第 54 卷 第 11 期 2005 年 11 月
1000-3290/2005/54(11)/4985-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.11, November, 2005

完整力学系统的 Lie-形式不变性*

葛伟宽[1)] 张 毅[2)]

[1)](湖州师范学院物理系,湖州 313000)

[2)](苏州科技学院土木工程系,苏州 215011)

(2005 年 4 月 13 日收到;2005 年 5 月 16 日收到修改稿)

研究完整力学系统 Lie-形式不变性的定义与判据,给出由 Lie-形式不变性导出的 Noether 守恒量,Hojman 守恒量和 Lutzky 守恒量. 举例说明结果的应用.

关键词:完整系统,Lie-形式不变性,Noether 守恒量,Hojman 守恒量,Lutzky 守恒量

PACC:0320

1. 引 言

Einstein 广义相对论指出,时空性质决定物质运动. 由此,Noether 得到时空 Noether 对称性与运动常量之间的关系[1]. 从那时起,对称性的重要性越来越为人们所了解. 科学工作者总希望找到所有类型的对称性以便了解世界的变化[2]. Noether 对称性与 Noether 守恒量的研究已经日趋完善[2—11]. Lie 对称性与 Noether 守恒量和 Hojman 守恒量的研究已取得重要进展[10—21]. 本文研究完整力学系统的 Lie-形式不变性的定义,判据以及由这种对称性导出的 Noether 守恒量,Hojman 守恒量和 Lutzky 守恒量.

2. 系统的 Lie-形式不变性

完整力学系统的运动微分方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s \qquad (s=1,\cdots,n), \tag{1}$$

其中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为系统的 Lagrange 函数,$Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力. 设系统(1)非奇异,则由方程(1)可解出所有广义加速度,记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s=1,\cdots,n). \tag{2}$$

方程(2)Lie 对称性的确定方程为

$$\ddot{\xi}_s-2\alpha_s\dot{\xi}_0-\dot{q}_s\ddot{\xi}_0=X^{(1)}(\alpha_s), \tag{3}$$

其中 $\xi_0=\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 和 $\xi_s=\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 分别为时间和坐标的无限小生成元.

方程(1)形式不变性的判据方程为

$$E_s\{X^{(1)}(L)\}=X^{(1)}(Q_s), \tag{4}$$

其中

$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{5}$$

完整力学系统的 Lie 对称性为形式不变性的充分必要条件为[22]

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial L}{\partial t}\right)-\frac{\partial \xi_0}{\partial q_s}\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)\\&-\frac{\partial \xi_k}{\partial q_s}\frac{\partial L}{\partial q_k}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \dot{\xi}_k}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial \dot{\xi}_k}{\partial q_s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\\&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \dot{\xi}_0}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)+\frac{\partial \dot{\xi}_0}{\partial q_s}\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\ddot{\xi}_0\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\\&=0.\end{aligned} \tag{6}$$

如果变换的生成元不依赖于广义速度,即

$$\xi_0=\xi_0(t,\boldsymbol{q}), \quad \xi_s=\xi_s(t,\boldsymbol{q}), \tag{7}$$

则(6)式成为

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial q_s}\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial \xi_0}{\partial q_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)+\ddot{\xi}_0\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}=0. \tag{8}$$

进而,如果

$$\xi_0=C_1+C_2t, \quad \xi_s=\xi_s(t,\boldsymbol{q}), \tag{9}$$

则 Lie 对称性必为形式不变性,而形式不变性必为 Lie 对称性.

* 国家自然科学基金(批准号:10272021)资助的课题.

定义 完整力学系统的 Lie-形式不变性是指这种对称性既是 Lie 的,又是形式不变性的.

判据 1)如果生成元 ξ_0,ξ_s 满足方程(3)和(4),则对称性是 Lie-形式不变性的;2)如果生成元 ξ_0,ξ_s 满足方程(3)和条件(6),则对称性是 Lie-形式不变性的;3)如果生成元 ξ_0,ξ_s 满足方程(4)和条件(6),则对称性是 Lie-形式不变性的.

