第 54 卷 第 11 期 2005 年 11 月
1000-3290/2005/54(11)/4999-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.11, November, 2005

变系数 KP 方程新的类孤波解和解析解

毛杰健[†] 杨建荣

(江西上饶师范学院物理系,上饶 334001)

(2005 年 3 月 9 日收到;2005 年 4 月 30 日收到修改稿)

用普通 Sine-Gordon 的行波变换方程,提出了一种新的求解变系数 Kaolomtsev-Petviashvili(KP)方程的方法,获得了变系数 KP 方程新的类孤波解、类 Jacobi 椭圆函数解和三角函数解.

关键词:变系数 KP 方程, Sine-Gordon 方程, 类椭圆函数解, 类孤波解

PACC:0340K, 0290

1. 引 言

系数依赖于时间的广义 Kaolomtsev-Petviashvili (KP)方程[1]为

$$u_{xt}+6f_1(u_x^2+uu_{xx})+f_2u_{xxxx}+6fu_x+g^2u_{yy}+f_3=0, \tag{1}$$

式中 f, f_1, f_2, f_3, g 为时间 t 的函数. 它是许多方程的统一和推广,有着广泛的物理背景,在流体力学、等离子体物理、气体动力学等领域有重要的应用. 如取(1)式中的 $f_3=0$,则(1)式演化为

$$u_{xt}+6f_1(u_x^2+uu_{xx})+f_2u_{xxxx}+6fu_x+g^2u_{yy}=0. \tag{2}$$

它也是物理学家和数学家感兴趣和研究的一个方程. 如文献[2]利用截断展开法,文献[3]利用 Backlund 变换研究了广义 KP 方程的类孤波解;文献[4,5]利用扩展的双曲正切函数法,得到了(2)式具有 Painleve 性质条件下的解;文献[6]用反散射法研究了变系数存在外力项的 Korteweg-de Vries(KdV)方程精确解;文献[7,8],用双线性法讨论(3+1)维 KdV 方程的解;文献[9]用综合的扩展双曲正切函数法,构造非线性方程的解;文献[10]用新的综合的扩展方法,找到了变系数 KdV 方程的解;对非线性方程的求解,还有其他的报道[11—14]. 最近文献[15—22]用 Sine-Gordon 方程的行波解作为变换方法,构造(1+1)维常系数偏微方程的解. 本文将这一思想由(1+1)维推广到(2+1)维,由常系数推广到变系数偏微分方程,从而找到(2)式的新的孤波解和解析解.

[†]E-mail:mjj821@sohu.com

2. 解的构造

对著名的 Sine-Gordon 方程

$$u_{xt}=2\sin u, \tag{3}$$

作行波变换

$$u(\xi)=2\omega(\xi),\ \xi=k(x-\lambda t),\ b=2/k\lambda,$$

降阶后,得到一阶常微分方程

$$\frac{d\omega}{d\xi}=\sqrt{a+b\sin^2\omega}. \tag{4}$$

由(4)式得

$$\frac{d^2\omega}{d\xi^2}=b\sin\omega\cdot\cos\omega, \tag{5}$$

$$\frac{d^3\omega}{d\xi^3}=b\sqrt{a+b\sin^2\omega}(2\cos^2\omega-1), \tag{6}$$

$$\frac{d^4\omega}{d\xi^4}=b\sin\omega\cdot(6b\cos^2\omega-5b-4a), \tag{7}$$

其中 a, b 是积分常数. 对于不同的 a, b,(4)式有不同的解. 为了利用(4)—(7)式的结果,寻找(2)式的解,首先平衡(2)式的最高导数项和非线性项得到 $n=2$. 设(2)式有如下形式的解:

$$u=p+q\tan\omega+r^2\tan^2\omega, \tag{8}$$

$$\xi=cx+dy+e, \tag{9}$$

其中 c, d, e, p, q, r 为依赖于 t 的函数. 将(8),(9)式代入(2)式,并将 $\frac{d^k\omega}{d\xi^k}$ $(k=1,2,\cdots,4)$ 用(4)—(7)式的右边替换,借助计算机符号运算软件 Maple 化简,得到关于 $\sin^i\omega$ $(i=0,1)$, $\cos^j\omega$ $(j=0,1,\cdots,6)$ 的常微分方程

$$F(\sin^i\omega,\cos^j\omega,\sin^i\omega\cos^j\omega)=0,$$
$$(i=0,1;j=0,1,\cdots,6).\tag{10}$$

