

变尺度概率净化法的优化^{*}

姜可宇[†] 蔡志明

(海军工程大学电子工程学院, 武汉 430033)

(2004 年 8 月 10 日收到, 2005 年 3 月 21 日收到修改稿)

变尺度概率净化法是一种混沌时间序列非线性动力学降噪方法, 该方法需对整个相空间点列做联合处理, 因此算法的计算量和所需内存量会随着每个轨道点的修正参考点数和嵌入维数的增加而呈指数增长. 根据变尺度概率净化法的特点, 对前向概率和转移概率的估计方法作了一些改进, 使算法的运算量减小到了原来的 0.27 左右, 而降噪性能并没有下降, 并提出了数据较长情况下的算法实现结构, 大大降低了算法运行所需内存.

关键词: 混沌, 非线性动力学, 降噪, 最大后验概率估计, 变尺度概率净化

PACC: 0545, 0540

1. 引 言

混沌是一种非线性动力学控制的行为, 表现为对初值的敏感性^[1], 但在不同初值条件下得到的混沌信号具有相同的相空间轨道密度分布^[2,3]. 变尺度概率净化法是 Marteau 和 Abarbanel 提出的一种混沌时间序列降噪方法, 该方法根据混沌信号相空间轨道密度分布的不变性, 在被噪声污染的混沌信号每一个相空间重构轨道点的周围按一定尺度均匀地取若干个作为修正参考点, 以某一干净混沌信号相空间轨道作为参考轨道, 按最大后验概率准则对被噪声污染的混沌信号进行滤波, 然后再逐渐缩小修正参考点的尺度, 依此进行多轮滤波, 使净化后的混沌信号与干净的参考信号在相空间轨道点密度分布上趋于一致. 如果混沌系统的非线性动力学方程已知, 则可以方程的迭代时间序列作为参考信号, 如果混沌系统的非线性动力学方程未知, 则可以通过其他方式得到的干净混沌信号或经其它方法降噪后的混沌信号作为参考信号, 用于估计混沌信号相空间轨道点之间的转移概率. 这里的“噪声”可以是一般意义上的噪声, 也可以是有规信号, 对于有规信号的分离可以看作是降噪的一种特殊情形. 文献[4]用 Hénon 吸引子, Ikeda 映射, Lorenz 吸引子三种典型的

混沌吸引子对变尺度概率净化法进行了验证, 降噪及与脉冲信号分离的效果都非常理想, 该方法用于湖底混响与目标回波信号的分离, 也取得了较好的效果^[5].

由于该方法要对整个相空间点列做联合处理, 因此运算的计算量和所需内存量会随着每个轨道点的修正参考点数和嵌入维数的增加而呈指数增长. 本文根据变尺度概率净化法的特点, 对前向概率和转移概率的估计方法作了一些改进, 使算法的运算量减小到原来的 0.27 左右, 并提出了数据较长情况下的算法实现结构, 大大降低了算法运行所需内存.

2. 变尺度概率净化法

设观测时间序列

$$X_n = S_n + \eta_n, \quad n = 1, \dots, T, \quad (1)$$

其中 S_n 是混沌动力学系统的测量波形, η_n 是噪声或其他信号. 观测时间序列经时延重构后, 观测轨道也将分为两部分, 即

$$X_k = S_k + \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

这里, S_k 是混沌时间序列 d_E 维重构相空间中的点, 有内在的确定性演化规律, η_k 是噪声或其它信号在 d_E 维相空间中的点, 具有与 S_k 不同的演化规则, $N = T - (d_E - 1)\tau$ 表示全部轨道点的总数. 混沌时间

^{*} 国家安全重大基础研究项目(批准号 5132102ZZT32)和国家重点实验室基金(批准号 514450801JB1101)资助的课题.

