

黏性介质中圆截面弹性细杆的平面振动*

刘延柱†

(上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

(2005 年 3 月 10 日收到, 2005 年 4 月 26 日收到修改稿)

讨论圆截面弹性细杆在黏性介质中的平面振动. 基于 Kirchhoff 理论, 以杆中心线的 Frenet 坐标系为参考系, 建立其动力学方程. 杆中心线为任意平面曲线时, 其扭转振动与弯曲振动解耦. 讨论两端固定条件下任意形状杆的平面扭转振动, 以及无扭转的轴向受压直杆和圆环杆的平面弯曲振动, 导出其自由振动频率和阻尼系数. 证明空间域内压杆的 Lyapunov 稳定性和欧拉稳定性条件为时域内渐近稳定性的充分必要条件, 或无阻尼压杆的稳定性必要条件. 圆环杆平衡恒满足渐近稳定性条件.

关键词: 弹性细杆, 黏性介质, 扭转振动, 弯曲振动

PACC: 0320, 0340D

1. 引言

弹性细杆力学问题的研究由于其分子生物学背景而重新引起重视^[1]. 基于 Kirchhoff 动力学比拟的弹性杆静力学理论已充分发展, 动力学问题成为新的研究热点^[2-7]. 以 DNA 为背景研究弹性杆的运动时必须考虑黏性介质的存在^[8-10]. 本文以杆中心线的 Frenet 坐标系为参考系, 建立黏性介质中圆截面弹性杆平面运动的动力学方程. 中心线为任意平面曲线时, 其扭转振动与弯曲振动解耦. 讨论黏性介质中两端固定条件下任意形状圆截面杆的平面扭转振动, 以及无扭转的轴向受压直杆和圆环杆的平面弯曲振动, 导出其自由振动频率和阻尼系数. 证明空间域内压杆的 Lyapunov 稳定性和欧拉稳定性条件为时域内渐近稳定性的充分必要条件, 或无阻尼压杆的稳定性必要条件. 圆环杆平衡恒满足渐近稳定性条件.

2. 运动学方程

讨论圆截面弹性杆在黏性介质中的运动. 满足 Kirchhoff 动力学比拟的以下限制条件: 杆截面为与

中心线正交的刚性平面, 杆的长度和曲率半径远大于截面尺度, 无原始曲率和扭率, 杆为均匀各向同性, 满足线性本构关系, 忽略体积力. 沿杆截面几何中心连成的中心线 C 以端点 P_0 为原点建立弧坐标 s , 以确定中心线上任意点 P 的位置. 以 P 为原点, 建立曲线的 Frenet 坐标系 ($P-NBT$) 和截面的主轴坐标系 ($P-xyz$), 其中 T 轴为曲线 C 的切线轴, 与 z 轴重合, N 轴和 B 轴分别为曲线 C 的法线轴和副法线轴. 截面相对 Frenet 坐标系的扭角, 即 x 轴与 N 轴, y 轴与 B 轴的夹角为 χ . 设 ω_F 和 Ω_F 分别为 Frenet 坐标系的无限小角位移对弧坐标或时间的变化率, e_3 为切线轴基矢量, 定义杆的弯扭度 $\omega = \omega_F + (\partial\chi/\partial s)e_3$, 截面角速度 $\Omega = \Omega_F + (\partial\chi/\partial t)e_3$. 圆截面杆的 Frenet 坐标系 ($P-NBT$) 为截面的主轴坐标系. 以 ($P-NBT$) 为参考系, ω_F 与 Ω_F 之间, P 点的速度 v 与切线轴基矢量 e_3 之间有以下运动学关系^[4]:

$$\frac{\tilde{\partial}\omega_F}{\partial t} = \frac{\tilde{\partial}\Omega_F}{\partial s} + \omega_F \times \Omega_F, \quad (1)$$

$$\frac{\tilde{\partial}v}{\partial s} + \omega_F \times v = \Omega \times e_3, \quad (2)$$

其中波浪号为相对 ($P-NBT$) 的局部导数.

* 国家自然科学基金(批准号:10472067)资助的课题.