3. 变系数 KP 方程的解

3.1. $a=0,b=1$

如取(4)式中的 $a=0,b=1$,(4)式有解[15]

$$\sin\omega=\mathrm{sech}\xi,\cos\omega=-\tanh\xi.\tag{11}$$

将(11)式代入(10)式,经化简得到关于 $\sinh^i\xi\cosh^j\xi(\sqrt{\mathrm{sech}^2\xi})^k x^l y^m$ 的常微分方程,其中 $i=0,1;j=0,1,\cdots,6;k=0,1;l=0,1;m=0,1$. 并令其分子中的各项系数为零,得到如下方程组:

$$-2r^2ce_t-12f_1pr^2c^2-6f_1q^2c^2-2g^2r^2d^2+12f_1r^4c^2+16f_2r^2c^4=0,\tag{12}$$

$$-2r^2cd_t=0,\tag{13}$$

$$-2r^2cc_t=0,\tag{14}$$

$$-2r^2ce_t+48f_1r^4c^2+88f_2r^2c^4-6f_1q^2c^2-2g^2r^2d^2-12f_1pr^2c^2=0,\tag{15}$$

$$4g^2r^2d^2+4r^2ce_t+24f_1pr^2c^2+16f_2r^2c^4+12f_1q^2c^2=0,\tag{16}$$

$$-q(5f_2c^4-d^2g^2-6f_1pc^2+18f_1c^2r^2-ce_t)=0,\tag{17}$$

$$-18qc^2(f_2c^2+3f_1r^2)=0,\tag{18}$$

$$-q(6f_1pc^2+d^2g^2+ce_t+f_2c^4)=0,\tag{19}$$

$$q_tc+6fqc+qc_t=0,\tag{20}$$

$$2r(rc_t+2cr_t+6rfc)=0.\tag{21}$$

由(13),(14),(18),(21)式解得

$$c=k_1,\ d=k_2,\ r=k_3\mathrm{e}^{-\int 3f\mathrm{d}t},$$
$$f_1=-2\frac{f_2k_1^2}{r^2}.\tag{22}$$

由(12),(15),(16),(17),(19),(20)式解得

$$q=0,$$
$$e=-\frac{1}{k_1}\int(-6f_1pk_1^2-g^2k_2^2+6f_1r^2k_1^2+8f_2k_1^4)dt+k_4.\tag{23}$$

得到(2)式的类孤波解

$$u_1=p+k_3^2\mathrm{e}^{-\int 6f\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{sech}^2\xi}{1-\mathrm{sech}^2\xi},\tag{24}$$

其中,p 为 t 的任意函数,k_1,k_2,k_3,k_4 为任意常数,

$$\xi=k_1x+k_2y-\frac{1}{k_1}\int(-6f_1pk_1^2-g^2k_2^2+6f_1r^2k_1^2+8f_2k_1^4)\mathrm{d}t+k_4.\tag{25}$$

3.2. $a=1,b=-m^2$

若取(4)式中的 $a=1,b=-m^2$,则(4)式有解[15]

$$\sin\omega=\mathrm{sn}(\xi),\ \cos\omega=\mathrm{cn}(\xi),\tag{26}$$

其中 sn,cn,dn 为 Jacobi 椭圆函数,m 为模数. 将(26)式代入(10)式,经化简得到关于

$$\mathrm{sn}^i\xi\,\mathrm{cn}^j\xi\,\mathrm{dn}^k\xi(\sqrt{1-m^2\mathrm{sn}^2\xi})^l x^m y^n$$

的常微分方程,其中 $i=0,1;j=0,1,\cdots,6;k=0,1;l=0,1;m=0,1;n=0,1$. 并令其分子中的各项系数为零,得到如下方程组:

$$12f_1pr^2c^2-8f_2r^2c^4m^2+2g^2r^2d^2+2r^2ce_t+16f_2r^2c^4+6f_1q^2c^2=0,\tag{27}$$

$$2r^2cd_t=0,\tag{28}$$

$$2r^2cc_t=0,\tag{29}$$

$$2r^2cc_t(-1+2m^2)=0,\tag{30}$$

$$12f_1pr^2c^2+36f_1r^4c^2+6f_1q^2c^2+2g^2r^2d^2+88f_2r^2c^4+2r^2ce_t-12f_1q^2c^2m^2-112f_2r^2c^4m^2-24f_1pr^2c^2m^2-4g^2r^2d^2m^2+16f_2r^2c^4m^4-4r^2cm^2e_t=0,\tag{31}$$

$$-2r^2cd_t(m^2-2)=0,\tag{32}$$

$$-12f_1q^2c^2-4g^2r^2d^2+16f_2r^2c^4+24f_1r^4c^2-4r^2ce_t-24f_1pr^2c^2+2r^2cm^2e_t+88f_2r^2c^4m^4-48f_1r^4c^2m^2+6f_1q^2c^2m^2+12f_1pr^2c^2m^2+2g^2r^2d^2m^2-112f_2r^2c^4m^2=0,\tag{33}$$