[†] 联系人. E-mail: jiangky828@163.com

序列的降噪或信号分离就是从观测轨道 X_k 中估计出混沌轨道 \hat{S}_k , 再将 \hat{S}_k 还原成时间序列 \hat{S}_n . 观测时间序列、混沌时间序列和“噪声”时间序列的时延重构轨道点集分别记为 $X_1^N = \{X(k)\}_{k=1}^N$, $S_1^N = \{S(k)\}_{k=1}^N$, $\eta_1^N = \{\eta(k)\}_{k=1}^N$. 概率净化即在已知观测轨道点集 X_1^N 的情况下, 按最大后验概率原理, 构造关于 S_1^N 的最佳估计 \sum_1^N , 即净化轨道.

$$\sum_1^N = \{S(k)\}_{k=1}^N = \operatorname{argmax}_{S_1^N} \{P(S_1^N | X_1^N)\}, \quad (3)$$

式中,

$$P(S_1^N | X_1^N) = \frac{P(S_1^N, X_1^N)}{P(X_1^N)} \quad (4)$$

是 Nd_E 维联合条件概率. 通常可以合理地假设“噪声” η_k 是有界的, 且 $P(\eta_k)$ 已知或假设为最不利的均匀分布. 在此条件下, 在 Nd_E 维空间的有限区域搜索 S_1^N , 使 $P(S_1^N, X_1^N)$ 最大的计算量是巨大的, 必须利用 S_1^N 中动力学轨道点之间内在的联系, 优化算法. 由于混沌信号相空间轨道点 $S(k)$ 与 $S(k-1)$ 之间存在某种确定性的迭代关系 F , $S(k) = F(S(k-1))$, 于是可将 N 个 d_E 维矢量 $\{S(k)\}_{k=1}^N$ 的同时搜索转换成逐次对单个 d_E 维矢量 $S(k)$ 的搜索. 即

$$\begin{aligned} & P(S_1^k, X_1^k) \\ &= P(X_1^k | S_1^k) P(S_1^k) \\ &= P(X(k) | S(k)) P(X_1^{k-1} | S_1^{k-1}) \\ &\quad \times P(S(k) | S(k-1)) P(S_1^{k-1}) \\ &= P(X(k) | S(k)) \cdot P(S(k) | S(k-1)) \\ &\quad \times P(S_1^{k-1}, X_1^{k-1}), k = 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5)$$

记 $PF(S(k)) \triangleq \max_{S_1^{k-1}} \{P(S(k) | S(k-1)) P(S_1^{k-1}, X_1^{k-1})\}$ 表示动力学轨道 k 时刻的最佳前向概率, 则

$$\begin{aligned} & PF(S(k)) \\ &= \max_{S_1^{k-1}} \{P(S(k) | S(k-1)) P(S_1^{k-1}, X_1^{k-1})\} \\ &= \max_{S_1^{k-1}} \{P(S(k) | S(k-1)) P(X(k-1) | S(k-1)) \\ &\quad \times P(S(k-1) | S(k-2)) P(S_1^{k-2}, X_1^{k-2})\} \\ &= \max_{S(k-1)} \{P(S(k) | S(k-1)) P(X(k-1) | S(k-1)) \\ &\quad \times PF(S(k-1))\}. \end{aligned} \quad (6)$$

(5) 式是联合概率密度的降维递推式. 其中 $P(S(k) | S(k-1))$ 为混沌轨道点之间的转移概率, 可以根据具有相同轨道密度分布的参考轨道, 通过基于核函数的密度估计法^[4]来估计. (6) 式是最佳前向概率

的递推式. 根据该式可以按时间顺序逐步递推得到每个时刻修正参考点的最佳前向概率.

根据 (5) 式和 (6) 式, 高维的联合最优问题通过递推转化成了一个低维的逐点局部最优问题. 理论上, 每个时刻修正参考点的搜索空间是连续的, 但目前还没有找到一个合适的方法来解决这样一个连续空间的最优化问题. 文献 [4] 介绍了一种离散修正方法. 这种修正方法首先以每个观测轨道点 $X_k, k = 1, \dots, N$ 为中心建立若干个修正参考点, 假设为 $S(k, j), j = 1, \dots, M$. 然后从轨道始端到末端按下式递推地计算各修正参考点的最佳前向概率, 并且记下各修正参考点的连接序号组合 (k, j, j') 形成“连接图”.