† E-mail: liuyzhe@online.sh.cn

3. 黏性介质中圆截面杆的动力学方程

利用动量定理和对质心的动量矩定理, 列写 P 点处的杆微元体的动力学方程^[5], 得到

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega}_F \times \mathbf{F} + \mathbf{f} - \rho S \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}_F \times \mathbf{v} \right) = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega}_F \times \mathbf{M} + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{F} + \mathbf{m} \\ & - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega}_F \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) = 0, \quad (4) \end{aligned}$$

其中 \mathbf{F} , \mathbf{M} 为截面内力的主矢和主矩, ρ , S , \mathbf{J} 为杆的密度、截面积和单位长度的惯量张量, \mathbf{f} 和 \mathbf{m} 为单位长度介质的黏性阻力和阻力矩. 以下标 1, 2, 3 表示 \mathbf{F} , \mathbf{M} , $\boldsymbol{\omega}_F$, $\boldsymbol{\Omega}_F$, \mathbf{v} , \mathbf{f} , \mathbf{m} 等矢量在 $(P-NBT)$ 中的投影以及张量 \mathbf{J} 的对角线元素, 其中 $\omega_{F1} = 0$, ω_{F2} , ω_{F3} 分别为杆的曲率 κ 和挠率 τ , $\omega_3 = \tau + \partial\chi/\partial s$ 为杆的扭率. 主矩与曲率和扭率之间满足线性本构关系

$$M_1 = 0, M_2 = A\kappa, M_3 = C\omega_3, \quad (5)$$

其中 $A = EI$, $C = GI_0$ 为杆的抗弯和抗扭刚度, E , G 分别为杆的杨氏模量和剪切模量, I , I_0 为截面的惯性矩和极惯性矩, 且有 $J_1 = J_2 = \rho I$, $J_3 = \rho I_0$. 杆作缓慢运动时, 黏性阻力 \mathbf{f} 和黏性阻力矩 \mathbf{m} 按以下公式计算:

$$\mathbf{f} = -c_1 v_1 - c_3 v_3, \mathbf{m} = -c_0 \boldsymbol{\Omega}_3, \quad (6)$$

其中 v_1 , v_3 分别为 P 点的速度 v 沿截面径向及向中心线切向的速度分量, $\boldsymbol{\Omega}_3$ 为杆的切向角速度, c_1 , c_3 为径向和切向介质阻力系数, c_0 为介质阻尼力矩系数. 杆长 L 远大于截面半径 a 时, 各阻尼系数的近似计算公式为^[10, 11]

$$c_1 \approx 2c_3 \approx 4\pi\mu/\ln(L/a), \quad c_0 \approx 4\pi\mu a^2, \quad (7)$$

其中 L , a 为杆的长度和截面半径, μ 为介质黏度.

(6) 式在 $(P-NBT)$ 中的投影为

$$\begin{aligned} f_1 &= -c_1 v_1, f_2 = -c_1 v_2, f_3 = -c_3 v_3, \\ m_1 &= m_2 = 0, m_3 = -c_0 \Omega_3. \end{aligned} \quad (8)$$

将 (5) (8) 式代入矢量方程 (1) 至 (4) 在 $(P-NBT)$ 中的投影式, 得到黏性介质中圆截面杆的动力学方程组, 可确定 12 个未知变量 F_i , v_i ($i = 1, 2, 3$), κ , τ , χ , Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 .