$$-r^2ce_t-g^2r^2d^2-6f_1pr^2c^2+4f_2r^2c^4+6f_1r^4c^2-8f_2r^2c^4m^2-3f_1q^2c^2=0,\tag{34}$$

$$16f_2c^4+36f_1c^2r^2-g^2m^2d^2+f_2c^4m^4-cm^2e_t-16f_2m^2c^4-6f_1pc^2m^2+2ce_t+2d^2g^2+12f_1pc^2=0,\tag{35}$$

$$-6f_1pc^2+18f_1c^2r^2-14f_2m^2c^4+9f_2c^4m^4-27f_1r^2m^2c^2-ce_t-d^2g^2+4f_2c^4=0,\tag{36}$$

$$5f_2m^2c^4+d^2g^2+6f_1pc^2-18f_1c^2r^2$$

$$-4f_2c^4+ce_t=0,\tag{37}$$

$$6fqc+qc_t+q_tc=0,\tag{38}$$

$$rc_t+6rfc+2cr_t=0.\tag{39}$$

解的结果是

$$f_1r^2-2c^2f_2m^2+2c^2f_2=0,\tag{40}$$

$$c=k_1,\ d=k_2,\ q=0,$$

$$r=k_3\mathrm{e}^{-\int 3f\mathrm{d}t},$$

$$e=-\frac{1}{k_1}\int(g^2k_2^2+6f_1pk_1^2-4f_2k_1^4-6f_1r^2k_1^2+8f_2k_1^4m^2)\mathrm{d}t+k_4.\tag{41}$$

得到(2)式的解析解

$$u_2=p+k_3^2\mathrm{e}^{-\int 6f\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{sn}^2\xi}{1-\mathrm{sn}^2\xi},\tag{42}$$

其中，p 为 t 的任意函数，k_1,k_2,k_3,k_4 为任意常数，

$$\xi=k_1x+k_2y-\frac{1}{k_1}\int(g^2k_2^2+6f_1pk_1^2-4f_2k_1^4-6f_1r^2k_1^2+8f_2k_1^4m^2)\mathrm{d}t+k_4.\tag{43}$$

3.3. $a=m^2,b=-1$

如取(4)式中的 $a=m^2$，$b=-1$，则(4)式有解[15]

$$\sin\omega=m\,\mathrm{sn}\xi,\ \cos\omega=\mathrm{dn}\xi.\tag{44}$$

将(44)式代入(10)式，经化简得到关于 $\mathrm{sn}^i\xi\mathrm{cn}^j\xi\mathrm{dn}^k\xi(\sqrt{m^2\mathrm{cn}^2\xi})^lx^my^n$ 的常微分方程，其中

$$i=0,1;\ j=0,1,\cdots,6;\ k=0,1;\ l=0,1;\ m=0,1;\ n=0,1.$$

并令其分子中的各项系数为零，得到如下方程组：

$$8f_2r^2c^4m^2+g^2r^2d^2+r^2ce_t+3f_1q^2c^2-4f_2r^2c^4+6f_1pr^2c^2=0,\tag{45}$$

$$2m^2r^2cd_t=0,\tag{46}$$

$$2m^2r^2cc_t=0,\tag{47}$$

$$c_t(-2+m^2)=0,\tag{48}$$

$$44f_2r^2c^4m^4+3f_1q^2c^2m^2+r^2cm^2e_t-56f_2r^2c^4m^2+6f_1pr^2c^2m^2+18m^2f_1r^4c^2-g^2r^2d^2m^2+8f_2r^2c^4-12f_1pr^2c^2-6f_1q^2c^2-2g^2r^2d^2-2r^2ce_t=0,\tag{49}$$

$$4f_2c^4m^4-6m^2f_1pc^2-m^2d^2g^2-m^2ce_t+18m^2f_1c^2r^2-14m^2f_2c^4+9f_2c^4-27f_1c^2r^2=0,\tag{50}$$

$$rc_t+6rfc+2cr_t=0,\tag{51}$$

$$8f_2r^2c^4m^4-6f_1q^2c^2m^2+12m^2f_1r^4c^2-2g^2r^2d^2m^2-2r^2cm^2e_t-56f_2r^2c^4m^2-12f_1pr^2c^2m^2+44f_2r^2c^4-24f_1r^4c^2+3f_1q^2c^2+6f_1pr^2c^2+g^2r^2d^2+r^2ce_t=0,\tag{52}$$

$$4f_2r^2c^4m^2-6f_1pr^2c^2-r^2ce_t-g^2r^2d^2-3f_1q^2c^2+6f_1r^4c^2-8f_2r^2c^4=0,\tag{53}$$

$$16f_2c^4m^4+2m^2ce_t+12m^2f_1pc^2-16m^2f_2c^4+2m^2d^2g^2+36f_1c^2r^2+f_2c^4-d^2g^2-6f_1pc^2-ce_t=0,\tag{54}$$