$$\begin{aligned} & PF(S(k, j)) \\ &= \max_{S(k-1, j')} \{P(S(k, j) | S(k-1, j')) \\ &\quad \times P(X(k-1) | S(k-1, j')) PF(S(k-1, j'))\}, \\ &\quad j, j' = 1, \dots, M; k = 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (7)$$

当所有轨道点的各修正参考点最佳前向概率估计出来之后, 按最大后验概率估计最后一个轨道点的最佳修正参考点

$$\begin{aligned} \hat{S}(N) &= \operatorname{arg} \max_{\substack{S(N, j) \\ 1 \leq j \leq M}} \{P(X(N) | S(N, j)) \\ &\quad \times PF(S(N, j))\}. \end{aligned} \quad (8)$$

根据建立的“连接图”可依次将 $k = N-1, \dots, 1$ 时的最佳修正参考点检索出来.

当一轮搜索完毕之后, 缩小修正参考点的尺度, 再进行下一轮修正, 直至估计轨道收敛到真实的混沌轨道. 后向搜索与前向搜索的递推和修正方向正好相反, 前后向搜索同时进行前向和后向搜索, 具体内容可参考文献 [4].

3. 算法的优化实现

文献 [4] 给出了变尺度概率净化法的基本原理和实现方法, 但算法的计算量和所需内存都很大, 下面根据算法的特点提出几点优化措施.

3.1. 前向概率的递推估计

变尺度概率净化法的前向搜索需要计算每一时刻的 M 个最佳前向概率 $PF(S(k, j))$. 根据 (7) 式, 该最佳前向概率的搜索域是前一时刻的 M 个修正参考点, 因此它需要首先计算 M 个概率

$$P(k, j, j') = P(S(k, j) | S(k-1, j'))$$

$$\begin{aligned} & \times P(X(k-1) | S(k-1, j')) \\ & \times PF(S(k-1, j')). \end{aligned} \quad (9)$$

对于长度为 N 的轨道点列, 所有最佳前向概率需要计算 $(N-1)M^2$ 次 $P(k, j, j')$ 而得到. 如果没有关于噪声的足够先验知识, 则假定噪声重构轨道点集的概率分布为最不利的均匀分布, $P(X(k-1) | S(k-1, j'))$ 为常数, 因此略去该概率的计算. 于是(9)式简化为

$$\begin{aligned} P(k, j, j') = & P(S(k, j) | S(k-1, j')) \\ & \times PF(S(k-1, j')). \end{aligned} \quad (10)$$

最佳前向概率简化为

$$\begin{aligned} PF(S(k, j)) = & \max_{S(k-1, j')} \{P(S(k, j) | S(k-1, j')) \\ & \times PF(S(k-1, j'))\}, \\ & j, j' = 1, \dots, M; k = 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (11)$$

从(10)式来看, 概率 $P(k, j, j')$ 的计算主要是转移概率 $P(S(k, j) | S(k-1, j'))$ 的计算. 估计该转移概率的运算量较大, 其估计方法在下一节叙述. 为了改善算法的分离效果, 可以增大每个轨道点的修正参考点数 M . 但最佳前向概率的计算量会随着 M 的增大呈指数增长.

根据(11)式, 在 $k-1$ 时刻的各修正参考点 $S(k-1, j')$ 转移到 $S(k, j)$ 的概率 $P(S(k, j) | S(k-1, j'))$ 相差不是太大的情况下, 如果 $k-1$ 时刻的各修正参考点前向概率 $PF(S(k-1, j'))$ 较小, 可以略去 $k-1$ 时刻前向概率 $PF(S(k-1, j'))$ 较小的修正参考点转移到 $S(k, j)$ 的转移概率估计, 即如果 $PF(S(k-1, j')) < T$, 则略去 $P(S(k, j) | S(k-1, j'))$ 的估计. 其中 T 为一概率门限, $0 < T < 1$, 要根据每个时刻修正参考点数 M 来确定.