3. Lie-形式不变性导致的 Noether 守恒量

如果系统 Lie-形式不变性的生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_N=0,\tag{10}$$

则 Lie-形式不变性导致 Noether 守恒量,即

$$I_{\mathrm{N}}=L\xi_0+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_N=\text{const}.\tag{11}$$

4. Lie-形式不变性导致的 Hojman 守恒量

在时间不变的无限小变换下,即 $\xi_0=0$ 时,(6)式成为

$$\begin{aligned}&\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\xi_k}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)-\frac{\partial\xi_k}{\partial q_s}\frac{\partial L}{\partial q_k}\\&+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k\right)\cdot\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right\}\\&-\frac{\partial}{\partial q_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k\right)\cdot\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}=0,\end{aligned}\tag{12}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\alpha_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}.\tag{13}$$

而 Lie 对称性的确定方程(3)成为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s=\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k+\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k.\tag{14}$$

如果无限小生成元 ξ_s 满足(12),(14)式,且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得

$$\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0,\tag{15}$$

则 Lie-形式不变性导致 Hojman 守恒量,即

$$I_{\mathrm{H}}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right)=\text{const}.\tag{16}$$

5. Lie-形式不变性导致的 Lutzky 守恒量

如果生成元 $\xi_0=\xi_0(t,\boldsymbol{q}),\xi_s=\xi_s(t,\boldsymbol{q})$ 满足(3)式和(8)式,则 Lie 形式不变性导致如下的 Lutzky 守恒量

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{L}}=&2\left(\frac{\partial\xi_s}{\partial q_s}-\dot{q}_s\frac{\partial\xi_0}{\partial q_s}\right)-n\dot{\xi}_0\\&-X^{(1)}(\ln D)-X^{(1)}(f),\end{aligned}\tag{17}$$

其中

$$D=\det\left(\frac{\partial^2L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\right),\tag{18}$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left(\frac{M_{sk}}{D}Q_s\right).\tag{19}$$

这里 M_{sk} 为 D 的代数余子式. 由 Lie 对称性导致的守恒量(17)式已经由文献[23]给出.

6. 算 例

研究 Whittaker 方程[24]

$$\ddot{q}_1=q_1,\quad\ddot{q}_2=\dot{q}_1\tag{20}$$

的 Lie-形式不变性及其导致的守恒量.

取生成元为

$$\xi_0=\xi_0(t,q_1,q_2),\quad\xi_1=\xi_1(t,q_1,q_2),\quad\xi_2=\xi_2(t,q_1,q_2),\tag{21}$$

Lie 对称性的确定方程(3)给出

$$\begin{aligned}&\ddot{\xi}_1-2q_1\dot{\xi}_0-\dot{q}_1\ddot{\xi}_0=\xi_1,\\&\ddot{\xi}_2-2\dot{q}_2\dot{\xi}_0-\dot{q}_2\ddot{\xi}_0=\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0.\end{aligned}\tag{22}$$

将(21)式代入(22)式,分出自由项,含 $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_1^2,\dot{q}_1\dot{q}_2,\dot{q}_2^2,\dot{q}_1^3,\dot{q}_1^2\dot{q}_2,\dot{q}_2\dot{q}_2^2,\dot{q}_2^3$ 各项,得到下列偏微分方程

$$\begin{aligned}&\xi_{1tt}+\xi_{1q_1}q_1-2q_1\xi_{0t}=\xi_1,\\&2\xi_{1tq_1}-\xi_{1q_2}-2q_1\xi_{0q_1}-\xi_{0tt}-\xi_{0q_1}q_1=0,\\&2\xi_{1tq_2}-2q_1\xi_{0q_2}=0,\ \xi_{1q_1q_1}-2q_1\xi_{0tq_1}=0,\\&2\xi_{q_1q_2}-2\xi_{0tq_2}=0,\xi_{1q_2q_2}=0,\\&\xi_{0q_1q_1}=0,\xi_{0q_1q_2}=0,\xi_{0q_2q_2}=0,\\&\xi_{2tt}+\xi_{2q_1}q_1=\xi_{1t},2\xi_{2tq_1}+\xi_{2q_2}-\xi_{0t}=\xi_{1q_1},\\&2\xi_{2tq_2}-\xi_{0tt}=\xi_{1q_2},\xi_{2q_1q_1}-\xi_{0q_1}=0,\\&2\xi_{2q_1q_2}-\xi_{0q_2}-2\xi_{0tq_1}=0,\xi_{2q_1q_2}-2\xi_{0tq_2}=0.\end{aligned}$$

解这些方程,可找到如下解:

$$\xi_0 = C_1, \xi_1 = C_2 \exp t + C_3 \exp(-t),$$
$$\xi_2 = C_2 \exp t - C_3 \exp(-t) + C_4 t + C_5, \tag{23}$$

其中 C_1, C_2, C_3, C_4 和 C_5 为常数．它有形式(9)，因此也是形式不变性的．将(23)式代入(17)式，仅能得到平凡的 Lutzky 守恒量．

