

有界随机噪声激励下软弹簧 Duffing 振子的安全盆分叉*

戎海武^{1)†} 王向东¹⁾ 徐伟²⁾ 方同²⁾

¹⁾ 佛山大学数学系, 佛山 528000)

²⁾ 西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2005 年 3 月 10 日收到, 2005 年 3 月 31 日收到修改稿)

研究了软弹簧 Duffing 振子在有界随机噪声激励下, 系统安全盆的侵蚀现象, 并提出了随机安全盆分叉的概念. 计算表明, 由于随机扰动的影响, 系统的随机安全盆分叉点发生了偏移.

关键词: Duffing 振子, 有界随机噪声, 安全盆, 分叉

PACC: 0547, 0500

1. 引 言

对于确定性系统, 所谓分叉是指一个动态系统随着某个参数的变化它的定性性质如稳定性、拓扑结构等发生变化. 所以对于确定性系统的分叉行为的有关研究, 主要是通过对系统的各种参数进行调节而得出的. 然而在实际中噪声的干扰总是不可避免的, 从系统的测试、数据的采集以及分析等各个方面得到的结果不可能都是规则、有序的, 所以研究噪声对于系统的影响、特别对于系统分叉的影响, 对今后的工程应用很有帮助. 关于随机分叉的研究尚处于起步阶段, 目前随机分叉的定义主要分为两大类, 一类是基于系统响应的稳态概率密度随系统参数的变化而突然发生变化, 例如从单峰突然变为双峰, 这类定义称为 P 分叉^[1]; 另一类是基于系统的最大 Lyapunov 指数随参数的符号变化给出的定义, 称为 D 分叉^[1]. 研究表明, 这两类定义给出的结果并不完全一致. Baxendale^[2]给出了一个例子, 当系统的最大 Lyapunov 指数随参数的变化而发生符号变化时, 系统的稳态概率密度的形状并不依赖分叉参数发生变化. 另一方面, Crauel 和 Flandolf^[3]给出了一个相反的例子, 当系统的稳态概率密度由单峰变为双峰时, 系统的最大 Lyapunov 指数的符号没有发生

改变. 综上所述, 对于随机分叉的讨论仍然存在许多困难和问题, 要同时体现系统的拓扑特性和系统的随机特征, 是随机分叉定义的中心问题. 我们认为, 随机分叉定义的关键是如何表征随机系统的拓扑特性, 找到随机系统合适的不变量. 在最近的一些工作中^[4-8], 作者们提出以系统的随机吸引子(包括随机鞍)的形态(包括大小、尺寸、周期等)的突然变化表征随机系统的拓扑性质变化, 用来描述随机系统的分叉. 从工程应用的角度来说, 实际考虑的问题并非仅仅为吸引子、平衡点、周期解、分叉和混沌等, 有时更为重要的是振动的有界性问题. 若质点的运动振幅超过一定限度, 往往会导致结构的破坏, 由此产生对安全盆的研究^[9, 10], 但这些研究都没有考虑随机噪声的影响. 本文研究了软弹簧 Duffing 振子在有界随机噪声激励下, 系统安全盆的侵蚀现象, 并提出了随机安全盆分叉的概念. 计算表明, 由于随机扰动的影响, 系统的随机安全盆分叉点发生了偏移.

2. 确定性系统的安全盆分叉

考虑如下受周期性外力作用下的软弹簧振子

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + x - \alpha x^3 = f \cos \Omega t, \quad (1)$$

式中 $\mu > 0$ 为系统的阻尼系数, $\alpha > 0$ 为系统的非线性强度, $f, \Omega > 0$ 分别为周期性外力的振幅和频率

* 国家自然科学基金(批准号: 10332030, 10472091)和广东省自然科学基金(批准号: 04011640)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: ronghw@foshan.net

(归一化).

软弹簧振子是一个典型的非线性系统,核物理、流体力学和燃烧力学等的许多现象可以用它来描述.所谓一个系统的安全盆,可以由相空间的一个有界区域 D 来定义,使得从安全盆内部出发的轨线当时间趋于无穷大时仍在该有界区域 D 内运动.换句话说,在安全盆以外出发的轨线运动将逃逸出区域 D ,它们是不安全的,将导致系统的破坏或崩溃.安全盆的结构与某些吸引子的吸引盆的结构类似^[11],当系统参数发生变化时,安全盆的面积和形状也将发生改变.