3.2. 转移概率的估计

(10)式中的转移概率为

$$\begin{aligned} & P(S(k, j) | S(k-1, j')) \\ & = \frac{P(S(k, j), S(k-1, j'))}{P(S(k-1, j'))}. \end{aligned} \quad (12)$$

概率密度 $P(S(k-1, j'))$ 可在参考序列的 d_E 维重构相空间中用核函数密度估计法^[4]得到, 而点 $S(k, j)$ 和点 $S(k-1, j')$ 的联合概率 $P(S(k, j), S(k-1, j'))$ 可在参考序列某个维度的重构相空间中用核函数密度法估计得到, 该维数 D_E 与时间序列的嵌入维数 d_E 和嵌入时延 τ 有关. 这里的核函数密度估计法核心思想如下: 假设相空间点 $X(k)$ 的 l 个近邻点为 $R(j), j = 1, 2, \dots, l$, 核函数密度估计法

估计点 $X(k)$ 的密度

$$\rho(X(k)) \propto \frac{1}{V} \sum_{j=1}^l K(R(j) - X(k)),$$

其中核函数一般取为指数函数,

$$K(x, y) = \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{\epsilon}\right),$$

参数 ϵ 需根据噪声的均方根值来确定.

假设某一段时间序列为 $\{x_n; n = 1, 2, 3, \dots\}$ 嵌入维数为 $d_E = 3$. 当时间序列的嵌入时延 $\tau = 1$ 时, 重构点列为 $\{(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}); k = 1, 2, 3, \dots\}$. 如果 $k-1$ 时刻修正轨道点坐标为 $S(k-1, j) = (x'_{k-1}, x'_{k-1}, x'_{k-1})$, k 时刻修正轨道点坐标应为 $S(k, j) = (x'_k, x'_{k+1}, x'_{k+2})$, 前点的后两维坐标与后点的前两维坐标一致, 则称这两点符合轨道点转移要求. 其联合概率 $P(S(k, j), S(k-1, j')) = P((x'_{k-1}, x'_k, x'_{k+1}, x'_{k+2}))$, 可在参考序列的 4 维重构相空间中用核函数密度法估计得到, $D_E = d_E + 1$. 如果前后两个修正轨道点不符合轨道点转移要求, 则视这两点的联合概率为 0.

当时间序列的嵌入时延 $\tau = 2$ 时, 重构点列为 $\{(x_k, x_{k+2}, x_{k+4}); k = 1, 2, 3, \dots\}$. 前后两点的坐标没有重叠部分, 前后两修正轨道点的联合概率 $P(S(k, j), S(k-1, j')) = P((x'_{k-1}, x'_k, x'_{k+1}, x'_{k+2}, x'_{k+3}, x'_{k+4}))$, 可在参考序列的 6 维重构相空间中用核函数密度法估计得到, $D_E = 2 \times d_E$.

当时间序列的嵌入时延 $\tau = 3$ 时, 重构点列为 $\{(x_k, x_{k+3}, x_{k+6}); k = 1, 2, 3, \dots\}$. 前后两修正轨道点的联合概率 $P(S(k, j), S(k-1, j')) = P((x'_{k-1}, x'_k, x'_{k+2}, x'_{k+3}, x'_{k+5}, x'_{k+6}))$, 可在参考序列的 6 维重构相空间中用核函数密度法估计得到, 即 $D_E = 2 \times d_E$. 但是 6 维重构相空间中的点的坐标应为 $(x_{k-1}, x_k, x_{k+2}, x_{k+3}, x_{k+5}, x_{k+6})$.

当时间序列的嵌入时延 $\tau > 3$ 时, 前后两修正轨道点的联合概率估计与 $\tau = 3$ 时类似. 当嵌入维不等于 3 时, 可类似地确定维数 D_E . 用核函数密度估计法来估计 D_E 维相空间中的轨道密度, D_E 越小, 计算量越小. 由上述分析可知, 当时延 $\tau = 1$ 时, D_E 比较小, 估计联合概率 $P(S(k, j), S(k-1, j'))$ 的计算量相应较小, 算法的运行效率可以提高.

3.3. 长时间序列概率净化的分段实现

下面以算法的前向搜索为例, 分析算法所需内存

大小与时间序列长度、离散划分数以及嵌入维数的关系. 假设每个时刻轨道点在每个维度上的离散划分数为 L , 则每个时刻离散修正轨道点数 $M = L^{d_E}$.