设圆截面杆的中心线为任意平面曲线, 且保持在 (ξ, ζ) 平面内运动. 杆的副法线轴 B 与运动平面

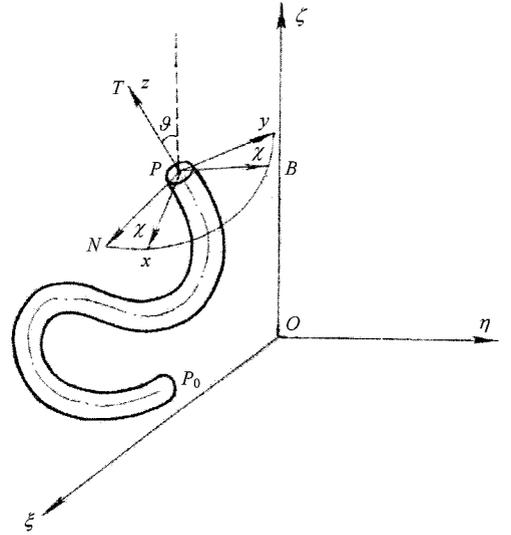


图 1 弹性杆平面运动的参考坐标系

的法线轴 η 平行, Frenet 坐标系绕法线轴和切线轴无转动 (图 1). 以杆的切线轴 T 相对 ζ 轴的倾角 ϑ 和相对扭角 χ 确定截面的姿态, 则有

$$\begin{aligned} \omega_{F1} &= \omega_1 = 0, \omega_{F2} = \omega_2 = \kappa = \partial\vartheta/\partial s, \\ \omega_{F3} &= \tau = 0, \omega_3 = \partial\chi/\partial s, \\ \Omega_1 &= 0, \Omega_2 = \partial\vartheta/\partial t, \Omega_{F3} = 0, \\ \Omega_3 &= \partial\chi/\partial t, v_2 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

导出除恒等式以外的圆截面杆在黏性介质中的平面运动方程组

$$\frac{\partial v_1}{\partial s} + v_3 \frac{\partial \vartheta}{\partial s} - \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0, \quad (10a)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial s} - v_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial s} = 0, \quad (10b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial s} + F_3 \frac{\partial \vartheta}{\partial s} - \rho S \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_3 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right) - c_1 v_1 \\ = 0, \end{aligned} \quad (10c)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial s} = 0, \quad (10d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_3}{\partial s} - F_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial s} - \rho S \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} - v_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right) - c_3 v_3 \\ = 0, \end{aligned} \quad (10e)$$

$$C \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \frac{\partial \chi}{\partial s} - J_3 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial t} - F_2 = 0, \quad (10f)$$

$$A \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} - J_1 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + F_1 = 0, \quad (10g)$$

$$C \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - c_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} = 0. \quad (10h)$$

4. 黏性介质中圆截面杆的扭转振动

上节中解耦的方程(10h)可独立确定杆的扭转振动. 设杆的长度为 L , 两端 P_0 和 P_L 固定, 边界条件为

$$\begin{aligned} \chi(0, t) = 0, \quad \chi(L, t) = 0, \\ \omega_3(0, t) = \omega_3(L, t) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

解出

$$\chi(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{n0} \sin k_n s \exp(-\delta_n t), \quad (12)$$

扭角相对弧坐标的第 n 次谐波以阻尼系数 δ_n 作衰减自由振动, 其中

$$k_n = \frac{2n\pi}{L}, \quad \delta_n = \frac{4\pi^2 n^2 C}{L^2 c_0} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (13)$$

χ_{n0} 为扭角 $\chi(s, t)$ 相对弧坐标的第 n 次谐波振幅.

5. 黏性介质中圆截面直杆的弯曲振动

忽略扭角对弯曲振动的影响, 令 $\chi(s, t) = 0$, 从方程(10f)导出 $F_2 = 0$. 讨论两端固定沿 ζ 轴的直杆在轴向压力 F_0 作用下的弯曲振动, 以杆的切线轴相对 ζ 轴的倾角 ϑ 及笛卡尔坐标 ξ, ζ 为广义坐标, 令

$$v_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad v_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad (14)$$

代入方程组(10), 得到

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial s \partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0, \quad (15a)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s \partial t} - \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0, \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial s} + F_3 \frac{\partial \vartheta}{\partial s} - \rho S \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right) - c_1 \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ = 0, \end{aligned} \quad (15c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_3}{\partial s} - F_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial s} - \rho S \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right) - c_3 \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ = 0, \end{aligned} \quad (15d)$$

$$A \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} - J_1 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + F_1 = 0. \quad (15e)$$

此方程组存在与直杆平衡对应的以下特解:

$$\begin{aligned} \vartheta = 0, \quad \xi = 0, \quad \zeta = s, \\ F_1 = 0, \quad F_3 = F_0. \end{aligned} \quad (16)$$

设轴向力为压力, 令 $F_0 = -|F_0|$, 定义以下无量纲弧坐标 \bar{s} 和时间坐标 \bar{t} , 无量纲参数 μ , 阻尼力系数 \bar{c}_1, \bar{c}_3 及无量纲扰动量 $x_i (i = 1, \dots, 5)$:

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{|F_0|}{A}} s, \quad \bar{t} = \frac{|F_0|}{\sqrt{\rho S A}} t,$$

$$\beta = \frac{|F_0|}{ES}, \quad \bar{c}_i = \sqrt{\frac{A}{\rho S}} \frac{c_i}{|F_0|} \quad (i = 1, 3),$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{|F_0|}{A}} \xi, \quad x_2 = \sqrt{\frac{|F_0|}{A}} \zeta - \bar{s}$$

$$x_3 = \vartheta, \quad x_4 = \frac{F_n}{|F_0|}, \quad x_5 = \frac{F_3}{|F_0|} + 1. \quad (17)$$

以撇号和点号表示对无量纲弧坐标 \bar{s} 和对时间 \bar{t} 的偏导数, 导出线性化扰动方程

$$\dot{x}'_1 - \dot{x}'_3 = 0, \quad (18a)$$

$$\dot{x}'_2 = 0, \quad (18b)$$

$$\ddot{x}_1 + \bar{c}_1 \dot{x}_1 + x'_3 - x'_4 = 0, \quad (18c)$$

$$\dot{x}_2 + \bar{c}_3 \dot{x}_2 - x'_5 = 0, \quad (18d)$$

$$x''_3 - \beta \ddot{x}_3 + x_4 = 0. \quad (18e)$$

利用以下指数形式特解:

$$\begin{aligned} x_i(s, t) = x_{i0} \exp(\lambda \bar{s} + w \bar{t}) \\ (i = 1, \dots, 5), \end{aligned} \quad (19)$$

代入方程组(18)后, 导出的特征方程包含 2 个待定参数 λ, w . 已经证明, 轴向受压直杆恒满足静态 Lyapunov 稳定性条件^[12], 空间域特征值 λ 为纯虚根 $\lambda = \pm i \bar{k}$. \bar{k} 为扰动解相对弧坐标周期变化的无量纲角频率, 可由端部的几何约束条件确定. 由于压杆两端约束状况与载荷完全对称, 要求受扰挠性线亦对称, 扰动量的边界值应满足

$$x_j(\bar{L}, t) = x_j(0, t) \quad (j = 1, 2, \dots, 5), \quad (20)$$

其中 $\bar{L} = L \sqrt{|F_0|/A}$ 为无量纲杆长. 则参数 \bar{k} 应满足附加条件 $\bar{k} \bar{L} = 2n\pi$, 整数 n 为受扰挠性线的谐波数. 导出

$$\bar{k} = k_n \sqrt{\frac{A}{|F_0|}}, \quad k_n = \frac{2n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (21)$$

则方程组(18)的特征方程中仅含待定的时域特征值 w ,

$$w^2(w^2 + aw + b) = 0, \quad (22)$$

其中

$$a = \frac{\bar{c}_1}{1 + \beta \bar{k}^2}, \quad b = \frac{\bar{k}^2(\bar{k}^2 - 1)}{1 + \beta \bar{k}^2}, \quad (23)$$

$\bar{k}^2 > 1$ 条件满足时, a, b 均为正实数, 直杆平衡在时域内为渐近稳定. 此条件与压杆的欧拉稳定性条件等价:

$$|F_0| < \frac{n^2 \pi^2 EI}{(L/2)^2} \leq \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2}, \quad (24)$$

从而证明,空间域内压杆的 Lyapunov 稳定性和欧拉稳定性条件为时域内黏性介质中压杆渐近稳定性充分必要条件. 满足此条件时压杆的受扰运动为衰减弯曲振动:

$$x_i(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{i0})_n \sin k_n s \sin \nu_n t \exp(-\delta_n t) \quad (i = 1, 2, \dots, 5), \quad (25)$$

其中 $(x_{i0})_n$ 为扰动 $x_i(s, t)$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) 相对弧坐标的第 n 次谐波振幅, 相应的第 n 次固有频率 ν_n 为

$$\nu_n = (\nu_{n0}^2 - \delta_n^2)^{1/2}, \quad (26)$$

其中 ν_{n0} 为无阻尼固有频率, δ_n 为弯曲振动阻尼系数,

$$\nu_{n0} = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S} \left(1 - \frac{|F_0| L^2}{4n^2 \pi^2 EI}\right)^{1/2}} \times \left(1 + \frac{4n^2 \pi^2 J_1}{\rho S L^2}\right)^{-1/2},$$

$$\delta_n = \frac{c_1}{2\rho S} \left(1 + \frac{4n^2 \pi^2 J_1}{\rho S L^2}\right)^{-1} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (27)$$

对于 $a = 0$ 的特例, $\bar{k}^2 > 1$ 为时域特征值的纯虚根条件, 即无阻尼压杆在时域内的稳定性必要条件.