首先研究当 Ω 变化时,系统(1)安全盆的变化

情况.在数值计算中,取系统参数为 $\mu = 1.0, \alpha = 1.0, f = 0.5$,且在系统响应的相空间中选取一个充分大的有界区域:

$$D = \{(x, \dot{x}) : -4 \leq x \leq 4, -4 \leq \dot{x} \leq 4\},$$

并把此区域分成 200×200 个小格子,将格点作为系统解的初始值.当系统通过这些初始值的解在足够长的时间如 5000 个时间单位内逃逸出区域 D ,则认为此解是不安全的;如果没有逃逸出区域 D ,则近似地认为它是安全、有界的解.对于不同的 Ω ,系统(1)安全盆变化情况见图 1(a)–(e).图中的阴影部分代表导致系统安全解的初始值组成的部分,而空白部分则代表导致系统不安全解的初始值组成的部分.

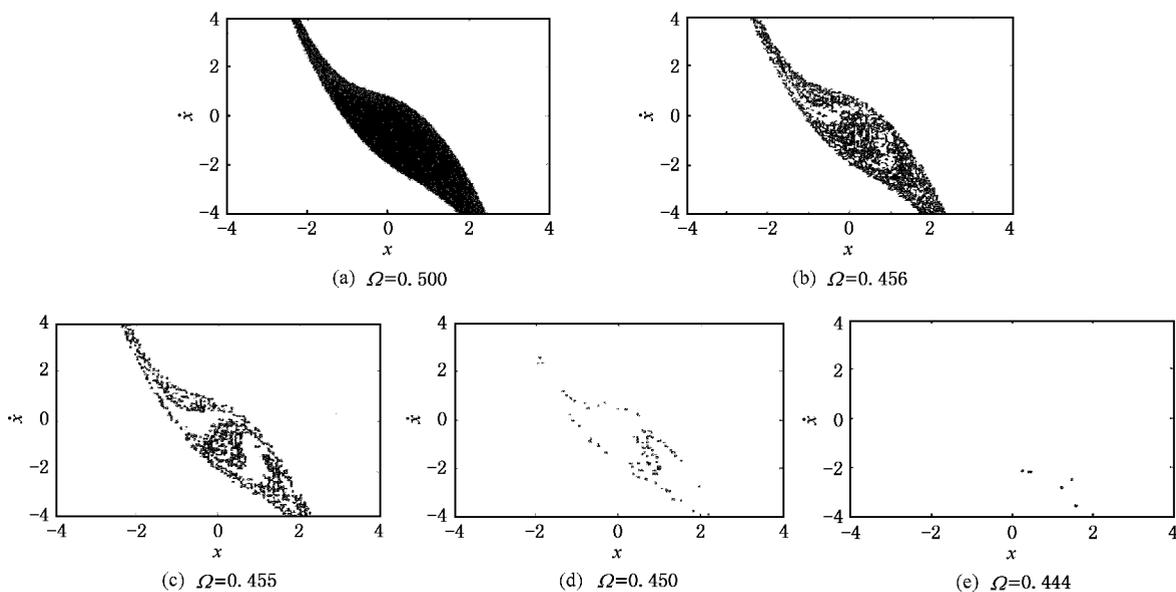


图 1 系统(1)的安全盆侵蚀 \dot{x} 表示位移,下同

图 1(a)是一个完整的安全盆图形,而图 1(b)–(e)则是受到侵蚀后的安全盆.计算表明,当 $\Omega \geq \Omega_1 = 0.457$ 时,系统的安全盆没有受到任何侵蚀,形状如图 1(a)所示;当 $\Omega < \Omega_1$ 时,随着 Ω 的逐渐减小,安全盆被慢慢侵蚀,且将导致安全盆边界的分形形状(图 1(b)(c))及完全侵蚀(图 1(d)(e));当 $\Omega < \Omega_2 = 0.440$ 时,安全盆为一片空白,即对任何初始值系统解都是不安全的.如果将安全盆的突变现象(从完整的安全盆到被侵蚀、直至完全消失)看作为一种分叉现象,将 Ω 作为分叉参数,则

$$\Omega_1 = 0.457, \Omega_2 = 0.440$$

是系统(1)的两个安全盆分叉点. Ω_1 是安全盆侵蚀的起始点,而 Ω_2 是安全盆消失的起始点.即当 $\Omega \geq \Omega_1$ 时,系统的安全盆没有任何侵蚀;当 $\Omega_2 \leq \Omega <$

Ω_1 时,安全盆被慢慢侵蚀;当 $\Omega < \Omega_2$ 时,安全盆完全消失.

3. 随机安全盆分叉

下面考虑随机因素对安全盆的影响,此时系统(1)变为

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + x - \alpha x^3 = \xi(t), \quad (2)$$

式中 $\xi(t)$ 是随机噪声项,本文采用如下的模型

$$\xi(t) = f \cos \varphi(t), \dot{\varphi} = \Omega + \gamma W(t), \quad (3)$$

式中 $f > 0$ 为随机激励的强度, Ω 为随机激励的中心频率, $W(t)$ 为标准 Wiener 过程, $\gamma \geq 0$ 为随机扰动的强度.