对于长度为 N 的轨道点列, 算法运行需存储的最佳前向概率值有 NM 个, 序号有 $M(N-1)$ 个. 如果存储 1 个概率值需 8 个字节, 存储 1 个序号需 1 个字节, 忽略算法正常运行所需的其它内存, 则所需内存峰值约为 $R = 8NM + (N-1)M = L^{d_E}(9N-1)$ 个字节, 与轨道点列长度 N 呈线性关系, 与离散划分数 L 和嵌入维数 d_E 呈指数关系. 表 1 是长度为 10000 的轨道点列概率净化在不同离散划分数和嵌入维数下所需内存大小.

表 1 算法所需内存大小

所需内存大小	嵌入维		
	3	4	5
划分数 3	2.3M	6.9M	21.0M
划分数 5	10.7M	53.6M	268.2M

从表 1 可以清楚地看到, 在离散划分数 L 和嵌入维数 d_E 较大情况下, 算法所需内存将非常大. 因此对于长时间序列的降噪, 在离散划分数 L 和嵌入维数 d_E 取定的情况下, 必须将轨道点列的修正分段处理, 将每段轨道点列的长度 N' 设定在较小的范围内, 使算法运行所需内存大小控制在正常运行的范围内. 但每段轨道点列的长度 N' 不能太小, 否则 (3) 式中段内轨道点联合条件概率的意义将淡化. 相邻段之间有一个轨道点重合, 这样后一段起始点各修正参考点的最佳前向概率就是前一段结束点相应修正参考点的最佳前向概率. 按时间顺序分段修正完

所有轨道点之后, 再将整个修正轨道还原成时间序列.

4. 实验验证

4.1. 优化算法与原算法性能比较

为了检验变尺度概率净化快速算法的有效性, 本文给出 Hénon 映像的时间序列降噪优化算法与原算法处理时间的对比.

Hénon 映像方程为

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = bx_n, \end{cases} \quad (13)$$

其中 $a = 1.4$, $b = 0.3$. 初始值 $x_0 = 0.5$, $y_0 = 0.5$. 做 5000 次迭代, 舍弃前 4000 次迭代值, 保留 x_n 最后 1000 次迭代值作为时间序列 $h(n)$. 然后在时间序列 $h(n)$ 中加入高斯白噪声, 得到信噪比为 16dB 的混沌时间序列 $h'(n)$. 另设初始值 $x_0 = 0.45$, $y_0 = 0.55$, 做 14000 次迭代, 同样舍弃前 4000 次迭代值, 保留 x_n 最后 10000 次的迭代值作为参考信号. 算法主要参数如下: 嵌入维 $d_E = 4$, 时延 $\tau = 1$. 原算法 30 轮降噪后的信噪比为 28.318dB, 主频为 2.4GHz 的 Pentium 4 处理器耗时约 10min 2s, 而优化算法 30 轮降噪后的信噪比为 28.337dB, 相同处理器耗时约 2min 43s, 约原算法的 0.27. 图 1 表示 Hénon 吸引子时间序列降噪前后二维重构相图的变化. 从图中可以看出, 与干净的 Hénon 吸引子相比, 净化后的 Hénon 吸引子基本上恢复了它的相空间结构.