$$4m^2f_2c^4-5f_2c^4-6f_1pc^2+18f_1c^2r^2-d^2g^2-ce_t=0,\tag{55}$$

$$qc_t+q_tc+6fqc=0.\tag{56}$$

解之得

$$c=k_1,d=k_2,q=0,r=k_3\mathrm{e}^{\int -3f\mathrm{d}t},$$

$$e=\frac{1}{k_1}\int(-8f_2k_1^4m^2-k_2^2g^2+4f_2k_1^4-6f_1pk_1^4)\mathrm{d}t+k_4,\tag{57}$$

$$f_1r^2+2f_2m^2k_1^2-2f_2k_1^2=0.\tag{58}$$

得到(2)式的解析解

$$u_3=p+k_3^2\mathrm{e}^{-\int 6f\mathrm{d}t}\frac{m^2\mathrm{sn}^2\xi}{1-m^2\mathrm{sn}^2\xi},\tag{59}$$

其中，p 为 t 的任意函数，k_1,k_2,k_3,k_4 为任意常数，

$$\xi=k_1x+k_2y+\frac{1}{k_1}\int(-8f_2k_1^4m^2-k_2^2g^2+4f_2k_1^4-6f_1pk_1^4)\mathrm{d}t+k_4.\tag{60}$$

4. 结　论

本文用普通 Sine-Gordon 的行波变换方程，扩展推广应用到求解变系数 KP 方程的方法，获得变系数 KP 方程(2)式的新的类孤波解，如(24)式 类椭圆 Jacobi 正弦(余弦) 函数解析解，如(42)，(59)式；当 $m\to0$，$\mathrm{sn}\xi\to\sin\xi$，$\mathrm{cn}\xi\to\cos\xi$，由(42)式得到三角函数解.

作者衷心感谢张解放教授的指导.

[1] Zhu Z N 1992 *Acta Phys*. *Sin*. **41** 1561 (in Chinese) [朱佐农 1992 物理学报 **41** 1561]
[2] Zhang J F and Chen F Y 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1648 (in Chinese) [张解放、陈芳跃 2001 物理学报 **50** 1648]
[3] Zhu Z N 1993 *Phys*. *Lett*. A **182** 277
[4] Yomba E 2004 *Chaos*, *Solitons & Fractals* **21** 75
[5] Elwakil S A, El-labany S K, Zahran M A *et al* 2004 *Chaos*, *Solitons & Fractals* **19** 1083
[6] Xie Y C 2003 *Phys*. *Lett*. A **310** 161
[7] Ma W X 2002 *Phys*. *Lett*. A **301** 35
[8] Lou S Y 1996 *J*. *Phys*. *A* : *Math*. *Gen*. **29** 5989
[9] Zheng X D, Chen Y and Zhang H Q 2003 *Phys*. *Lett*. A **311** 145
[10] Sabry R, Zahran M A and Fan E G 2004 *Phys*. *Lett*. A **326** 93
[11] Zhang J F and Wu F M 1999 *Chin*. *Phys*. **8** 326
[12] Lai X J and Zhang J F 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 4065 (in Chinese) [来娴静、张解放 2004 物理学报 **53** 4065]
[13] Zhang J F 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 651
[14] Zhang J F 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 425
[15] Yan Z Y 2005 *Chaos*. *Solitons & Fractals* **23** 767
[16] Yan C T 1996 *Phys*. *Lett*. A **224** 77
[17] Yan Z Y and Zhang H Q 1999 *Phys*. *Lett*. A **252** 251
[18] Yan Z Y *et al* 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1
[19] Fu Z *et al* 2002 *Phys*. *Lett* . A **299** 507
[20] Yan Z Y 2003 *Chaos*, *Solitons & Fractals* **16** 291
[21] Yan Z Y 2003 *Comput*. *Phys*. *Commun*. **153** 154
[22] Fu Z T, Liu S K and Liu S D 2003 *Commun*. *Theor*. *Phys*. (Beijing, China) **39** 27

New solitary wave-like solution and exact solution of variable coefficient KP equation

Mao Jie-Jian   Yang Jian-Rong
(*Department of Physics*, *Shangrao Normal College*, *Shangrao* 334001, *China*)
(Received 9 March 2005; revised manuscript received 30 April 2005)

Abstract

With the help of the general Sine-Gordon travelling wave transformation equation, we present a new method for solving the variable coefficient KP equation, and successfully obtain the new solitary wave-like solution, the Jacobi elliptic function-like solution and trigonometric function solution of variable coefficient KP equation.

Keywords: variable coefficient KP equation, Sine-Gordon equation, elliptic function-like solution, solitary wave-like solution
PACC: 0340K, 0290