比较 1)(2)和(3)式可知,系统(1)是受确定性

周期外力作用的系统,系统(2)可以看作系统(1)的周期性外力中的角频率 Ω 受到了强度为 γ 的白噪声 $\dot{W}(t)$ 扰动. 由 Wedig^[11] 可知 $\xi(t)$ 功率谱密度为

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{f^2 \gamma^2 (\Omega^2 + \omega^2 + \gamma^4/4)}{(\Omega^2 - \omega^2 + \gamma^4/4)^2 + \omega^2 \gamma^4}. \quad (4)$$

当 $\gamma \rightarrow 0$ 时, $S_{\xi}(\omega)$ 在 $\omega = \pm \Omega$ 处取值为无穷大而在其他处的值趋于零,这是一种典型的窄带噪声的功率谱密度;当 $f = \gamma/\sqrt{2} \rightarrow \infty$ 时, $S_{\xi}(\omega)$ 趋于常数 1,为白噪声(典型的宽带噪声)的功率谱密度. 由于 $|\xi(t)| \leq f$, 故 $\xi(t)$ 是一种有界随机噪声. 本文研

究随机扰动强度 γ 较小时的情形,为与确定性系统(1)进行比较,在系统(2)中,仍取系统参数为

$$\mu = 1.0, \alpha = 1.0, f = 0.5, \gamma = 0.01.$$

在模拟随机过程 $\xi(t)$ 时,采用蒙特卡罗^[12]方法,限于计算量本文仅取 10 个样本. 有关安全解的定义同上所述,如果在这 10 个样本点中,初始点出发的解都是安全解,则称此初始点为安全初始点,所有的安全初始点组成了系统(2)的随机安全盆. 对于不同的 Ω ,系统(2)随机安全盆变化情况见图 2(a)–(f).

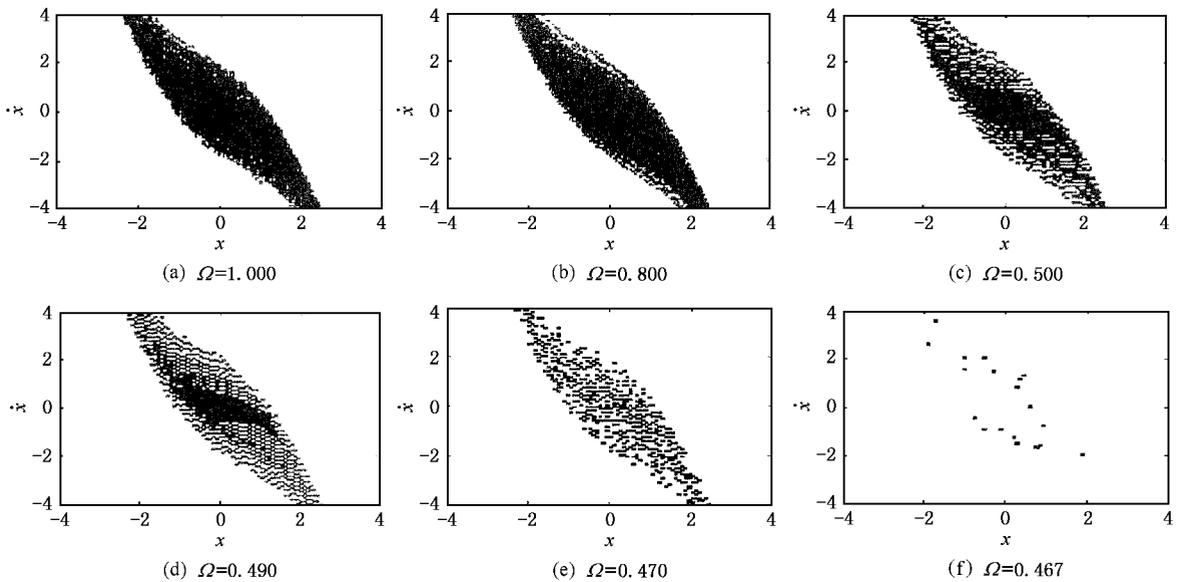


图 2 系统(2)的安全盆侵蚀

从图 2(a)–(f)可见,随着 Ω 的逐渐减小,安全盆被慢慢侵蚀,这与确定性系统(1)中的安全盆侵蚀现象(见图 1)类似. 与图 1 不同的是,由于随机扰动的影响,系统(2)没有完整的安全盆,即使对于很大的 Ω ,系统(2)安全盆的边界是不完整的(见图 2(a)). 大量的计算表明,对于较大的 Ω ,即使安全盆的内部是完整的,其边界也受到一定程度的侵蚀,即随机扰动使得确定性系统(1)中的第一个安全盆分叉点 Ω_1 消失了,夸张一点说,随机扰动使得 Ω_1 从 0.457 偏移到 $+\infty$. 计算表明当 $\Omega < \Omega_2 = 0.464$ 时,系统(2)的安全盆完全消失. 不妨称系统(2)的安全盆从有到无这种突变现象为随机安全盆分叉现象,则 $\Omega_2 = 0.464$ 是系统(2)的随机安全盆分叉点. 与确定性系统(1)相比较,随机扰动使得 Ω_2 从 0.440 偏移到 0.464.

