的. 此系统为广义

* 国家重点基础研究发展计划项目(973)批准号 2003CB415200, 国家自然科学基金(批准号 50209012), 信息安全国家重点实验室开放基金和水资源与水电工程科学国家重点实验室开放基金(批准号 2005C010)资助的课题.

† E-mail: jalu@whu.edu.cn

Lorenz 规范式 GLCF 中 $\tau = -1$ 情形, 它又为 GLCF 提供了一个新的成员. 我们称它为一个临界系统, 对它的研究刚刚开始. 本文通过设计一个非线性反馈控制器, 使得系统的第一个状态信号以指数收敛速度追踪任意给定的参考信号. 同时利用 Active 控制实现了这个临界系统与 Lorenz 系统以及 Chen 系统的异结构同步, 目前异结构同步的研究很少. 大量数值实验验证了理论结果.

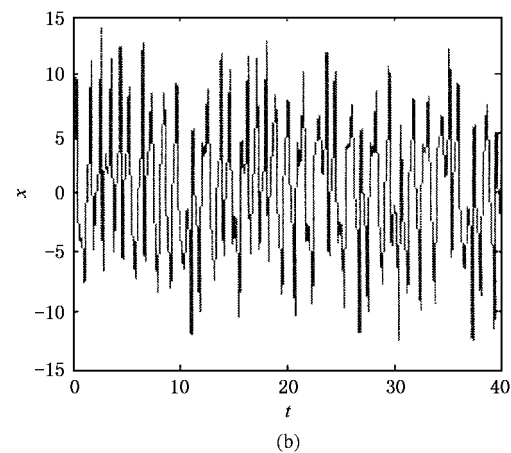
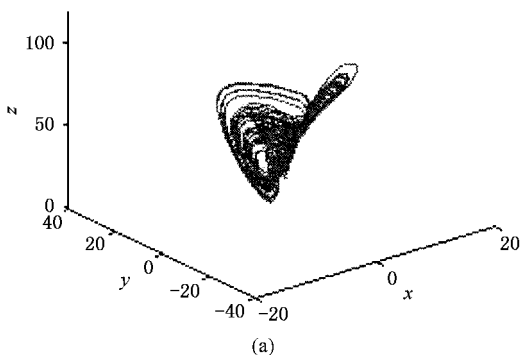


图 1 系统的相图和 $x(t)-t$ 图

2. 追踪给定信号

现给定一参考信号 $r(t)$, 要设计一个控制器 U 使得受控系统

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = bx - xz + U, \\ \dot{z} = -cz + x^2 \end{cases} \quad (4)$$

的输出信号 $x(t)$ 追踪给定的参考信号 $r(t)$, 即满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = 0$$

式中 $e(t) = x(t) - r(t)$ 称为误差信号. 取控制器

$$U = (a - 2)y - \left(a - 2 + b + \frac{2}{a} \right)x + xz + \frac{1}{a}(2r + 2\dot{r} + \ddot{r}). \quad (5)$$

设

$$V(t) = (x - r)^2 + [(a - 1)x - ay + r + \dot{r}]^2,$$

则

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= 2(x - r)(\dot{x} - \dot{r}) + 2(a - 1)x \\ &\quad - ay + r + \dot{r} [(a - 1)\dot{x} - a\dot{y} + \dot{r} + \ddot{r}] \\ &= 2(x - r) [a(y - x) - \dot{r}] + 2(a - 1)x \\ &\quad - ay + r + \dot{r} [a(a - 1)(y - x) \\ &\quad - a(bx - xz + U) + \dot{r} + \ddot{r}] \\ &= -2(x - r)^2 - 2[(a - 1)x - ay + r + \dot{r}]^2 \\ &= -2V(t). \end{aligned}$$

故 $V(t) = V(0)e^{-2t}$, 因而

$$|e(t)|^2 \leq V(t) = V(0)e^{-2t}, \text{ 即误差信号 } e(t)$$

以指数速度收敛到 0.