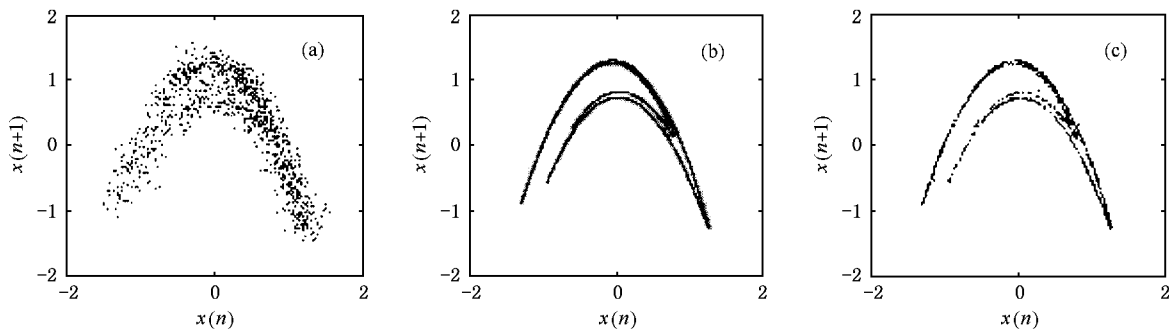


图 1 Hénon 吸引子时间序列二维重构相图 (a)受噪声污染的 Hénon 吸引子 (b)干净的 Hénon 吸引子 (c)净化后的 Hénon 吸引子

4.2. 算法分段实现结构性能分析

取与 4.1 节中相同信噪比的 Hénon 混沌时间序列. 算法主要参数如下: 嵌入维 $d_E = 4$, 时延 $\tau = 1$. 表 2 是在段长度 N' 取不同值时, 优化算法对 Hénon 混沌时间序列降噪后的信噪比.

从表中可以看出, 在段长度 $N' \geq 60$ 的情况下, 算法降噪性能并没有大的变化. 由于算法所需内存与段长度呈线性关系, 在段长度 N' 取为 60 时算法所需内存, 约为不分段算法(相当于段长度 N' 取为 1000)所需内存的 6%.

表 2 Hénon 混沌时间序列经分段实现算法降噪后的信噪比

段长度 N'	10	20	40	60	80
信噪比/dB	26.854	27.139	27.854	28.425	28.337
段长度 N'	100	200	400	1000	
信噪比/dB	28.322	28.443	28.347	28.337	

5. 结 论

变尺度概率净化法是一种混沌时间序列非线性降噪方法, 该方法根据混沌信号相空间轨道点密度分布的不变性, 以干净混沌信号相空间的局部概率密度为参考, 按最大后验概率准则对被噪声污染的混沌信号进行滤波, 降噪效果比较好. 但该方法的计算量和所需内存量会随着每个轨道点的修正参考点数和嵌入维数的增加而呈指数增长. 本文根据变尺度概率净化法的特点, 对前向概率和转移概率的估计方法作了一些改进, 使算法的运算量减小到原来的 0.27 左右, 并提出了数据较长情况下的算法实现结构, 从而大大降低了算法运行所需内存.

- [1] Gan J C and Xiao X C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1085 [甘建超, 肖先赐 2003 物理学报 **52** 1085]
- [2] Eckmann J P and Ruelle D 1985 *Rev. Mod. Phys.* **57** 617
- [3] Abarbanel H D I, Brown R and Kadtke J 1990 *Phys. Rev. A* **41** 1782
- [4] Marteau P F and Abarbanel H D I 1991 *Journal of Nonlinear Science* **1** 313

- [5] Cai Z M 2001 *The Study of Underwater Reverberation Modeling and Processing Based on Dynamical System* Ph. D. Dissertation of Harbin Engineering University [蔡志明 2001 海洋混响动力学建模及其处理研究 哈尔滨工程大学博士论文]

Optimization of scaled probabilistic cleaning methods^{*}

Jiang Ke-Yu[†] Cai Zhi-Ming

(*Electrical Engineering College , Navy Engineering University , Wuhan 430033 , China*)

(Received 10 August 2004 ; revised manuscript received 21 March 2005)

Abstract

The scaled probabilistic cleaning method is one of nonlinear noise reduction methods for chaotic time series , whose calculation quantity and needed memory volume increase exponentially with the number of reference points and the embedding dimension because of the joint processing of all data points in phase space. An optimized method , which modifies the estimation of forward probabilities and transition probabilities is proposed , and the computing workload is reduced to about 0.27 times that of the original method without degradation in noise reduction performance. The implementation of the method for the long time series also reduces the needed memory size.

Keywords : chaotic time series , noise reduction , maximum posteriori probability estimation , scaled probabilistic cleaning

PACC : 0545 , 0540

^{*} Project supported by the Major Fundamental Research Program for National Security of China (Grant No. 5132102ZZT32) , and the State Key Laboratory Program of China (Grant No. 514450801JB1101) .

[†] Corresponding author . E-mail : jiangky828@163.com