综上所述,随机扰动使得系统安全盆分叉提前

发生,安全盆区域变小,使得系统变得不安全.

4. 结论与讨论

本文提出了随机安全盆分叉概念,研究了软弹簧 Duffing 振子在周期性外力和有界随机噪声作用下系统的安全盆的侵蚀现象,结果表明随机扰动使得系统安全盆分叉提前发生,安全盆区域变小,使得系统变得不安全. 进一步的工作可研究系统的其他参数如 μ, α, f, γ 对安全盆的影响,可将这些参数作为分叉参数,研究相应的随机安全盆分叉,也可以研究随机安全盆分叉与前面提到的 P 分叉和 D 分叉之间的关系. 我们认为,随机安全盆的突变可以作为系统随机分叉的一种新的定义. 随机分叉的相关研究还可见文献 [13–15].

- [1] Arnold L 1998 *Random Dynamical Systems* (New York , Berlin : Berlin Heidelberg) p1
- [2] Baxendale P 1986 *Stochastic Processes and Their Applications* In : eds. Ito K and Hida T (LN : Mathematics) p1
- [3] Crauel H and Flandoli F 1998 *Journal of Dynamics and Differential Equations* **10** 259
- [4] Xu W , He Q , Fang T *et al* 2003 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **10** 3115
- [5] Xu W , He Q , Fang T *et al* 2004 *International Journal of Non-Linear Mechanics* **9** 1473
- [6] Xu W , He Q , Rong H W *et al* 2003 *Acta . Phys . Sin .* **52** 1365 (in Chinese)[徐 伟、贺 群、戎海武等 2003 物理学报 **52** 1365]
- [7] Xu W , He Q , Rong H W *et al* 2004 *Physica A-statistical and Its Applications* **338** 319
- [8] Xu W , He Q , Fang T *et al* 2005 *Chaos Solitons and Fractals* **23** 141
- [9] Nayfeh A H and Sanchez N E 1989 *International Journal of Non-Linear Mechanics* **24** 483
- [10] Soliman M S 1995 *Journal of Sound and Vibration* **182** 729
- [11] Wedig W V 1990 *Structural Safety* **8** 13
- [12] Zhu W Q 1992 *Random Vibration* (Beijing : Science Press) (in Chinese)[朱位秋 1992 随机振动 北京 科学出版社]
- [13] Xiong J J , Gao Z T , Liu X B *et al* 2000 *Acta . Phys . Sin .* **49** 49 (in Chinese)[熊峻江、高镇同、刘先斌等 2000 物理学报 **49** 49]
- [14] Zhu W Q , Lu M Q and Wu Q T 1993 *Journal of Sound and Vibration* **165** 285
- [15] Xiao F H , Yan G R and Zhang X W 2003 *Chin . Phys .* **12** 946

Bifurcation of safe basins in softening duffing oscillator under bounded noise excitation *

Rong Hai-Wu^{1)†} Wang Xiang-Dong¹⁾ Xu Wei²⁾ Fang Tong²⁾

¹⁾ (Department of Mathematics , Foshan University , Guangdong 528000 , China)

²⁾ (Department of Mathematics , Northwestern Polytechnical University , Xi ' an 710072 , China)

(Received 10 March 2005 ; revised manuscript received 31 March 2005)

Abstract

The erosion of the safe basins of a softening Duffing oscillator under harmonic or bounded random noise is studied in detail using the Monte-Carlo method. As an alternative , stochastic bifurcation may be defined as a sudden change in the character of the stochastic safe basin when the bifurcation parameter of the system passes through a critical value. This definition applies equally well either to randomly perturbed motion , or to purely deterministic motion. It is found that random noise may destroy the integrity of safe basins and bring about stochastic bifurcation , hence make the system more unsafe.

Keywords : softening Duffing oscillator , bounded random noise , safe basins , stochastic bifurcation

PACC : 0547 , 0500

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10332030 and 10472091) and the Natural Science Foundation of Guangdong Province , China (Grant No. 04011640).

† Corresponding author. E-mail : ronghw@foshan.net