数值仿真

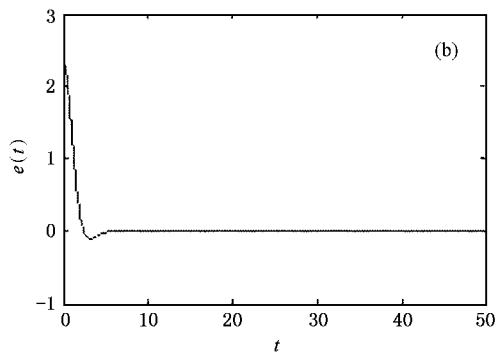
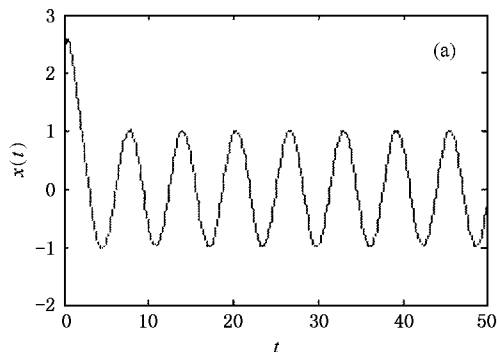


图 2 (a) 受控系统的状态信号 $x(t)$ (b) 误差信号 $e(t)$

设正弦信号 $r(t) = \sin(t)$ 为参考信号, 系统 (3) 的参数取 $a = 10, b = 40, c = 2.5$ 时是混沌态. 此时

取控制器 $U = 8y - \left(48 + \frac{1}{5}\right)x + xz + 0.1(\sin t + 2\cos t)$,受控系统(4)的初值为 $x(0) = 2.2, y(0) = 2.4, z(0) = 38$,那么可实现受控系统对正弦信号的追踪.由图 2(a)和图 2(b),可看出 $x(t)$ 追踪 $r(t)$ 的速度非常快.

3. 与 Lorenz 系统的异结构同步

通过 Active 控制实现与 Lorenz 系统的异结构同步.设 Lorenz 系统与临界系统分别为驱动系统和响应系统:

$$\text{驱动系统} \begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = \gamma x_1 - x_1 z_1 - y_1, \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta z_1, \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{响应系统} \begin{cases} \dot{x}_2 = \alpha(y_2 - x_2) + u_1(t), \\ \dot{y}_2 = \gamma x_2 - x_2 z_2 + u_2(t), \\ \dot{z}_2 = -\beta z_2 + x_2^2 + u_3(t). \end{cases} \quad (7)$$

在(7)中引进了三个控制函数 $u_1(t), u_2(t)$ 和 $u_3(t)$.为了确定控制函数 $u_1(t), u_2(t)$ 和 $u_3(t)$,由(7)式减(6)式得到误差系统.记状态误差信号:

$$\begin{aligned} e_1 &= x_2 - x_1, e_2 = y_2 - y_1, \\ e_3 &= z_2 - z_1, \end{aligned} \quad (8)$$

得到

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \alpha e_2 - \alpha e_1 + (\alpha - \alpha \gamma)(y_1 - x_1) + u_1(t), \\ \dot{e}_2 = \beta e_1 + (\beta - \gamma)x_1 - e_1 e_3 \\ \quad - e_1 z_1 - x_1 e_3 + y_1 + u_2(t), \\ \dot{e}_3 = -\beta e_3 + (\beta - c)z_1 + e_1^2 \\ \quad + 2x_1 e_1 + x_1^2 - x_1 y_1 + u_3(t), \end{cases} \quad (9)$$

则控制函数定义如下:

$$\begin{cases} u_1(t) = V_1(t) - (\alpha - \alpha \gamma)(y_1 - x_1), \\ u_2(t) = V_2(t) - (\beta - \gamma)x_1 + e_1 e_3 \\ \quad + e_1 z_1 + x_1 e_3 - y_1, \\ u_3(t) = V_3(t) - (\beta - c)z_1 - e_1^2 - 2x_1 e_1 \\ \quad - x_1^2 + x_1 y_1. \end{cases} \quad (10)$$

因此,得到误差系统:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \alpha e_2 - \alpha e_1 + V_1(t), \\ \dot{e}_2 = \beta e_1 + V_2(t) \\ \dot{e}_3 = -\beta e_3 + V_3(t), \end{cases} \quad (11)$$

其中 $V_1(t), V_2(t)$ 和 $V_3(t)$ 是误差信号 e_1, e_2 和 e_3 的函数.

不妨取控制函数

$$\begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \\ V_3(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a - 1 & -a & 0 \\ -b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & c - 1 \end{pmatrix}.$$

从而受控误差系统(11)的特征值为 $-1, -1, -1$,使得当 $t \rightarrow \infty$ 时,状态误差 e_1, e_2, e_3 均收敛于 0.因此,实现了临界系统与 Lorenz 系统的异结构同步.