6. 黏性介质中圆截面圆环杆的弯曲振动

讨论圆截面圆环杆的弯曲振动时, 改用极坐标 r, ϕ 为广义坐标, 令

$$v_1 = -\frac{\partial r}{\partial t}, \quad v_3 = r \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (28)$$

代入方程组(10), 得到

$$\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t} - r \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0, \quad (29a)$$

$$r \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (29b)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial s} + \frac{\partial \vartheta}{\partial s} F_3 + \rho S \left[\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - r \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \right] + c_1 \frac{\partial r}{\partial t} = 0, \quad (29c)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial s} - \frac{\partial \vartheta}{\partial s} F_1 - \rho S \left[r \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial r}{\partial t} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \right] - c_3 r \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (29d)$$

$$A \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} - J_1 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + F_1 = 0. \quad (29e)$$

此方程组存在与圆环杆平衡对应的以下特解:

$$\vartheta = \phi = \frac{s}{R}, \quad r = R, \quad F_1 = F_3 = 0, \quad (30)$$

其中 R 为圆环杆的半径. 重新定义无量纲弧坐标 \bar{s} 和时间坐标 \bar{t} , 无量纲参数 β, \bar{c}_i , 以及无量纲扰动量 x_i ($i = 1, \dots, 5$) 如下:

$$\bar{s} = \frac{s}{R}, \quad \bar{t} = \sqrt{\frac{A}{\rho S}} \frac{t}{R^2},$$

$$\beta = \frac{J_1}{\rho S R^2}, \quad \bar{c}_i = \frac{R^2 c_i}{\sqrt{\rho S A}} \quad (i = 1, 3),$$

$$x_1 = \frac{r}{R} - 1, \quad x_2 = \phi - \bar{s}, \quad x_3 = \vartheta - \bar{s},$$

$$x_4 = \frac{R^2}{A} F_n, \quad x_5 = \frac{R^2}{A} F_3. \quad (31)$$

导出圆环杆的扰动方程

$$\dot{x}'_1 - \dot{x}'_2 + \dot{x}'_3 = 0, \quad (32a)$$

$$\dot{x}'_1 + \dot{x}'_2 = 0, \quad (32b)$$

$$\ddot{x}_1 + \bar{c}_1 \dot{x}_1 + x'_4 + x_5 = 0, \quad (32c)$$

$$\ddot{x}_2 + \bar{c}_3 \dot{x}_2 + x_4 - x'_5 = 0, \quad (32d)$$

$$x''_3 - \mu \ddot{x}_3 + x_4 = 0. \quad (32e)$$

利用指数形式特解(19), 重复上节计算. 圆环杆的封闭性要求杆两端的扰动量满足边界条件(20), 将 $L = 2\pi R$ 代入(21)式后导出

$$\bar{k} = R k_n, \quad k_n = \frac{n}{R} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (33)$$

导出与(22)式相同形式的时域特征方程, 参数 a, b 重新定义为

$$a = \frac{\bar{c}_1 n^2 + \bar{c}_3}{n^2 + 1 + \beta(n^2 - 1)^2},$$

$$b = \frac{n^2(n^2 - 1)^2}{n^2 + 1 + \beta(n^2 - 1)^2}, \quad (34)$$

参数 a, b 均为正实数, 表明圆环杆平衡恒满足渐近稳定性条件. 其受扰运动与(25)式形式相同, 空间域角频率 \bar{k} 和时域固有频率 ν_n 由(33)(26)式确定, 其中无阻尼固有频率 ν_{n0} 和弯曲振动阻尼系数 δ_n 改为