取生成元

$$\xi_0 = \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 1, \tag{24}$$

它是 Lie 形式不变性的．将(24)式代入结构方程(10)，求得

$$G_N = -q_1. \tag{25}$$

Noether 守恒量(11)式给出

$$I_N = \dot{q}_2 - q_1 = \text{const}. \tag{26}$$

(15)式给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\ln\mu = 0, \tag{27}$$

它有如下解：

$$\mu = 1, \tag{28}$$
$$\mu = \dot{q}_2 - q_1, \tag{29}$$
$$\mu = (q_1 - \dot{q}_1)\exp t, \tag{30}$$
$$\mu = (q_1 + \dot{q}_1)\exp(-t). \tag{31}$$

方程(14)给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1 = \xi_1, \quad \frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2 = \frac{\bar{d}}{dt}\xi_1, \tag{32}$$

它有解

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = t, \tag{33}$$

它是 Lie-形式不变性的．由(29)，(33)式，利用(16)式，得 Hojman 守恒量

$$I_H = (\dot{q}_2 - q_1)^{-1} = \text{const}. \tag{34}$$

取生成元

$$\xi_1 = \xi_2 = \exp t, \tag{35}$$

它是 Lie 形式不变性的．由(31)，(35)式，利用(16)式，得 Hojman 守恒量

$$I_H = 2(q_1 + \dot{q}_1)^{-1}\exp t = \text{const}. \tag{36}$$

7．结　论

本文研究了完整力学系统的 Lie 形式不变性，这种不变性既是 Lie 对称性，又是形式不变性．由这种对称性可以找到 Noether 守恒量，Hojman 守恒量和 Lutzky 守恒量．本文结果有可能推广到其他类型的约束力学系统．

[1] Noether E 1918 *Nachr Akad Wiss Göttingen Math. Phys.* **KI** 235

[2] Mei F X and Zheng G H 2002 *Acta Mechanica Sinica* **18** 414

[3] Djukić Dj S and Vujanović B 1975 *Acta Mechanica* **23** 17

[4] Li Z P 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 1659 (in Chinese) [李子平 1981 物理学报 **30** 1659]

[5] Liu D 1991 *Science in China* **34** 419

[6] Bahar L Y and Kwatny H G 1987 *Int. J. Non-Linear Mech.* **22** 125

[7] Mei F X 1993 *Science in China* **36** 1456

[8] Mei F X 2000 *Appl Mech. Rev.* **53** 283

[9] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmertrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京:北京工业大学出版社)]

[10] Zhao Y Y and Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量(北京:科学出版社)]

[11] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京：科学出版社)]

[12] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** 973

[13] Zhao Y Y 1994 *Acta Mechanica Sinica* **26** 380 (in Chinese) [赵跃宇 1994 力学学报 **26** 380]

[14] Mei F X, Wu R H and Zhang Y F 1998 *Acta Mechanics Sinica* **30** 468 (in Chinese) [梅凤翔、吴润衡、张永发 1998 力学学报 **30** 468]

[15] Mei F X 1999 *Chinese Science Bulletin* **44** 318

[16] Mei F X 2000 *Acta Mechanics* **141** 135

[17] Hojman S A 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** L291

[18] Luo S K and Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 666 (in Chinese) [罗绍凯、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 666]

[19] Fu J L and Chen L Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 695

[20] Luo S K and Cai J L 2003 *Chin. Phys.* **12** 357

[21] Xu X J, Mei F X and Qin M C 2004 *Chin. Phys.* **13** 1999

[22] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京:北京理工大学出版社)]

[23] Fu J L and Chen L Q 2003 *Phys. Lett.* A **317** 255

[24] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics* Ⅱ (New York: Springer-Verlag)

Lie-form invariance of holonomic mechanical systems*

Ge Wei-Kuan[1)] Zhang Yi[2)]

[1)] (*Department of Physics, Huzhou Teachers College, Huzhou* 313000, *China*)

[2)] (*Department of Civil Engineering, University of Science and Technology of Suzhou, Suzhou* 215011, *China*)

(Received 13 April 2005; revised manuscript received 16 May 2005)

Abstract

This paper presents the definition and criterion for holonomic mechanical systems. The Noether conserved quantity, the Hojman conserved quantity and the Lutzky conserved quantity deduced by the Lie-form invariance are obtained. An example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: holonomic systems, Lie-form invariance, Noether conserved quantity, Hojman conserved quantity, Lutzky conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10272021).