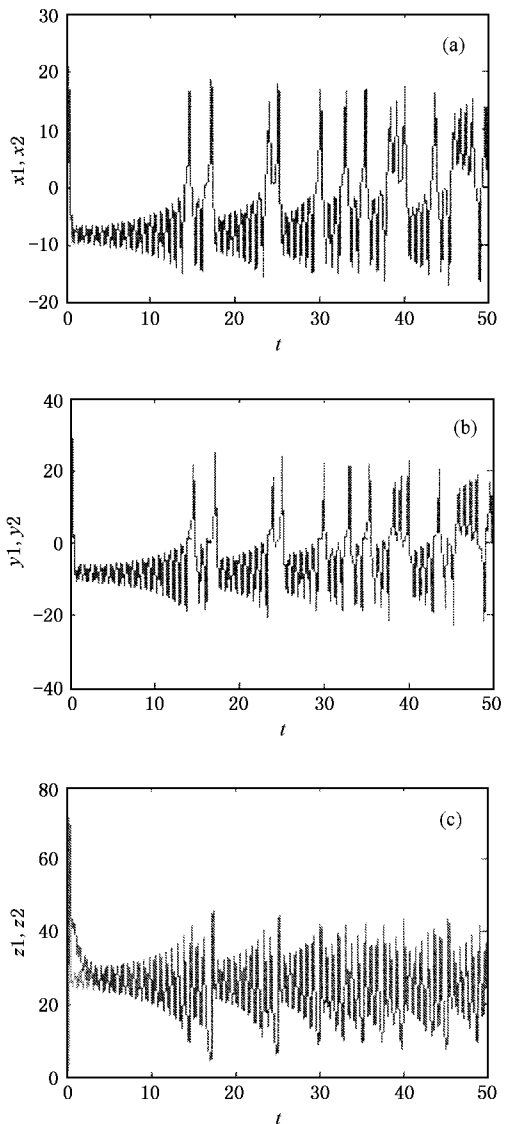


图 3 (a)信号 x_1 与 x_2 (b) y_1 与 y_2 信号 (c)信号 z_1 与 z_2

数值仿真

当参数分别取 $\alpha = 10$, $\beta = 8/3$, $\gamma = 28$ 和 $a = 10$, $b = 40$, $c = 2.5$ 时,使得这两个系统均呈混沌态.初值分别为: $x_1(0) = 0.2$, $y_1(0) = 0.6$, $z_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2.2$, $y_2(0) = 2.4$, $z_2(0) = 38$.

图 3(a)—3(c)给出了 Lorenz 系统与临界系统同步的显示结果.图 4 给出了驱动系统与响应系统的状态误差信号的显示结果.

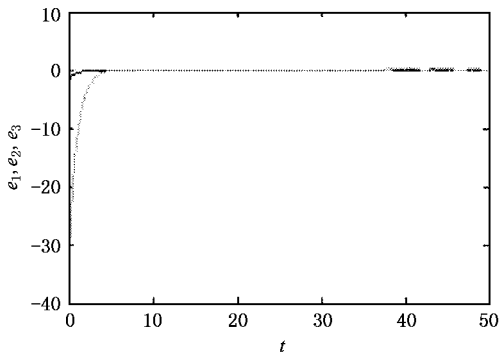


图 4 误差信号 e_1, e_2, e_3

4. 与 Chen 系统的异结构同步

假定用 Chen 系统驱动临界系统,驱动系统与响应系统分别为:

驱动系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \rho(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = (\mu - \rho)x_1 - x_1 z_1 + \mu y_1, \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \nu z_1, \end{cases} \quad (12)$$

响应系统

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_2 - x_2) + v_1(t), \\ \dot{y}_2 = bx_2 - kx_2 z_2 + v_2(t), \\ \dot{z}_2 = -cz_2 + hx_2^2 + v_3(t). \end{cases} \quad (13)$$

这里 $v_1(t)$, $v_2(t)$ 和 $v_3(t)$ 是待定的控制函数.