$$\nu_{n0} = \frac{n(n^2 - 1)}{R^2 \sqrt{n^2 + 1}} \sqrt{\frac{EI}{\rho S} \left[1 + \frac{J_1(n^2 - 1)^2}{\rho S R^2(n^2 + 1)} \right]^{-1/2}},$$

$$\delta_n = \frac{(c_3 + c_1 n^2) R^2}{2\rho S R^2(n^2 + 1)} \left[1 + \frac{J_1(n^2 - 1)^2}{\rho S R^2(n^2 + 1)} \right]^{-1},$$

$$(n = 1, 2, \dots). \quad (35)$$

与通常使用的梁和圆环的横向振动固有频率公式比较, 基于 Kirchhoff 理论导出的弯曲振动频率公式(27)(35)考虑了轴向力和截面转动惯性效应的影响.

7. 结 论

圆截面弹性细杆在黏性介质中作平面运动时，其扭转振动与弯曲振动解耦。杆的扭转振动为衰减非周期运动。在无扭转条件下端部固定的轴向受压

直杆和圆环杆作衰减弯曲振动。导出的扭转振动和弯曲振动的自由振动频率和阻尼系数中考虑了轴向力和截面惯性效应的影响。证明了压杆在空间域内的 Lyapunov 稳定性和欧拉稳定性条件为时域内渐近稳定性的充分必要条件，或无阻尼压杆的稳定性必要条件。圆环杆平衡恒满足渐近稳定性条件。

-
- [1] Westcott T P , Tobias I and Olson W K 1995 *J. Phys. Chemistry* **99** 17926
- [2] Klapper I 1996 *J. Comput. Physics* **125** 325
- [3] Goriely A and Shipman P 2000 *Physical Review E* **61** 4508
- [4] Xue Y , Chen L Q and Liu Y Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2040 (in Chinese) [薛 纭、陈立群、刘延柱 2004 物理学报 **53** 2040]
- [5] Liu Y Z , Xue Y and Chen L Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2424 (in Chinese) [刘延柱、薛 纭、陈立群 2004 物理学报 **53** 2424]
- [6] Xue Y , Chen L Q and Liu Y Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4029 (in Chinese) [薛 纭、陈立群、刘延柱 2004 物理学报 **53** 4029]
- [7] Liu Y Z and Xue Y 2005 *Chinese Quarterly of Mechanics* **26** 1 (in Chinese) [刘延柱、薛 纭 2005 力学季刊 **26** 1]
- [8] Goldstein R E *et al* 1998 *Phys. Review Letters* **80** 5232
- [9] Camalet S , Jülicher F and Prost J 1999 *Physical Review Letters* **82** 1590
- [10] Wolgemuth C W , Powers T R and Goldstein R E 2000 *Physical Review Letters* **84** 1623
- [11] Keller J B and Rubinow S L 1976 *J. Fluid Mechanics* **75** 705
- [12] Liu Y Z 2002 *J. Shanghai Jiaotong University* **36** 1587 (in Chinese) [刘延柱 2002 上海交通大学学报 **36** 1587]

Planar vibration of a thin elastic rod with circular cross section in viscous medium *

Liu Yan-Zhu

(Department of Engineering Mechanics , Shanghai Jiaotong University , Shanghai 200030 , China)

(Received 10 March 2005 ; revised manuscript received 26 April 2005)

Abstract

The planar vibration of a thin elastic rod with circular cross section in viscous medium is discussed. Based on the Kirchhoff's theory the dynamical equations of the rod are established in the Frenet coordinates of the centerline. The torsional vibration is decoupled from the flexural vibration when the centerline is an arbitrary planar curve. The planar torsional vibration of an arbitrary planar rod and the planar flexural vibrations of an axially compressed straight rod and a ring without torsion are discussed when the ends of the rod are fixed. The natural frequencies and the damping coefficients are derived. It is proved that the Lyapunov's and Euler's conditions of stability of an axially compressed straight rod in the space domain are the sufficient and necessary condition of asymptotic stability of the rod in the time domain , or the necessary condition of stability of the rod without damping. The asymptotic stability of a ring in viscous medium is always satisfied.

Keywords : thin elastic rod , viscous medium , torsional vibration , flexural vibration

PACC : 0320 , 0340D