定义误差信号

$$\begin{aligned} e_1 &= x_2 - x_1, e_2 = y_2 - y_1, \\ e_3 &= z_2 - z_1. \end{aligned}$$

同样地,由(13)式—(12)式得:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = ae_2 - ae_1 + (a - \rho)(y_1 - x_1) + v_1(t), \\ \dot{e}_2 = be_1 + bx_1 - (\mu - \rho)e_2 - ke_1 e_3 - ke_1 z_1 - kx_1 e_3 + (1 - k)x_1 z_1 - \mu y_1 + v_2(t), \\ \dot{e}_3 = -ce_3 + (\nu - c)z_1 + he_1^2 + 2hx_1 e_1 + hx_1^2 - x_1 y_1 + v_3(t), \end{cases} \quad (14)$$

控制函数表示如下:

$$\begin{cases} v_1(t) = V_1(t) - (a - \rho)(y_1 - x_1), \\ v_2(t) = V_2(t) - bx_1 + (\mu - \rho)x_1 + ke_1 e_3 + ke_1 z_1 + kx_1 e_3 - (1 - k)x_1 z_1 + \mu y_1, \\ v_3(t) = V_3(t) - (\nu - c)z_1 - he_1^2 - 2hx_1 e_1 - hx_1^2 + x_1 y_1. \end{cases} \quad (15)$$

因此,误差系统为:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = ae_2 - ae_1 + V_1(t), \\ \dot{e}_2 = be_1 + V_2(t), \\ \dot{e}_3 = -ce_3 + V_3(t). \end{cases} \quad (16)$$

控制输入函数 $V_1(t)$, $V_2(t)$ 和 $V_3(t)$ 是 e_1 , e_2 和 e_3 的函数,取

$$\begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \\ V_3(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a - 1 & -a & 0 \\ -b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & c - 1 \end{pmatrix}$$

使受控误差系统(16)的特征值为 $-1, -1, -1$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,状态误差 e_1, e_2, e_3 均收敛于 0. 因此,实现了 Chen 系统与临界系统的异结构同步.

数值仿真

选取 Chen 系统的参数为 $\rho = 35$, $\nu = 3$, $\mu = 28$, 临界系统的参数为 $a = 10$, $b = 40$, $c = 2.5$, 使得驱动系统和响应系统均呈现混沌态.初值分别取 $x_1(0) = -10$, $y_1(0) = -17$, $z_1(0) = 15$, 和 $x_2(0) = 2.2$, $y_2(0) = 2.4$, $z_2(0) = 38$.

图 5(a)—5(c)给出了 Chen 系统与临界系统同步的显示结果.图 6 给出了驱动系统与响应系统的状态误差信号的显示结果.

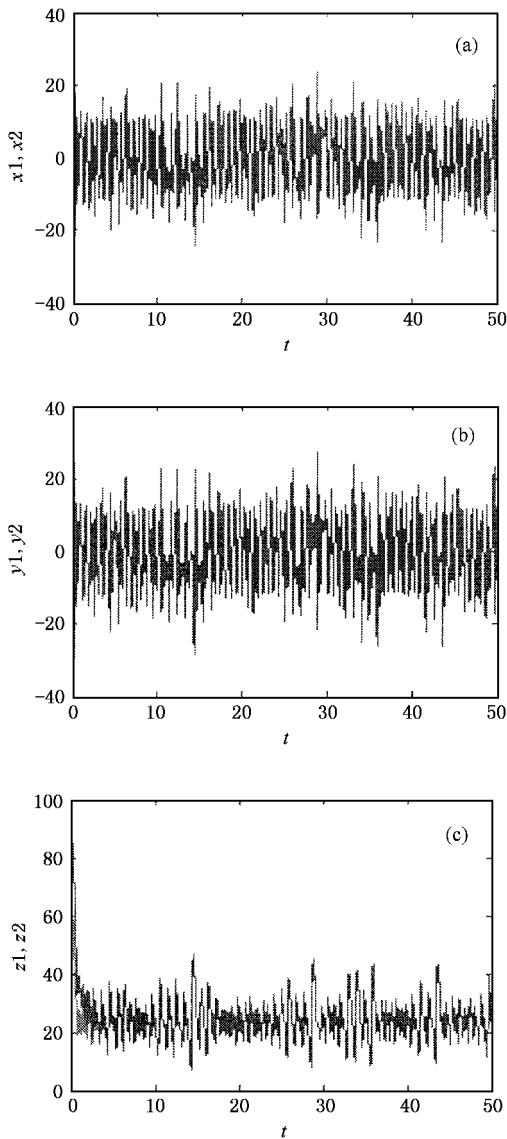


图5 (a)信号 x_1 与 x_2 (b)信号 y_1 与 y_2 (c)信号 z_1 与 z_2

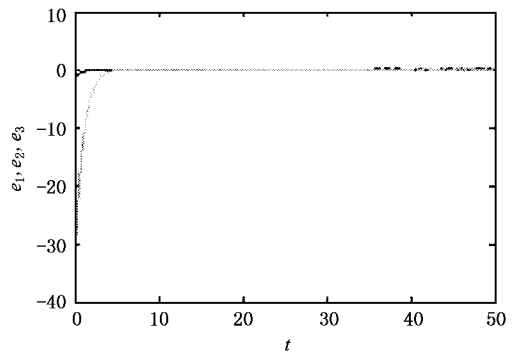


图6 误差信号 e_1, e_2, e_3

5. 结 论

本文针对最近提出的一个临界系统,设计了一个非线性控制器,使得系统的第一个状态信号以指数收敛速度追踪任意给定的参考信号.其次,利用Active控制实现了这个临界系统与Lorenz系统以及Chen系统的异结构同步.大量数值实验验证了理论结果.

- [1] Hubler A W 1989 *Helv. Phys. Acta* **62** 343
- [2] Ott E, Grebogi C and Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [3] Pecora L M and Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [4] Chen G R and Dong X N 1998 *From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications* (Singapore: World Scientific)
- [5] Hu G, Xiao J H and Zheng Z G 2000 *Chaos Control* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) p78 (in Chinese) [胡 岗, 萧井华, 郑志刚 2000 混沌控制(上海:上海科技教育出版社) p78]
- [6] Wang G R, Yu X L and Chen S G 2001 *Chaos Control, Synchronization and its Application* (Beijing: National Defence Industry Press) p281 (in Chinese) [王光瑞, 于熙岭, 陈式刚 2001 混沌的控制、同步与利用(北京:国防工业出版社) p281]
- [7] Tao C H, Lu J A and Lü J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 (in Chinese) [陶朝海, 陆君安, 吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497]
- [8] Tao C H and Lu J A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 0281 (in Chinese) [陶朝海, 陆君安 2003 物理学报 **52** 0281]
- [9] Wu X Q and Lu J A 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **18** 721
- [10] Lu J A, Wu X Q and Lü J H 2002 *Phys. Lett. A* **305** 365
- [11] Lu J A, Wu X Q, Han X P and Lü J H 2004 *Phys. Lett. A* **329** 327
- [12] Chen G and Ueta T 1999 *Int. J. Bifurc. Chaos* **9** 1465
- [13] Lü J and Chen G 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 659
- [14] Lü J, Chen G, Cheng D and Čelikovský S 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 2917
- [15] Čelikovský S and Chen G 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 1789

- [16] Chen G R and Lü J H 2003 *Dynamics of the Lorenz Systems Family : Analysis ,Control and Synchronization* (Beijing Science Press) p150
(in Chinese)[陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步(北京 科学出版社) p150]
- [17] Chen G 2004 *Proceedings of the Chinese National Conference on Nonlinear Dynamics , Nonlinear Vibrations ,and Motion Stabilities* 28
- [18] Liu C X ,Liu T , Liu L and Liu K 2004 *Chaos ,Solitons and Fractals* 22 1031

Synchronization of a critical chaotic system with Lorenz system and Chen system^{*}

Ning Di Lu Jun-An[†]

(*School of Mathematics and Statistics , Wuhan University , Wuhan 430072 , China*)

(Received 7 January 2005 ; revised manuscript received 1 March 2005)

Abstract

A nonlinear feedback controller is designed to make the first state of a new chaotic system track an arbitrary smooth reference signal at an exponential rate. In addition , Chaos synchronization between two different chaotic systems by using active control is presented. This technique is applied to achieve chaos synchronization between the critical system , Lorenz system and Chen system. Numerical simulations are made to verify the results.

Keywords : tracking control , synchronization , chaotic system

PACC : 0545

^{*} Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2003CB415200) , the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50209012) , the Open Found of the State Key Laboratory for Information Secret and the Open Found of the State Key Laboratory for Water-Resource and Water and Electricity Engineering Science ,China(Grant No.2005C010).

[†]E-mail : jalu@whu.edu.cn